HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES

Année M. DCCXXIII.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique pour la même année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS, RUE S. JACQUES,
Chez DURAND, Libraire, à S. Landry & au Griffon.

M. DCCLIII.

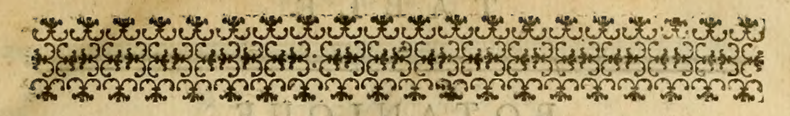


TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

ALGEBRE.

GEOMETRIE.

ASTRONOMIE.

OPTIQUE.

MECHANIQUE.



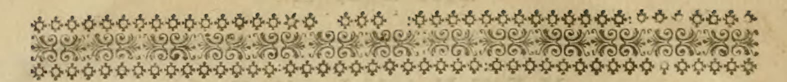


TABLE
POUR
LES MEMOIRES.



HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES.
Année M. DCCXXIII.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR LA MANIERE dont le Fer s'aimante.



L'AIMAN est si fécond en prodiges, que chacun de ses phénomenes principaux, dès qu'il est approfondi, en devient une source presque inépuisable, & se subdivise, pour ainsi dire, en une infinité de prodiges nouveaux. Telle est la maniere dont le Fer s'aimante, c'est-à-dire, acquiert la proprieté qu'il n'avoit pas d'attirer d'autre fer aussi-bien que l'Aiman. M. de

V. les M. p. 81.

Reaumur, qui a étudié cette proprieté, l'a trouvée & beaucoup plus étendue, & beaucoup plus variée, en un mot beaucoup plus surprenante qu'on ne pensoit.

Pour aimanter une aiguille de boussole, un couteau &c. on les fait toucher à une pierre d'Aiman, en les conduisant le long de cette pierre selon la ligne qui joint ses deux poles, il n'en faut pas davantage. Il est étonnant que le fer ait acquis une nouvelle vertu par le simple contact de l'Aiman : mais il l'est encore plus que ce contact ne soit pas nécessaire, non pas même l'Aiman, & que le fer s'aimante uniquement par d'autre fer. C'est ce qui arrive à chaque moment dans des boutiques, où l'on n'y fait pas d'attention ; presque tous les outils dont les ouvriers se servent pour couper ou pour percer le fer à froid, ciseaux, burins, poinçons, &c. se sont aimantés, ils attirent la limaille de Fer, dès qu'on les en approche, ils s'en chargent & s'en couvrent, & quelquefois enlevent de petits clouds, comme s'ils avoient été touchés par un Aiman mediocre.

Tous ces outils ont été trempés : mais M. de Reaumur s'est bien assûré par des experiences que la trempe ne leur a pas donné cette vertu, ils ne la tiennent que de ce qu'ils ont travaillé sur le fer. Un poinçon ou un ciseau sont aimantés par le premier coup de marteau qu'on leur donne sur un morceau de fer ; un second, un troisieme coup les aimantent encore mieux : mais cela a des bornes, après quoi ils n'acquierent rien de plus.

Il faut que le fer sur lequel ils ont travaillé ait été froid, & même ils perdroient sur le fer rougi au feu la force attractive qu'ils auroient prise sur le fer froid.

Ils n'en prennent qu'une très-foible sur d'autres matieres, telles que le bois, la pierre, le cuivre.

Ils en prennent aussi un peu par de simples coups de marteau donnés à vuide.

Ils la perdent de la même façon, & même celle qu'ils auroient prise en travaillant sur le fer, ou en touchant un Aiman foible.

Les outils qui avec une même masse ont une figure plus allongée, s'aimantent mieux, les poinçons, par exemple, mieux que les ciseaux.

Tout cela est constant par des expériences exactes de M. de Reaumur, autant réiterées ou variées qu'il l'a fallu.

Tous les Physiciens reconnoissent autour de l'Aiman un tourbillon de matiere magnetique, qui a deux poles où la matiere est beaucoup plus serrée. Nous avons dit en 1717 * combien ce tourbillon est sensible. On reconnoît d'ailleurs le fer pour un Aiman imparfait. M. de Reaumur fait consister cette imperfection, en ce que quoi qu'il circule beaucoup de matiere magnetique au dedans & au dehors du fer, elle n'y a pas un cours régulier, qui forme un tourbillon bien construit à la maniere de celui de l'Aiman. Le tourbillon magnetique du fer, au lieu de deux poles uniques, en a un grand nombre placés çà & là sans ordre. Et comme la vertu attractive de l'Aiman vient de la régularité de son tourbillon, il ne faut pour changer à cet égard le fer en Aiman, que rendre son tourbillon régulier.

* p. 5. & suiv.

C'est ce que peuvent faire de simples coups de marteau, l'ébranlement qu'ils causeront à toutes les parties de la masse forcera la matiere magnetique qui la pénetre & y circule à prendre un autre cours, toute la merveille est que cet autre cours soit justement celui qu'il faut. Pour cela on doit concevoir qu'il s'en falloit bien peu qu'il ne le fût, que la cause générale qui fait circuler la matiere magnetique dans le fer, tend par elle-même à l'y faire circuler aussi régulierement que dans l'Aiman, qu'elle n'en est détournée que par quelque legere opposition qui vient de la structure intérieure du Fer, & qu'elle profite du moindre secours pour reprendre sa régularité naturelle. Aussi le fer ne prend-il qu'une très-foible vertu par les simples coups; aussi la perd-il de même, le tourbillon se retrouve dérangé.

Mais si un outil d'acier coupe ou perce du fer, il a pour s'aimanter un grand avantage, outre celui qu'il peut tirer des percussions. Il fait sortir par son action, il exprime du fer de

la matiére magnetique qui se joignant à la sienne propre, augmente la force qu'elle avoit pour se mettre en tourbillon régulier.

Si le fer sur lequel l'outil travaille est rougi au feu, la matiére magnetique n'est plus exprimée du fer, parce que ses pores étant dilatés par le feu, elle y circule avec une entiere liberté. Peut-être même celle de l'outil passe-t-elle dans le fer rouge, à cause de la facilité plus grande qu'elle trouvera à s'y mouvoir, ce qui est précisément le contraire de ce qu'il faudroit pour aimanter l'outil.

Les outils d'une figure allongée s'aimantent mieux, parce que pour être aimantés, il faut qu'ils ayent leurs Poles vers leurs deux bouts : or plus ces bouts sont éloignés l'un de l'autre, la masse étant la même, plus le lit, pour ainsi dire, où coule la matiere magnetique est serré, & plus par consequent elle prend de force en y coulant.

Une experience que M. de Reaumur fit par hasard, lui prouva bien la communication des tourbillons de deux morceaux de fer entre eux, & l'augmentation de force que cette communication cause au tourbillon le plus foible. Il essayoit la vertu de quelques outils aimantés par le travail, il étoit tout proche d'une enclume, & il y posoit les petits morceaux de fer qu'il faisoit attirer & enlever par ces outils. Il s'apperçut que quand il ne les posoit pas sur l'enclume, ils n'étoient plus attirés, ni enlevés, qu'il leur en falloit substituer de moins pesants, & que cela arrivoit même, mais avec moins de différence, lorsqu'ils étoient posés sur quelque morceau de fer moins gros que l'enclume. Le tourbillon de l'enclume s'unissoit donc à celui des outils, & le fortifioit. Nous avons rapporté quelque chose de semblable en 1717 à l'endroit cité.

Une vûe fournie par des expériences en fait naître d'autres qui demandent des expériences nouvelles, & il n'y auroit à craindre que de ne pas finir si on vouloit tout suivre jusqu'au bout. M. de Reaumur conçut que puisqu'il ne manquoit autre chose au fer pour être aiman, sinon que ses dif-

férents tourbillons se réünissent pour n'en faire qu'un, qui alors auroit nécessairement ses deux poles, & n'en auroit que deux, ce pourroit être un moyen de parvenir à cet effet que de tourmenter le fer, de le secoüer, de l'agiter intérieurement, en le pliant & le repliant diverses fois. Il le fit sur une verge de fer qui n'avoit que la grosseur requise, & il vit qu étant cassée à l'endroit qui avoit été plié & replié, les deux bouts de la cassure attiroient de la limaille, s'en chargeoient, & enfin étoient mieux aimantés qu'ils ne l'eussent été par un aiman mediocre. Voilà du fer aimanté par lui-même.

Les deux bouts qu'avoit la verge avant que d'être cassée ne sont point aimantés, il n'y a que les deux bouts de la cassure qui le soient. C'est-là que les différents Tourbillons ont été forcés à se réunir, parce que des parties comprimées ont chassé d'entre leurs interstices la matiere magnétique, & que d'autres qui se sont écartées les unes des autres l'ont reçûe.

Un fil de fer trop menu ne s'aimante presque pas dans sa cassure. La matiere du fer a été trop également comprimée par les plis & replis, & les tourbillons sont demeurés tels qu'ils étoient.

De plus grosses verges s'aimantent mieux, mais non pas dans l'exacte proportion de leur grosseur.

Il faut que les deux bouts cassés ayent une certaine longueur. Un bout trop court ne se seroit pas aimanté. Cela revient à ce qui a déja été dit.

Le fer le plus doux est celui qui s'aimante le mieux par cette operation. Il se laisse mieux plier & replier.

Il ne faut pourtant pas qu'il l'ait été trop. Un trop grand nombre de plis & de replis lui fait perdre la vertu acquise par un nombre suffisant. Cela revient aux coups de Marteau dont on a parlé.

La vertu acquise par cette operation s'affoiblit peu-à-peu, & quelquefois ne dure qu'un jour. Apparemment les parties du fer se remettent par leur ressort dans leur premier état. Elles ne s'y remettent pas soudainement, parce qu'elles ont

à vaincre le nouveau cours que la matiére magnétique a pris.

Il étoit naturel de juger que si après avoir cassé une verge par cette operation, on en prenoit une des deux parties, & pour plus de commodité la plus grande, dont par consequent un bout seroit aimanté, & qu'on recommençât l'opération sur cette partie en la pliant & repliant, le bout aimanté viendroit à l'être encore mieux. C'est aussi ce que M. de Reaumur pensa, & dont il fut pleinement assûré par l'experience. Le bout aimanté en fut quatre fois plus fort, la verge ayant été tourmentée en huit endroits différents.

Il faut bien remarquer que ces huit endroits avoient été pris entre le milieu de la verge, & le bout aimanté. M. de Reaumur s'avisa de prendre de l'autre côté les endroits où il plioit & replioit : le bout non aimanté qui étoit de ce côté-là s'aimanta à mesure que les plis & replis se répétoient, l'autre s'affoiblissoit en même temps, & enfin presque toute sa vertu passa dans le bout qui d'abord n'en avoit aucune. Cela n'arrive pourtant pas toûjours si juste, on ne fait souvent que diminuer la force du bout aimanté d'abord, sans en donner autant à l'autre.

Si on prend une verge de fer, & qu'on la tourmente d'abord par son milieu, ensuite de part & d'autre de ce milieu à de petites distances égales, les deux bouts ne sont pas sensiblement aimantés, ils ne viennent à l'être que quand les plis & replis ont été faits environ au tiers ou au quart de la distance qui est entre le milieu, & chaque bout; encore sont-ils beaucoup plus foiblement aimantés que si l'operation n'avoit regardé qu'un seul des deux, c'est-à-dire que la verge n'eût été tourmentée que de son côté. M. de Reaumur a poussé encore plus loin ses expériences sur cette matiere, & l'on trouve toûjours des phénomenes singuliers, extremement délicats, sujets à de grands changements par de legers changements de circonstances. Il n'est pas impossible d'en entrevoir les causes physiques : mais il seroit du moins très-difficile de les mettre dans une assez grande évidence. Il faut que dans ces sortes d'occasions la raison relâche un peu de sa rigueur ordinaire.

La grande facilité du fer à s'aimanter eſt prouvée depuis aſſez long-temps par l'expérience des pincettes, qui ayant demeuré pendant un Eté poſées verticalement & immobiles dans un coin de cheminée, ſe trouvent aimantées deſorte que leur bout inférieur attire la pointe méridionale d'une aiguille de bouſſole, & le bout ſupérieur la pointe Septentrionale. M. de Reaumur, qui a répété cette experience, & obſervé les circonſtances néceſſaires pour la rendre ſûre, au lieu qu'on la croyoit incertaine, abrege bien le temps qu'il faut à une barre ou verge de fer pour s'aimanter. Je dis *barre* ou *verge*, parce qu'il a trouvé que le fer dont on fait les pincettes eſt le moins propre de tous à ce qu'on attend, & que d'ailleurs il ſuffit d'avoir un fer long, & qu'il vaut mieux qu'il ſoit tout droit. Il faut tenir toûjours ce fer verticalement; ſi on en préſente le bout inferieur à la pointe méridionale de l'aiguille, on voit qu'il attire cette pointe, & ſi on baiſſe la barre de fer toûjours verticale juſqu'à ce que ſon bout ſupérieur ſe préſente à la même pointe de l'aiguille, il la repouſſera. Ce ſera la même choſe renverſée, ſi c'eſt le bout ſupérieur que l'on préſente le premier. Ce n'eſt pas encore là la merveille. Mais ſi cette barre ainſi aimantée, & qui a acquis deux poles, eſt retournée de haut en bas, ce qui ne demande qu'un inſtant, & qu'on préſente ſon bout devenu inferieur à la pointe méridionale de l'aiguille, il l'attirera, au lieu qu'auparavant il la repouſſoit; on voit aſſez quel ſera le reſte du phénomene. Voilà donc les poles de la barre changés en un inſtant; & apparemment on n'eût pas cru qu'un tourbillon régulier bien formé eût pû ſe renverſer en ſens contraire avec tant de facilité & de promptitude.

La néceſſité que la ſituation de la barre ſoit verticale, ſemble prouver que le cours de la matiere magnetique dans le grand tourbillon qu'elle forme autour de la Terre eſt plus vertical qu'horiſontal, mais ce ſeroit là un point à examiner plus à fond. La Philoſophie auroit lieu d'être bien contente de ſon travail, ſi elle avoit ſeulement découvert tous les phénomenes de l'aiman.

SUR LA LUMIERE DES DAILS.

V. les M. p. 198.

* p. 14. & suiv.

LEs Dails sont une espece de coquillage dont nous avons parlé en 1712*. Pline leur a donné une lumiere qu'il appelle *miraculeuse*, ils luisent dans l'obscurité, & d'autant plus qu'ils sont plus frais, ils luisent dans la bouche de ceux qui les mangent, dans les mains de ceux qui les touchent, les gouttes qui tombent de leur corps, soit à terre, soit sur les habits, sont luisantes. M. de Reaumur qui en 1712 avoit nié cette propriété aux Couteliers, autre coquillage assez semblable aux Dails, veut bien avoir tort à l'égard de Pline, parce qu'il avoüe qu'il l'auroit niée aussi aux Dails, à qui il ne la connoissoit point alors. S'il a fait une faute, il la diminue mieux en l'augmentant volontairement, qu'en tâchant de la diminuer avec art, & par des détours.

Tout ce que Pline a dit des Dails a été verifié par M. de Reaumur. Differents Poissons étant pourris, & pareillement des chairs d'animaux terrestres, luisent dans l'obscurité, c'est tout le contraire des Dails, il faut qu'ils soient frais, & leur lumiére s'affoiblit à mesure qu'ils le sont moins, & cesse quand ils sont corrompus. Il n'y a que leurs chairs, & non leur coquille, qui soient lumineuses: mais elles le sont, & le sont également dans toute leur substance.

Leur lumiere tient à leur humidité, elles n'en ont plus quand elles sont seches: mais on la fait revivre, quoique plus foible, quand on les humecte d'eau simple, ou d'eau salée. L'eau de vie les éteint sur le champ.

L'humidité qui se détache du corps des Dails est si luisante, que M. de Reaumur qui en avoit touché, ayant ensuite lavé ses doigts dans de l'eau, cette eau parut dans l'obscurité comme du lait en plein jour.

Il soupçonne que des Dails pourris, mêlés avec d'autres frais, les avoient empêchés de paroître lumineux.

Peut-être aussi, comme il le conjecture, y a-t-il des temps pour

pour la lumiere des Dails, & ce feroient ceux de quelque fermentation, comme celle qui arrive dans les temps destinés par la nature à l'accouplement des animaux. Il confirme cette penfée par l'exemple des vers luifants. Ils ne le font que dans les temps chauds, qui font apparemment ceux de leur accouplement.

Il eft bon de fçavoir que les Vers luifants font les femelles de l'efpece; les mâles ne font point luifants, & ils ont des aîles. Un jour que M. de Reaumur tenoit une femelle dans fa main, un mâle vint la trouver, & ils s'accouplerent. La lumiere de la femelle eft un petit phare qui guide le mâle au lieu où elle eft. Des expreffions poëtiques que nous employons dans le langage de l'amour, feroient employées au propre par ces infectes.

SUR LA RONDEUR DES PIERRES ET DES CAILLOUX.

IL manquoit au Siftème de la formation des pierres, donné par M. de Reaumur en 1721 * l'explication de la rondeur qu'affectent certaines efpeces de pierres, & principalement les cailloux. On n'entend point par-là une rondeur parfaite, ni approchante, elle eft très-rare, ce n'eft qu'un arrondiffement groffier, des contours toûjours courbes, & différents en différentes parties, des angles émouffés & abattus; jamais de lignes droites qui terminent des furfaces.

V. les M. p. 273.

* V. l'Hift. de 1721. pag. 12. & fuiv.

Si, comme il a été dit en 1721, *on pouvoit fuppofer que tous les cailloux ont roulé dans des rivieres, ou dans la mer, cette figure n'embarrafferoit pas : mais la fuppofition feroit trop violente; on trouve des cailloux ronds dans des lits de pierre d'une grande profondeur*, & quelque grands bouleverfemens qui foient arrivés autrefois fur la terre, il eft trop difficile de concevoir ni qu'ils ayent produit les figures de tous ces cailloux fans exception, qui font maintenant fi enfevelis, ni qu'il

ne se soit point formé de cailloux depuis ces bouleversemens. Il est sûr qu'il se forme encore aujourd'hui des crystaux & des pierres. Tout est encore également animé, également vivant.

* p. 21. & suiv.

On a vû en 1721 * quelle étoit la pensée de M. de Mairan sur des pierres, rondes aussi dans le sens que nous avons dit, trouvées à Breüil-pont. L'idée sera vraie pour des cas particuliers comme celui dont il s'agissoit; des pierres se seront formées comme des crystaux à des voûtes de Grottes soûterraines, le pedicule qu'on leur a remarqué étoit fort favorable à cette hypothese; mais cela ne peut pas être commun. Les congelations faites à des voûtes, prennent ordinairement des figures plus allongées que ne sont celles des cailloux; ce sont souvent des cylindres, & quelquefois des tuyaux creux. Il auroit fallu une infinité de voûtes renversées pour faire un grand nombre de lits très-étendus où se trouvent les cailloux & les pierres rondes; il auroit fallu encore qu'elles se fussent accordées malgré la violence du bouleversement, à se mettre dans une même disposition horisontale; & enfin une voûte ne fourniroit qu'un lit de cailloux, au lieu qu'on en voit plusieurs étendus les uns sur les autres, sans compter la grande profondeur où ils sont assez souvent.

Les nouvelles lumieres que nous avons dit en 1721 *qu'il valoit mieux attendre sur ce sujet*, sont venues presque d'elles-mêmes s'offrir à M. de Reaumur, & se sont liées très-naturellement avec son systême général sur la formation des pierres. Dans un banc de sable que l'on coupoit auprès de sa maison de campagne, il a trouvé une très-grande quantité de petits tas de ce même sable, distingués du reste par être liés, plus compactes, & arrondis presque tous irrégulierement. Il les a nommés des *marrons de sable*, à l'exemple des Ouvriers qui appellent *marrons* de glaise de semblables corps qu'ils trouvent dans la glaise. Ces marrons de sable étoient de toutes sortes de grosseurs, depuis celle d'un pois jusqu'à celle de la tête, & quelquefois plus. Ils étoient de

tous âges entr'eux, & souvent même leurs parties étoient entr'elles de tous âges, l'âge étant reglé sur ce que le sable devient pierre, & la pierre caillou. Plusieurs, sur-tout les gros, n'avoient qu'une envelope exterieure de sable, après quoi ils étoient pierre & déja caillou dans le centre. La couleur générale du banc de sable étant verdâtre, elle s'alteroit dans les marrons selon le degré de leur transformation, elle s'éclaircissoit & blanchissoit lorsqu'ils étoient pierre, & brunissoit lorsqu'ils étoient devenus caillou. Le suc pierreux dont nous avons parlé est par-tout ici trop reconnoissable, & il n'est pas besoin d'expliquer en détail comment il a produit ces phénomenes.

Ce qui acheve bien la preuve, c'est qu'au-dessus de ce banc de sable il y en avoit un autre d'un sable plus gros & plus sec, tout rempli de cailloux bien formés & parfaits, d'une infinité de figures différentes, & dont toutes les figures avoient leur semblable dans quelque marron de sable du banc inferieur. Ces marrons étoient donc destinés à devenir cailloux.

Si le suc pierreux, on n'examine point d'où il vient, ni quel est son cours, trouve un banc de sable où il puisse couler & se répandre également de tous côtés & en tous sens, il liera également tous les grains de sable, & en fera un tout qui sera une masse ou un banc de grès. Mais toute uniformité exacte est très-rare, & peut-être impossible dans la Nature, le banc de grès ne sera pas lui-même bien uniforme. Ce qui empêchera qu'il ne s'en forme un le plus souvent, c'est que les grains du banc de sable ne seront pas assez régulierement disposés entr'eux, mille hasards les auront serrés en quelques endroits plus que dans d'autres, les auront séparés en différents tas, auront causé d'assez grands vuides, sur-tout si le banc n'est pas de sable pur, & qu'il soit mêlé de terre, ce qui est commun. Le suc pierreux aura donc dans ce banc de sable un cours inégal, tantôt plus, tantôt moins facile. Et comme ce suc n'est, selon M. de Reaumur, qu'un sable prodigieusement fin porté dans de

l'eau, qui le soûtient tant qu'elle a tout son mouvement, & ne le laisse tomber que quand elle se rallentit, il ne se déposera qu'aux endroits où l'eau rencontrera quelques obstacles, c'est-à-dire, dans ceux où elle sera arrêtée par des tas de sable & par des marrons.

L'eau arrêtée par un marron, de quelque figure qu'il soit, se partage pour couler à l'entour, depuis le point le plus élevé de ce corps, jusqu'au plus bas diametralement opposé, & cela parce que cette eau est encore plus visqueuse que toute autre, & par-là est plus disposée à suivre le contour des corps; par ce mouvement elle arrondit nécessairement le marron autant qu'il peut l'être, & en abat les angles aigus.

Puisque l'eau chargée du suc pierreux coule du dessus du marron jusqu'au dessous, c'est principalement en ce sens qu'elle le doit arrondir; & s'il est plat & fort étendu dans le sens horisontal, elle le doit laisser à peu-près tel qu'il étoit, en arrondissant seulement ses bords. Aussi M. de Reaumur a-t-il eu le plaisir de voir, conformément à cette conjecture, que tous les marrons d'une figure de gâteau peu relevé par le dessus & par le dessous étoient dans le banc de Sable couchés horisontalement sur le plat. Cela ne recevoit presque nulle exception, malgré la grande diversité des circonstances qui auroient pû déranger la Regle. On voit que tout sert à qui sçait observer.

Les plus gros d'entre les marrons de sable, les plus renflés, ceux qui approchent le plus de la figure de boule, sont ceux où l'on trouve le plus ordinairement des cavités, à peu-près dans le milieu. Si elles étoient vuides, c'étoient apparemment des crevasses, des creux qui s'étoient trouvés naturellement dans le banc de sable. Si elles étoient pleines, elles l'étoient d'un sable détaché, tout pareil à celui du reste du banc ; le suc pierreux n'avoit point encore pénetré jusqu'à ces grains pour les lier. S'il y eût pénetré, mais seulement en une quantité mediocre, il auroit pétrifié les grains & les auroit blanchis, sans les lier tous ensemble, & en faire une masse.

Mais si le banc au lieu d'être de sable, avoit été de craye, ou de marne, on auroit trouvé dans la cavité des pierres une espece de farine pierreuse, telle que celle qui remplit le milieu des pierres de Breüil-pont.

Supposé que l'on soit ici sur la voie de la formation des pierres & des cailloux, on pourra aller à celle des Métaux, l'Analogie mene loin. Il ne faudra que concevoir une eau chargée de sucs métalliques, au lieu qu'elle l'étoit de sucs pierreux, & donner à cette eau des terres convenables qu'elle pénétrera. La rondeur des grains métalliques s'expliquera par les principes établis : mais les espérances les mieux fondées doivent encourager à découvrir, & non pas croire qu'on a déja découvert.

SUR LE PHOSPHORE DU BAROMETRE.

V. les M. p. 295.

LA Lumiere qui paroît au haut de quelques barometres agités dans un lieu obscur, est connue depuis cinquante ans; elle a assez exercé les Physiciens, & principalement M. Bernoulli, qui le premier a approfondi ce phénomene *, & éclairé tous ceux qui en ont traité après lui. M. du Fay a recueilli soigneusement l'histoire de tout ce qui a été écrit sur ce sujet; & ces sortes d'histoires, outre qu'elles plaisent naturellement, parce qu'elles représentent les différents efforts de l'esprit humain, instruisent par les diverses vûes qu'elles fournissent, soit en faisant voir l'inutilité des unes, soit en indiquant ce qui manqueroit aux autres.

* V. l'Hist. de 1700. p. 5. 2de. Ed. & celle de 1701. p. 1.

Il restoit encore quelque incertitude sur la maniere de rendre le barometre lumineux, ou pour mieux dire, sûrement lumineux, & M. du Fay l'a apprise d'un Vitrier Allemand, à qui il en donne toute la gloire, qu'il eût pû sans beaucoup de péril enlever à un homme obscur & éloigné. Les conditions absolument néceſſaires sont que le tuyau soit bien sec, le mercure bien net & bien purgé d'air. Elles n'ont rien de difficile dans la pratique.

La moindre humidité dans le tuyau gâteroit tout ; mais ce n'eſt, ſelon les obſervations de M. du Fay, qui a tourné ces expériences de bien des ſens, que l'humidité qui ſeroit au haut & dans le vuide du tuyau, où la lumiere doit paroître. Hors de-là le tuyau peut être humide ſans inconvenient. On le nettoye aiſément avec du cotton attaché au bout d'un fil de fer.

Il faut que le mercure ſoit bien net, mais cela ne demande nul ſoin pénible. Il n'y a qu'à faire paſſer le Mercure par un cornet ou entonnoir de papier, dont l'embouchure ſoit fort étroite, il y dépoſe ſuffiſamment ſes impuretés.

Il faut que le mercure ſoit bien purgé d'air. Il n'y a encore là nulle opération recherchée. Le Vitrier Allemand verſe d'abord dans ſon tuyau un tiers du mercure qu'il doit employer, enſuite il le chauffe doucement & par degrés ; & en le remuant avec un fil de fer, il aide à ſortir aux bulles d'air que la chaleur pouſſe hors du mercure. Après cela il verſe un ſecond tiers, qu'il traite de même ; & enfin il verſe le troiſieme auquel il ne fait rien. La purification des deux tiers ſuffit pour le tout.

M. du Fay ne s'eſt point apperçû qu'un différent degré de chaleur donné au mercure, produiſit de différence ſenſible dans la lumiere.

Il a remarqué que ſi on chauffe le mercure dans quelque vaiſſeau, pour le verſer de-là dans le tuyau du Barometre, on manque la lumiere. Il faut que dans ce paſſage, quoique court, le mercure ait repris de l'air, & à peu-près autant qu'il en avoit.

Il a remarqué auſſi que le mercure bien purgé d'air ne diminue pas de volume. Apparemment la grande peſanteur de ſes parties les ſerre les unes contre les autres autant qu'elles peuvent l'être, & leur rondeur ne leur permet que certains interſtices déterminés, qui ne peuvent diminuer. Quand l'air eſt chaſſé de ces interſtices, la matiere ſubtile prend toute ſa place, ſans que les parties en ſoient plus en état de ſe rapprocher. Il ſe feroit des vuides ſi le vuide étoit

poſſible. Il y a tout lieu de croire que l'expulſion de l'air ne ſert au phénomene de la lumiere, que parce qu'il eſt remplacé par la matiere ſubtile.

S'il ne reſte que fort peu d'air, la lumiere ne laiſſe pas de paroître, mais moins vive & entrecoupée. Les bulles d'air elles-mêmes deviennent lumineuſes ; l'abondance & la force de la matiere ſubtile les ſurmonte.

Le diametre du tuyau eſt indifférent. La lumiere s'étend davantage dans un plus gros tuyau ſans s'affoiblir. M. du Fay avoit conſtruit exprès pour ce phénomene des tuyaux dont le haut s'élargiſſoit en deux ou trois olives de verre.

La lumiere de ces barometres ne s'affoiblit point par le temps. Ce ſont, comme nous l'avons dit ailleurs, des phoſphores éternels.

Il ſeroit inutile de repeter des explications phyſiques déja données dans les endroits cités, ou faciles à appliquer ici. Il n'y étoit queſtion que d'une methode ſûre pour rendre les barometres lumineux. Ceux qui auront cette propriété ſeront les meilleurs pour l'uſage, ſur-tout pour l'uſage des Obſervateurs exacts, puiſqu'ils ſeront les plus vuides de tout air groſſier.

SUR LES PIERRES DE FOUDRE, *les Yeux de Serpent, & les Crapaudines.*

NOUS mettons enſemble pour plus de briéveté, & à cauſe de quelques rapports éloignés, des pierres qui n'ont guere rien de commun que le nom de *Pierres figurées*, les pierres de foudre d'un côté, & de l'autre les yeux de ſerpent, & les crapaudines. V. les M. pag. 6. & 205.

Ces grands changemens de mers & de continens que M. de Juſſieu croit avoir amené ou laiſſé dans notre Europe des oſſemens d'animaux aujourd'hui fort étrangers, ſe confirment tous les jours, les yeux de ſerpent & les crapaudines en ſont une nouvelle preuve. Ce ſont les dents pétrifiées

d'un poiſſon des côtes du Breſil qu'on y appelle le *Grondeur*. Il a deux ſortes de dents, dont les plus petites, & qui apparemment ſervent à percer, ſont les yeux de ſerpent; & les plus grandes, qui broyent, ſont les crapaudines. Cela ſe reconnoît par l'exacte conformité des figures. Après la mâchoire d'un poiſſon de la Chine, trouvée aux environs de Montpellier *, il n'y a plus rien là de merveilleux; & ſi les Turquoiſes ſont des os d'animaux, comme il a été dit en 1715 *, il n'eſt pas merveilleux non plus que les dents du Grondeur ſoient devenuës des pierres précieuſes du ſecond ordre.

* V. l'Hiſt. de 1721.

* pag. 1. & ſuiv.

Ces dents ne ſont pas la dent entiere, ce n'en eſt que la couronne, enveloppe & couverture ronde d'une racine qui demeure attachée à la mâchoire. Auſſi les yeux de ſerpent & les crapaudines ont-ils dans leur intérieur la même cavité qui ſe trouve dans cette partie des dents du Grondeur; & ſi on en voit qui ne l'ayent pas, elle a bien pù dans un long eſpace de temps ſe remplir d'une matiere petrifiée.

Il y a des yeux de ſerpent & des crapaudines qui ſe peuvent rapporter à des dents de Dorade, poiſſon qui ſe trouve dans nos Mers, & il eſt vrai qu'il y a moins de frais dans ce ſyſtème; mais M. de Juſſieu ne croit pas qu'il ſuffiſe pour toutes ces ſortes de pierres, il y en a quantité dont la figure demande qu'elles appartiennent au Grondeur. On les trouve d'ailleurs dans les minieres, mêlées avec des parties d'animaux certainement étrangers. Le Grondeur & la Dorade peuvent être deux eſpeces d'un même genre, quoiqu'ils habitent différents climats.

Les pierres de foudre n'ont rien d'animal. Ce ſont de véritables cailloux qui ont une figure de coin ou de fer de fleche. Cette figure a fait juger aux anciens Grecs qu'elles étoient les armes de Jupiter tonnant, & qu'il les lançoit de ſes mains avec la foudre. Cette opinion a paſſé, ou eſt née d'elle-même chez les peuples du Nord, qui pour trouver ces pierres en grande quantité dans leurs pays, ne les ont pas moins reverées. Ils croyent même, quoiqu'elles viennent de

la

la foudre, qu'elles les en garantiront ; & on a bien de la peine encore aujourd'hui à les en desabuser. Les Chinois, qui ne sont guere à portée de la contagion de ces idées, en ont pourtant d'assez semblables ; & il n'est pas trop aisé de voir pourquoi cette superstition est si naturelle.

L'origine de ces pierres est très-évidente & très-sûre, dès qu'on en voit de toutes pareilles taillées par les Sauvages de l'Amerique, pour fendre du bois, ou armer leurs fleches. Ils n'ont point de fer, & en frotant des pierres fort dures les unes contre les autres, ils font ces sortes d'ouvrages qui leur sont absolument nécessaires, & n'y plaignent point le temps, dont effectivement ils ne manquent pas. Notre continent a été habité anciennement par des Sauvages, & les mêmes besoins, la même disette de fer, leur ont inspiré la même industrie. Dans la suite leurs outils devenus inutiles ont été ensevelis en grande quantité dans la terre, ils s'y sont mieux conservés que s'ils eussent été de métal ; car la rouille ou le verdet les auroit peut-être ou consumés, ou défigurés ; & voilà ces pierres tombées avec la foudre.

Si les autres pierres figurées sont des monumens de grandes révolutions physiques, celles-ci sont le monument d'une grande révolution qu'on peut appeller *morale* ; & la comparaison du nouveau monde avec l'ancien, sert également à prouver l'une & l'autre espece de révolution.

OBSERVATION
DE PHYSIQUE GENERALE.

M. De Montagnac Consul à Lisbonne, a écrit que l'on étoit fort étonné dans la Province des Algarves d'y voir en Decembre 1722 & au mois de Janvier suivant, les arbres verds & fleuris comme au Printemps, des prunes & des poires aussi mûres & aussi bonnes qu'au mois de Juin, des figues aussi grosses qu'en Avril & en Mai, & des vignes

qui avoient déja des grappes de verjus. La grande varieté des mêmes saisons doit quelquefois amener de ces sortes de miracles, & il est bon d'observer quelles peuvent être les extrémités & les bornes de cette variété.

V. les M. p. 1. NOUS renvoyons entierement aux Memoires Les Observations de M. Maraldi pour l'année 1722.



ANATOMIE.

SUR LES DEUX ESPACES *que l'Humeur Aqueuse occupe dans l'Oeil.*

L'HUMEUR aqueuse remplit dans l'œil tout l'espace que laissent entr'elles les deux membranes, cornée & uvée. Cet espace est coupé en deux par l'iris, production de l'uvée; de sorte que la partie antérieure est entre la cornée & l'iris, la postérieure entre l'iris & le crystallin. Ces deux espaces ont été appellés, l'un *Chambre antérieure*, l'autre *Chambre postérieure*, par M. Brisseau fameux Professeur en Medecine à Douay, qui a écrit sur ces matieres.

V les M. p. 38.

Quand la question de la cataracte membraneuse, ou glaucomatique a été agitée dans l'Academie *, ou dans le Public, M. Brisseau qui attaquoit l'opinion commune de la membrane, a soûtenu que de la maniere dont se faisoit l'opération ordinaire de la cataracte, & vû l'endroit où l'on perçoit l'œil, il n'étoit pas possible que l'aiguille n'allât dans la chambre posterieure, & n'y abattît le crystallin, ou du moins ne le blessât aussi-bien que l'uvée, parce que cette chambre est fort petite. Ceux du parti contraire se sont sauvés, en la supposant assez grande, & plus grande même que l'antérieure, ainsi que la représentent de célebres Anatomistes.

* V. les Hist. de 1706. pag. 12. & suiv. de 1707. p. 22. & suiv. de 1708. p. 30. & suiv. de 1721. p. 15. & suiv.

C'est là ce qu'a voulu éclaircir M. Petit le Medecin. Ces sortes de points de fait délicats, & peu sensibles, sont difficiles à décider. Que l'on coupe un œil en sa partie antérieure, l'humeur aqueuse s'en écoule aussi-tôt, & l'on ne sçait dans laquelle des deux chambres elle étoit en plus grande quantité. Pour éviter cet inconvénient, M. Petit a fait geler des yeux pendant le froid; car on sait depuis le

commencement de ce ſiecle que l'humeur aqueuſe ſe gele. Il a pris des yeux de différens animaux, d'homme, de cheval, de bœuf, de mouton, de chien, de chat, de loup, &c. il faut que le froid ſoit conſidérable, afin que l'humeur aqueuſe ſoit bien gelée, & qu'on en puiſſe exactement meſurer l'étendue en différens eſpaces.

La glace de la chambre antérieure s'eſt toûjours trouvée beaucoup plus épaiſſe que celle de la poſtérieure, & par conſéquent la chambre antérieure plus grande que la poſtérieure, & l'on prévoit bien que cela aura ſuivi différentes proportions dans des yeux d'animaux de différente eſpece, & même dans ceux d'une même eſpece, quoique avec moins de différence.

L'épaiſſeur de la glace des deux chambres ne donne pas leur inégalité de grandeur auſſi juſte, & auſſi facilement que nous ſemblons le dire ici : il s'en faut bien que ces eſpaces ne ſoient des parallelepipedes, ou même des Solides rectilignes, ils ſont curvilignes, & peu réguliers ; de ſorte qu'il faut comparer les épaiſſeurs de la glace dans les endroits où elle eſt de part & d'autre la moins épaiſſe, & la plus épaiſſe, & en conclurre une épaiſſeur moyenne. Cela jette néceſſairement M. Petit dans un détail curieux & aſſez neuf de ces parties de l'œil, tant dans l'homme, qu'en pluſieurs autres animaux.

La glace de la chambre poſtérieure n'eſt pas même aiſée à appercevoir. Comme elle n'eſt qu'en fort petit volume, elle eſt noircie par l'uvée qui eſt noire, & la termine, & à peine paroît-elle. Quand on coupe l'œil ſelon ſon axe, c'eſt-à-dire, ſelon une ligne qui paſſe par les centres du cryſtallin & de la cornée, ce qui eſt la ſection la plus propre à cette recherche, la glace ſe briſe par petites parcelles qui s'échapent, & de plus le ſcalpel, quelque tranchant qu'il ſoit, s'émouſſe, & entraîne avec lui des parties noires de l'uvée & des *proceſſus ciliaires*, qui ſe mêlent avec la glace, & la cachent. Il faut de l'art pour la découvrir telle qu'elle eſt, & pure.

Si l'on ne prend pas les yeux immédiatement après la mort, ils sont déja flétris, parce que les humeurs se sont évaporées à proportion du temps. L'humeur aqueuse plus légere & plus volatile que la vitrée, & d'ailleurs plus libre, puisque la vitrée est retenue dans une infinité de petites cellules, s'évapore davantage, & c'est celle dont on a besoin ici.

Quand les yeux sont gelés, ils sont fort tendus, eussent-ils été flétris auparavant, les humeurs se sont dilatées par la gelée comme fait l'eau, parce que l'air qu'elles contenoient, dispersé auparavant en plusieurs petites parcelles, & comprimé, s'est ramassé, & a eu plus de force pour se mettre au large. Il est à observer, en passant, que les humeurs qui se gelent, s'évaporent assez considérablement, ce que l'on reconnoît par une diminution très-sensible de leur poids. Mais la dilatation des humeurs nuit à la recherche de la capacité des deux chambres. Il y a dans l'œil de l'homme vingt fois plus d'humeur vitrée que d'aqueuse; on peut donc supposer que l'une a vingt fois plus d'air que l'autre, & par conséquent vingt fois plus de force de dilatation. Il doit donc arriver que la vitrée en se gelant usurpe une partie de l'espace qui appartenoit à l'aqueuse dans la chambre postérieure, & l'en chasse ; & cela arrive en effet à tel point, qu'on ne trouve quelquefois plus de glace dans cette chambre. M. Petit suit plus particulierement les changemens que peut causer à la configuration respective des parties cette grande inégalité de dilatation entre l'humeur vitrée & l'aqueuse.

Malgré toutes ces difficultés, il n'a pas laissé de parvenir à la détermination qu'il cherchoit, en combinant les différents effets, en pesant les diverses circonstances, & en prenant des milieux. Dans l'homme la chambre postérieure contient à peu-près le tiers de l'humeur aqueuse. Le poids moyen de cette humeur entiere est de 4 grains, d'où il suit que la chambre postérieure en contient 1 grain & $\frac{1}{3}$, & cette quantité est si petite, que la chambre qui a 5 $\frac{1}{2}$ lignes

d'étendue, ne peut être que très-étroite, & par conséquent le raisonnement de M. Brisseau, qui a donné lieu à tout ceci, doit subsister dans toute sa force.

Il ne faut pas omettre une remarque curieuse, quoique simplement accessoire. Dans les yeux gelés le crystallin n'augmente point de volume comme les humeurs. M. Petit crut d'abord que le crystallin, qui est compris entre la vitrée & l'aqueuse, & serré par elles de part & d'autre lorsqu'elles se dilatent, & d'ailleurs incapable par sa contexture d'une aussi forte dilatation que la leur, étoit tenu toûjours dans le même état & sous le même volume. Mais des crystallins gelés à part n'augmenterent pas non plus. Pourquoi leur air ne s'étoit-il pas dilaté lorsque rien ne s'y opposoit ? Il en faut revenir au systême general de la gelée. Les parties propres d'une liqueur qui se gele, perdent de leur mouvement, & par cela seul elles se rapprochent, & tiennent moins d'espace ; peut-être aussi chacune se resserre-t-elle en elle-même : le volume total seroit donc diminué. Mais l'état où elles sont donne à l'air qu'elles renferment la liberté de se réunir en grosses bulles & de se dilater, & de-là vient l'augmentation du volume total. Si les liqueurs sont de nature à ne se point geler, leurs parties propres perdent assez de mouvement pour se rapprocher un peu, mais non pas assez pour permettre à l'air de se réunir & de se dilater, & il arrive une petite diminution de volume. Le crystallin est dans le cas de n'en avoir pas une qui soit sensible, ou peut-être de n'en avoir aucune, sa substance est trop tenace, trop visqueuse, & les particules d'air éparses ne peuvent s'y rassembler. Cependant il s'en est trouvé quelques bulles, mais très-petites, sous la membrane de quelques crystallins degelés ; mais il y a apparence qu'elles ne s'étoient formées que lorsqu'ils s'étoient dégelés, ils étoient devenus fort mous, ce qui marque toûjours quelque desunion de parties. Plus la physique considere les choses en petit, plus elle a besoin de multiplier & de raffiner ses vûes.

SUR LA FORMATION DES HYDATIDES.

LE ſujet que nous allons traiter prouvera la grande différence qu'il y a entre appercevoir les choſes d'une vûe générale & confuſe, ou d'une vûë diſtincte, & qui ſe porte à toutes les parties & à tous les détails de l'objet. De la premiere maniere on pourroit avoir rencontré le vrai, & cependant ne tenir rien; car la difficulté de l'application à toutes les particularités pourroit être ſi grande, qu'on ſeroit obligé de lâcher priſe, & d'abandonner ce vrai qu'on auroit attrapé d'abord.

Les hydatides ſont des veſicules pleines d'une eau aſſez claire, & telle que la lymphe du corps animal. Elles ſont le plus communément rondes, de différentes groſſeurs depuis celle d'un Pois juſqu'à celle d'un œuf de canne, & quelquefois fort au-delà; elles ont une envelope de même couleur que leur eau, très-uniforme, ſans fibres, qui ſe puiſſent détacher les unes des autres comme celles d'une membrane; quelquefois il n'y a pas pour une envelope, il y en a deux, trois, & juſqu'à ſix ou ſept, toutes de même nature.

Les hydatides ſont ordinairement ſéparées les unes des autres, quelquefois elles ſont comme en grappe, pluſieurs étant attachées à une tige commune.

Elles ſont communément renfermées en grand nombre ſous les premieres envelopes des principaux viſceres, tels que le foie, la rate, &c. là elles nagent dans une liqueur de la même nature que celle qui eſt contenue dans chaque hydatide. Outre le ſac membraneux qui appartient au viſcere, elles ont quelquefois une autre envelope commune de même nature que celle de chaque hydatide particuliere. Quelquefois les hydatides ne ſont renfermées dans aucune envelope commune, mais répandues confuſément dans la cavité du ventre.

Elles ſont quelquefois en nombre prodigieux,

Sur ces faits on a imaginé deux différents systèmes. Quelques Physiciens ont cru que les hidatides étoient des glandes qui s'étant obstruées & engorgées de la liqueur qu'elles devoient filtrer, avoient perdu leurs fonctions, & s'étoient détachées de leurs places naturelles. Mais cette idée n'est guere soutenable. Les hydatides qui auroient été glandes, seroient donc squirreuses, dures, de différentes figures irrégulieres, il y resteroit au moins quelques traces de vaisseaux sanguins, qui par un entrelacement merveilleux formoient auparavant leur substance : rien de tout cela ne paroît dans les hydatides.

D'autres Physiciens ont eu recours avec beaucoup plus d'apparence aux vaisseaux lymphatiques, qu'ils ont supposé s'être rompus. En effet, sous la premiere envelope des visceres principaux, lieu ordinaire des hydatides, est un réseau tout formé de vaisseaux lymphatiques, & les hydatides ne sont pleines que de lymphe, & nagent dans de la lymphe. La structure des vaisseaux lymphatiques est d'ailleurs favorable. Ce sont des canaux tels que dans des intervalles assez petits les côtés du canal se rapprochent & font un demi-étranglement du vaisseau, qui par-là ressemble en quelque sorte à un chapelet. Les grains de ce chapelet ont paru fort propres à devenir des hydatides, pourvû qu'ils vinssent à se séparer les uns des autres, c'est-à-dire que le vaisseau se rompit dans tous ses étranglemens, ce qu'on pouvoit aisément attribuer à un trop grand amas de lymphe. C'est-là une vûe générale qui, selon M. Morand, renferme le vrai, mais qui ne peut le soutenir & le défendre, à moins que d'être beaucoup plus approfondie : car l'envelope particuliere de chaque hydatide seroit donc membraneuse, puisqu'elle auroit appartenu à un vaisseau lymphatique ; or elle n'est point membraneuse. De plus, & ceci est encore beaucoup plus considérable, que l'on suppose tant qu'on voudra le chapelet rompu, & tous ses grains séparés, ils avoient chacun deux ouvertures vis-à-vis l'une de l'autre : comment se sont-ils fermés de ces deux côtés ?

Si l'on veut que la lymphe ne forme les hydatides qu'après s'être

s'être épanchée hors de ses vaisseaux, comment les formera-t-elle distinctes, séparées, arrondies, avec des envelopes ?

Voilà ce que M. Morand conçoit pour lever toutes les difficultés. A chaque demi-étranglement d'un vaisseau lymphatique sont de part & d'autre deux valvules semblables pour la figure aux valvules sigmoïdes du cœur. Ce sont deux demi-capuchons attachés par leur moitié plate à la paroi intérieure du vaisseau, & qui, si la liqueur coule d'un certain sens selon l'axe du vaisseau, s'en remplissent, & l'arrêtent en partie dans leur cavité; si elle coule du sens contraire, elle ne fait qu'aplatir le capuchon & le presser contre la paroi du vaisseau, & alors le cours de la liqueur est entierement libre. C'est en ce sens qu'est sa direction naturelle, & c'est pour l'empêcher de refluer de l'autre que les valvules sont faites. Si par quelque cause que ce soit les valvules ou poches valvulaires se remplissent de liqueur contre l'ordre naturel, & ne s'en vuident pas, les poches s'arrondissent autant qu'il est possible, & les parties les plus épaisses, les plus filamenteuses du petit amas de lymphe qui y séjourne sont poussées par les parties plus séreuses vers la circonférence, ainsi qu'il arrive à du lait qui boût, ou à du sang reposé dans la palette. Voilà autant d'hydatides rondes, & avec des envelopes, qu'il y aura de poches valvulaires dans le cas requis; & il y en peut avoir un très-grand nombre, à cause que les vaisseaux lymphatiques sont en grande quantité; qu'ils ont chacun plusieurs étranglements, & que chaque étranglement a deux poches.

Toutes les poches valvulaires d'un vaisseau lymphatique étant gonflées, il est possible qu'il se conserve un petit filet de lymphe qui coule selon l'axe du vaisseau entre toutes ces poches : mais il est possible aussi que par le vice général de la lymphe, & par le retardement de son cours, ce filet ne coupe plus, que la liqueur s'épaississe, & devienne une tige assez solide où s'attacheront des hydatides par leur envelope particuliere déja formée. Ce seront-là les hydatides en grappe.

Par la formation de l'envelope d'une hydatide, il eſt très-aiſé d'entendre comment il s'en formera pluſieurs. Il ne faut qu'un plus long ſéjour de la lymphe dans ſon moule, ou un peu plus d'hétérogénéité entre ſes parties. L'envelope la plus extérieure ſera toûjours la premiere formée.

Un amas d'hydatides ainſi produites, renfermé ſous la tunique d'un viſcere, peut aiſément groſſir à tel point, qu'il crevera cette tunique ; & alors les hydatides étant épanchées dans quelque cavité avec beaucoup de lymphe, cette lymphe pourra devenir une grande hydatide, qui contiendra toutes les autres, c'eſt-à-dire, qu'il s'y formera une envelope générale de la même maniere dont les particulieres ſe ſont formées. Cette envelope générale eſt d'un diametre beaucoup plus grand que ne pourroit jamais être celui d'aucun vaiſſeau lymphatique dilaté, ce qui prouve fort pour le ſiſtème de M. Morand. Elle eſt plus molle que les envelopes particulieres, ſoit parce qu'elle eſt beaucoup plus grande & plus étendue, ſoit parce qu'elle n'a pas été produite dans un moule auſſi petit & auſſi ferme.

Il ſe trouve quantité d'hydatides crevées & vuides, & celles-là ont fourni une bonne partie de la lymphe commune où elles nagent toutes.

Il eſt ſans difficulté que la lymphe, gélatineuſe comme elle eſt, & deſtinée à nourrir toutes les parties du corps, à ſe transformer en elles, peut produire les envelopes des hydatides, ou leurs fauſſes membranes. M. Ruyſch ayant bien fouetté avec une branche d'arbriſſeau le ſang d'une ſaignée encore chaud, il s'en attacha à cette branche une infinité de parties filamenteuſes, qui après avoir été blanchies par des lotions, formoient une eſpece de membrane, que l'on auroit priſe pour vraie & naturelle. M. Morand n'a pas manqué de répéter cette expérience.

Il a voulu voir auſſi quelles liqueurs mêlées avec la lymphe l'épaiſſiſſoient le mieux, & il a trouvé que c'étoient l'eſprit de vin, & la teinture de noix de galle. L'eau alumineuſe a produit ſur la ſurface du mêlange une pellicule

toute semblable aux envelopes des hydatides. On pourroit trouver aussi quelles liqueurs empêcheroient la lymphe de s'épaissir, & les hydatides de se former dans notre corps: mais ce desordre n'est point sensible long-temps même après sa naissance, cette maladie ne se laisse connoître que quand elle ne peut être guérie par aucune autre voie que les ponctions, qui ne peuvent pas toûjours été pratiquées.

DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

M. Geoffroy reçut de M. son Oncle qui est à Toul, la Relation d'un Monstre humain né le 24 Decembre 1722 à Dompremi-la-Pucelle, lieu de la naissance de la fameuse Pucelle d'Orleans dans le Barrois. Il faut se représenter deux enfans à qui on a retranché toutes les parties inferieures depuis le nombril, & qui sont unis l'un à l'autre par un nombril commun, de sorte que le tout ensemble n'est que les deux moitiés supérieures de deux corps unies par le plan inferieur de chacune. Elles sont posées du même sens, & les deux têtes qui terminent le tout sont tournées en même-temps vers le haut, ou vers le bas. A un des côtés & au milieu de la figure monstrueuse est une vulve commune, & des deux côtés de cette vulve deux cuisses, deux jambes, & deux pieds. Tout cela n'est point de l'autre côté où n'est point la vulve, il n'y a qu'un moignon de cuisse, qui n'appartient qu'à l'un des demi-corps.

On a vû ce monstre déja âgé de trois semaines, bien vivant, bien conformé en toutes ses parties, ayant du sommet d'une tête à l'autre 16 pouces $\frac{1}{2}$ de Roi, & 1 pied depuis le ventre jusqu'au bout des deux pieds. On a vû ces deux enfans qui avoient deux nourrices téter & manger de la bouillie avec beaucoup d'appetit, & un grand air

de ſanté. Quelquefois l'un tétoit, pendant que l'autre dormoit. Ils ont été tous deux batiſés, & nommés Jeanne. La production des monſtres n'étonne plus les Phyſiciens, nous avons déja dit pluſieurs fois quel en eſt le principe général. Mais ſi des monſtres humains à deux têtes comme celui-ci vivoient aſſez long-temps, il ſeroit curieux d'obſerver la différence des penſées & des volontés des deux têtes, & comment le monſtre total ſe prendroit à les accorder, ou à ſacrifier les unes aux autres.

II.

Une femme qui étoit à terme d'accoucher ayant été inutilement trois jours en travail avec des pertes de ſang conſidérables, mourut, & on l'ouvrit pour découvrir ce qui l'avoit empêchée d'accoucher. On trouva que le Placenta qui doit être attaché au fond de la matrice, l'étoit au contraire à l'orifice interne, & le bouchoit exactement, excepté un endroit où il n'étoit pas collé, & c'étoit par-là que s'écouloit le ſang des pertes. L'enfant avoit les pieds en haut qui pouſſoient ſes envelopes contre le fond de la matrice, il avoit la tête en bas, qui avec les épaules pouſſoit le placenta contre l'orifice interne & le col de la matrice, de ſorte qu'il ſe fermoit le paſſage lui-même. M. Petit le Chirurgien a tenu cette obſervation de trois de ſes Confreres, témoins éclairés & habiles. La naiſſance eſt elle-même un grand péril de mort.

III.

Le même M. Petit viſitant un malade qui avoit une hernie ou deſcente du côté gauche, où étoit un teſticule bien placé, ne lui trouva point le teſticule du côté droit, & apprit de lui qu'il ne l'avoit que quand ſa deſcente étoit rentrée ou reduite. Alors il arrivoit ſouvent que ce teſticule tomboit dans la place d'où la deſcente étoit ſortie; mais non pas auſſi bas que le teſticule qui y étoit toûjours. Le ſcrotum ou ſac total n'étoit que la bourſe gauche; il n'y avoit que celle-là qui eût quelque choſe à contenir; la droite étoit effacée faute de fonction, & le raphé, eſpece de cou-

ture ou de ligne qui ſépare naturellement ces deux bourſes, & diviſe le ſcrotum en deux parties égales, s'étoit entierement jetté du côté droit à l'extrémité de la bourſe unique.

Si c'étoit-là un vice de la premiere conformation, tout eſt expliqué : mais M. Petit croit fort poſſible que ce n'en fût pas un. Les enfans n'ont pas en naiſſant les teſticules dans le ſcrotum, ils y tombent peu-à-peu, aidés par les efforts que font les enfans pour touſſer, pour crier, &c. Ils arrivent d'abord chacun à un anneau des muſcles du bas ventre, paſſent au travers, & deſcendent dans une bourſe. Les enfans qui crient ou ſe tourmentent moins, ont plus tard le ſexe maſculin entierement dévelopé. Si un anneau a refuſé le paſſage à un des deux teſticules, les Anatomiſtes concevront bien comment il a pû être entraîné à ſuivre le chemin de l'autre, & tomber après lui dans la même bourſe, & même comment cette chûte peut n'être pas abſolument néceſſaire, & dépendre de quelques mouvemens qu'on ſe donnera. Il n'eſt pas rare de trouver des hommes à qui un teſticule paſſe & repaſſe par ſon anneau avec facilité.

IV.

Quand on a été mordu d'un chien que l'on croit enragé, il arrive ordinairement que le chien eſt tué avant que l'on ſe ſoit aſſûré de ſon état, & la perſonne mordue demeure dans une cruelle incertitude. M. Petit le Chirurgien a un expédient pour la terminer. Il frote la gueule, les dents, les gencives du chien mort avec un morceau de viande cuite, qu'il préſente enſuite à un chien vivant; s'il la refuſe en criant & en heurlant, le mort étoit enragé, pourvû cependant qu'il n'y eût point de ſang à ſa gueule. Si la viande a été bien reçûë & mangée, il n'y a rien à craindre.

V.

Ce n'eſt que ſur la foi de l'experience qu'on peut croire que des coups d'épée dans l'eſtomac ſe guériſſent. Un Dragon du Regiment de Languedoc en ayant reçû un, vomit auſſi-tôt du ſang & des alimens. M. du Vivier Chirurgien

Major des Dragons de ce Regiment, jugea que le coup ouvroit l'orifice ſupérieur de l'eſtomac, en faiſant obliquement un trajet d'environ 6 pouces; il panſa le malade, & le fit ſaigner ſept fois en vingt-quatre heures; ce qui n'empêcha pas qu'une groſſe fievre ne s'allumât, & qu'il ne vomît encore plus d'une pinte de ſang. Cependant par une diete très-exacte, par l'uſage des vulnéraires & de l'eau de Rabel, & par celui des lavemens, la fievre diminua dès le troiſieme jour, le bleſſé n'eut plus que des hoquets & de fréquens ſoupirs, & enfin en dix-huit jours il fut guéri. Deux mois après il eut une fievre tierce pour laquelle on lui donna de l'émetique, il vomit beaucoup de ſang, apparemment parce que les ſecouſſes de l'eſtomac avoient r'ouvert la ſurface interne de la plaie: mais M. du Vivier le tira encore de cet accident. Il lui en coûta plus de temps que pour le premier, il lui fallut deux mois entiers.

VI.

M. du Vivier ne laiſſa pas d'employer dans une autre bleſſure d'eſtomac ce même émétique, qu'il avoit reconnu pour ſi dangereux. Un Officier ayant fait une débauche de 10 heures à table, reçut un coup d'épée, & M. du Vivier jugea par le vin qui ſortoit, & par la place du coup, qu'il perçoit l'eſtomac à ſon fond. La plaie extérieure n'étoit que d'environ 3 lignes. Un autre Chirurgien vouloit ſaigner: pour lui il fut d'avis de l'émétique, parce que ſi l'eſtomac qui étoit fort chargé & fort tendu ſe ſoulageoit de ce fardeau exceſſif, ſes parties écartées ſe rapprocheroient, & la plaie qui ne pouvoit être que petite, diminueroit beaucoup dans l'inſtant. Ce ſentiment, quoique hardi, l'emporta. On ſaigna après que l'Eſtomac fut vuidé, tout le reſte ſe fit à l'ordinaire, & ſelon qu'il convenoit, & la guériſon fut parfaite.

VII.

Un Portefaix de la Fleche, âgé de 40 ans, fort robuſte, attaqué depuis huit ans d'une hernie incomplete qu'il faiſoit rentrer facilement, & qui ne l'empêchoit point de travailler, ſentit preſque tout à coup une extrème augmenta-

tion de ſon mal, ſa hernie devint groſſe comme le poing, longue de 5 à 6 doigts, très-dure, & il eut des douleurs très-vives & des vomiſſements fréquens qu'il n'avoit point encore éprouvés. M. Farcy, Chirurgien de la Fleche, qui fut appellé, & qui a envoyé cette relation bien atteſtée à l'Academie, n'oſa tenter de faire la réduction à cauſe de la grande dureté qu'il trouvoit; elle étoit telle qu'elle ſembloit oſſeuſe. On tâcha vainement de la ramollir par des cataplaſmes. Le malade fut quatre jours ſans aller à la ſelle, effet naturel & ordinaire de ce que le cours des matieres étoit arrêté dans la hernie: mais il y alla enſuite naturellement, & continua d'y aller tous les jours; & cependant la hernie ne diminuoit ni de groſſeur, ni de dureté, quoique l'inteſtin fût ſoulagé d'une partie des matieres qui s'y étoient d'abord amaſſées. Il falloit bien que la tumeur vint enfin à ſuppuration; & comme on vit qu'elle s'y diſpoſoit, on l'aida, & le 14me jour M. Farcy fit l'opération, qu'on avoit différée autant qu'il avoit été poſſible à cauſe de l'extrème répugnance du malade. M. Farcy coupa quatre doigts de l'inteſtin pourri, & il fut fort étonné d'en tirer de petits os, que l'on reconnut pour des os de pieds de mouton. On en tira juſqu'à ſeize. Le Portefaix avoit mangé des pieds de mouton la veille de ſon accident, & en avoit avalé goulument quantité d'os. Ils rendoient la tumeur ſi dure, & cauſoient l'impoſſibilité de la réduction, mais en même-temps ils produiſoient un bon effet. A l'endroit où l'inteſtin eût été étranglé, & par conſéquent les matieres entierement arrêtées, ils formoient une eſpece de voute ſous laquelle le paſſage de ces matieres demeuroit aſſez libre. Mais ce qu'il y a ici de très-ſingulier, c'eſt que quatre doigts de l'inteſtin pourris ayant été emportés par l'inciſion, une autre partie preſque égale du même inteſtin pareillement pourrie s'étant enſuite ſéparée naturellement du vif, les matieres deſtinées à ſortir par l'anus ne devoient plus ſortir que par-là, & par la plaie qu'il auroit fallu tenir toûjours ouverte, & le malade auroit porté toute ſa vie une cannule qui auroit été ſon anus. Cependant c'eſt ce qui n'eſt

point arrivé. M. Farcy vit que de jour en jour les matieres sortoient en moindre quantité par l'ouverture de l'intestin & par la plaie, il espera qu'enfin elles ne sortiroient plus; il se résolut à donner au malade des alimens assez solides qu'on ne lui auroit pas permis selon la pratique ordinaire; tout réussit, la plaie se cicatrisa en trente-trois jours; il ne resta point de fistule au malade, & il n'eut point besoin de porter de cannule. Il se remit au travail comme s'il n'eût jamais été incommodé. L'intestin, dont on avoit emporté plus d'un demi-pied, se rejoignit donc, ce qui est presque inconcevable, à moins que l'on n'applique ici une observation du celebre M. Ruysch sur l'intestin ileon. Quelquefois il s'y fait un prolongement plus ou moins grand, qui est une espece de cœcum particulier. Ce prolongement aura été la portion de l'intestin herniaire remplie d'os, il aura fait naturellement la voute dont on a parlé, on en aura coupé une bonne partie, & ses parois se seront rapprochées & réunies plus facilement que ne feroient deux bouts d'un même intestin continu, séparés d'un demi-pied. Quoi qu'il en soit, il est certain que dans des corps d'une pareille constitution, accoûtumés à un grand exercice & à une grande frugalité, la nature a plus de ressources, ou les met plus aisément en œuvre.

VIII.

Voici une autre observation, où l'on verra que la nature, mais aidée de l'art, a fait cette réunion d'intestin, que l'on n'esperoit pourtant pas. L'observation vient d'un Chirurgien fameux, élevé à la plus haute place où il pût prétendre. Quand l'intestin qui fait la hernie est pourri ou gangrené, il en tire en dehors toute la partie alterée, après avoir ouvert la peau du scrotum & le sac herniaire, & dilaté suffisamment l'anneau; à travers la partie du mesentere qui soutient la partie alterée de l'intestin, il passe avec une aiguille un double fil ciré, & en noüant les deux extrémités d'un fil, il forme une espece d'anse de la partie du mésentere par laquelle il assujettit l'intestin vers le milieu de la plaie sans le serrer, afin que les suppurations & les matieres qu'il contient, s'il s'ouvre

s'ouvre par la pourriture, soient portées au dehors, car leur épanchement dans la cavité du ventre seroit mortel. Il fit cette opération à un homme de 35 ans, il lui emporta un demi-pied d'intestin gangrené, & ayant rapproché l'un de l'autre, selon sa méthode, les deux bouts de l'intestin placés à l'ouverture de la plaie, il espera qu'ils s'y pourroient coller, que les matieres sortiroient par la partie supérieure de l'intestin, l'inférieure demeurant inutile, & que le malade porteroit toute sa vie une cannule, qui lui tiendroit lieu d'anus. La nature fit beaucoup plus que ce qu'il espéroit de plus avantageux. Les deux bouts d'intestin se réünirent l'un à l'autre en un mois, & les matieres, qui sortoient d'abord par l'ouverture de la plaie, reprirent peu à peu pendant ce temps la route de la partie inférieure de l'intestin, qui étoit leur route naturelle. Le rétablissement du malade fut entier, à deux accidens près.

Il eut pendant deux ans une colique plus ou moins forte selon qu'il avoit plus ou moins mangé ; elle répondoit à l'endroit de la plaie, & diminua toûjours par degrés. La réunion des deux bouts d'intestin s'étoit faite par de nouvelles chairs cicatrisées, & le passage qu'elles laissoient aux matieres n'avoit dans les commencemens ni le diametre naturel de l'intestin, ni sa souplesse.

Comme la méthode qu'on avoit pratiquée, demandoit qu'on élargît beaucoup l'anneau, il se fit par-là une descente d'intestin de la grosseur d'une orange, & on eut beaucoup de peine à trouver un bandage convenable.

IX.

M. Morand a observé dans l'Hydrophthalmie, ou Hydropisie de l'œil, qui allonge & dilate la sclérotique du côté du nerf optique, qu'en exposant à la lumiere l'œil détaché de l'orbite, il est très-transparent dans toute l'étendue de l'axe qui le traverse depuis la partie anterieure & saillante de la cornée jusqu'au de-là de la partie postérieure & dilatée de la sclérotique.

CETTE année parut un Livre de M. Petit le Chirurgien, intitulé, *Traité des Maladies des Os, dans lequel on a représenté les appareils & les machines qui conviennent à leur guérison.* Une premiere édition faite vingt ans auparavant, n'empêche pas celle-ci d'être un Livre tout nouveau. Quel siecle que vingt ans pour un Chirurgien habile & très-employé ! Combien d'observations & d'expériences nouvelles !

Les Maladies des Os sont la luxation, ou le déplacement hors de leurs articulations naturelles, la fracture, l'anchylose, ou l'immobilité, ou difficulté de mouvement qui survient à une articulation, & en empêche le jeu, l'exostose, ou excrescence, la carie, ou pourriture, ou vermoulure, le rakitis, ou courbure de l'épine, telle qu'elle est dans les enfans en chartre. C'est un vaste sujet d'ouvrage que d'appliquer toutes ces maladies l'une après l'autre à tous les os du corps humain qui en sont susceptibles, de rapporter les différens accidens dont elles peuvent être accompagnées, de décrire les operations qu'elles demandent, les pansemens, les appareils, les bandages ; enfin tout ce qui peut guider & éclairer la pratique, toûjours extrèmement variée par les circonstances. Mais ce détail infini, qui regne dans le Livre de M. Petit, nous empêche absolument d'en pouvoir donner aucune idée générale : il nous faudroit de la theorie, du systême, & ici tout est pratique, & faits particuliers. On en a vû quelques échantillons dans les Memoires de 1718 * & dans ceux de 1722.*

* p. 98. & 199.
* p. 51.

Ce Livre fait si bien voir quelle est la prodigieuse quantité de connoissances nécessaires à un véritable Chirurgien, que l'on ne doit pas être après cela fort disposé à s'abandonner si aisément aux Bailleuls ou Renoüeurs les plus accrédités parmi le peuple. On sera aussi extrèmement porté à croire sincere la protestation que fait M. Petit de ne réserver rien ni pour lui, ni pour ses enfans qu'il destine à sa profession : il a ramassé un si grand nombre de choses, qu'on ne le soup-

çonnera pas d'en sçavoir davantage. Il est toûjours très-utile que ceux qui sont zelés peur le genre humain & desinteressés, répandent leurs connoissances : mais malgré cette genereuse intention, il y a des talens personnels qu'ils ne peuvent ni communiquer, ni transmettre.

NOus renvoyons entierement aux Memoires L'Ecrit de M. Winslow sur un mouvement singulier des omoplates, &c. V. les M. p. 69.



CHYMIE.

SUR UN VERD-DE-GRIS NATUREL.

V. les M. p. 12.

TOUT le Verd-de-gris ou verdet que nous avons eſt artificiel. On le tire de lames de cuivre macerées pendant quelque temps avec du marc de raiſin. Ce marc altere & diſſout juſqu'à un certain point leur ſurface, on en enleve avec des couteaux ce qui eſt altéré, & c'eſt le verd-de-gris. On recommence cette operation juſqu'à ce que les lames ſoient entierement changées en cette nouvelle matiere.

Une maſſe minerale envoyée des Indes à S. A. S. M. le Duc d'Orleans, dont le goût hereditaire pour les Sciences, & en particulier pour l'Hiſtoire Naturelle, lui attire ces ſortes de curioſités, a été reconnue par M. de Reaumur pour un verdet naturel, dont l'eſpece eſt toute nouvelle.

Cette maſſe eſt d'un verd très-vif & très-gai, &, ce qui eſt ſingulier, elle a un œil ſoyeux, & plus qu'aucune étoffe de ſoie. Sa ſtructure generale eſt par branchages, par touffes, qui naiſſent irrégulierement les unes des autres : elle reſſemble par cette diſpoſition aux végétations chymiques; la ſtructure de chaque partie ſéparée eſt par longs filets appliqués les uns ſur les autres, comme ceux de l'amiante. Ce corps eſt peſant & friable.

M. de Reaumur jugea d'abord par la peſanteur que cette matiere étoit métallique, par la couleur qu'elle étoit cuivreuſe, car le cuivre ſeul entre les métaux donne une flamme & des matieres vertes, & par la friabilité, que c'étoit un cuivre imparfait, & non encore malléable. Les eſſais qu'il fit ſelon la pratique ordinaire, confirmerent pleinement ſes conjectures. Il fut ſeulement ſurpris que cette matiere fût déja ſi avancée dans l'état de cuivre, qu'ayant été miſe en poudre

dans un creuſet, environnée de poudre de charbon, elle en tira tout le ſoufre qui lui manquoit pour être cuivre parfait & malléable.

En cela, auſſi-bien que par un verd beaucoup plus vif, le verdet naturel des Indes differe du nôtre artificiel, qui mis à la même épreuve dans un creuſet, ne redevient point cuivre. La raiſon en eſt que le verdet artificiel n'a point été dépouillé de ſon ſoufre, & que certainement le naturel l'a été, ou que du moins c'eſt une matiere à laquelle le ſoufre a toûjours manqué pour la rendre parfaitement cuivre. On conçoit aiſément que ſi cette même matiere eût pénétré une pierre tranſparente & cryſtalline, elle en eût fait une belle Emeraude. Telle eſt, ſelon toutes les apparences, l'origine de toutes les pierres précieuſes colorées ; des matieres métalliques ont teint des cryſtaux.

M. de Reaumur n'a pas crû devoir negliger l'explication d'un petit fait qu'il a vû en rotiſſant ſon mineral & d'autres pareils, c'eſt-à-dire en les faiſant chauffer bien pulvériſés dans un creuſet. Quand la chaleur eſt à un certain dégré, il s'élance des jets juſqu'à plus de la hauteur d'un pouce, & au deſſous de chacun de ces jets il ſe forme un petit creux, une eſpece de Tremie, par où les jets continuent toûjours à ſortir. Que l'on perce la ſurface de la poudre boüillante dans les endroits où il n'y a point de jets, il s'y en forme auſſi-tôt. En tournant ce phénomene de pluſieurs ſens, M. de Reaumur s'eſt aſſûré que deux conditions y ſont néceſſaires, la premiere que la poudre ſoit fine, & légere ; la ſeconde, qu'elle ait une humidité ſuffiſante, il n'importe d'où cette humidité vienne. Une vapeur échauffée, & qui tend à s'élever, perce la ſurface ſupérieure de la poudre, & enleve avec elle de petits grains juſqu'à une certaine hauteur ; & quand une fois elle s'eſt fait une route, il lui eſt plus facile de la ſuivre que de s'en faire une nouvelle, ce qui tient toûjours ouvert le petit creux par où ſort le jet.

SUR LE SEL ARMONIAC.

V. les M. p. 210.

L'EGYPTE nous fournit tout nôtre sel armoniac, & elle nous le fournit, parce qu'elle manque de bois, ce qui a été expliqué dans l'Hist. de 1720 *. On y a rapporté aussi comment les différentes experiences de M. Geoffroy le cadet sur ce sel l'avoient conduit à deviner que les Egyptiens le faisoient par sublimation, quoique la forme de pains plats & orbiculaires sous laquelle ils nous l'envoyent fût très-peu favorable à cette pensée. Le fait fut heureusement verifié.

* p. 46. & suiv.

Pomet dans son Histoire des Drogues parle en deux mots d'un sel armoniac qu'on voyoit autrefois, plus estimé que celui d'aujourd'hui, & qui étoit en pains de sucre. On n'osoit guere se fier à ce peu qu'il en disoit, & il n'en restoit presque plus aucune memoire, lorsqu'un accident très-funeste l'a fait reparoître au jour. La peste de Marseille ayant interrompu le commerce avec l'Egypte, il a fallu recourir aux Hollandois pour avoir du sel armoniac, & ils nous ont envoyé de ces pains de sucre que l'on ne connoissoit plus. Ils le tirent certainement des Indes Orientales. M. Geoffroy n'a pas manqué d'appliquer son idée de la sublimation à ces pains des Indes, qui sont des cones tronqués vers le sommet, & en partie creux. Leur figure s'accommodoit bien mieux à cette idée que celle des pains d'Egypte. Jusqu'ici les uns & les autres étoient des especes d'Enigmes, que les Egyptiens & les Indiens nous envoyoient, comme autrefois les Rois de ces mêmes Pays-là s'en envoyoient de véritables, pour faire assaut d'esprit & de penétration.

Les Anglois nos voisins nous donnoient aussi à deviner une autre Enigme de leur façon, tirée encore du sel armoniac. C'est ce qui s'appelle *Sel d'Angleterre.* Il a toute la vogue que peut avoir en ce Pays-ci une drogue étrangere. Au lieu de l'odeur urineuse, & presque insupportable du sel

armoniac, il en a une qui sans être moins pénetrante est agréable, & aromatique. La grande singularité est qu'il est en forme seche & solide, & qu'il doit avoir été tiré du sel armoniac sous cette forme en grande quantité, car sans cela il ne s'en pourroit pas faire un débit si considérable. D'ailleurs il en est beaucoup plus commode pour l'usage. Jusqu'ici nos Chymistes ne s'étoient guere appliqués qu'à tirer du sel armoniac son esprit, c'est-à-dire une liqueur où nageoient ses alkalis volatils dégagés de leurs acides. Le sel d'Angleterre est bon pour les vapeurs & pour les défaillances, & on le porte sur soi dans de petits flacons.

Malgré le nom qu'on lui donne, il y a long-temps que ce sel étoit connu des Chymistes. M. Lemery en avoit parlé dès les premieres éditions de son *Cours de Chymie*, & M. Tournefort a dit dans nos Memoires de 1700 * que de 15 onces de sel armoniac il en tiroit 10 de sel volatil, outre 3 onces d'esprit, c'est-à-dire 10 onces de sel volatil en forme seche.

* p. 71. 2.de Edit.

M. Tournefort étoit donc déja bien avancé: mais M. Geoffroy a été plus loin. De 16 onces de sel armoniac il en a tiré plus de 13 onces de sel volatil en forme seche, & cela principalement parce qu'il a mêlé au sel armoniac sur lequel il opéroit une plus grande quantité d'intermede, qui est un sel alkali bien calciné. Cet intermede plus abondant écartoit davantage les unes des autres les parties du sel armoniac, qui avoient été auparavant bien purifiés, pulverisées très-fin, & bien sechées, de sorte que toutes leurs surfaces se presentant separément à l'action du feu, rien n'empêchoit qu'elles ne laissassent échaper tout ce qu'elles contenoient de volatil. Il y a de plus un certain tour d'opération que l'on verra, dont l'adresse vient du génie & de l'expérience du Chymiste.

En comptant l'esprit que M. Geoffroy a tiré, outre le sel en forme seche, & ce qui se perd & se dissipe necessairement dans l'operation, il se trouve que sur 16 onces de sel armoniac, il y en a 15 de sel volatil alkali, qui par con-

ſequent ſe ſont liées à une once ſeulement de l'Acide du ſel marin, qu'on avoit fait entrer dans la compoſition du ſel armoniac, ainſi que nous le ſçavons preſentement. Quinze parties d'alkali ſur une d'acide dans la compoſition d'un ſel concret ou moyen tel que l'armoniac, ſont une doſe étonnante, & qui ne ſe trouve peut-être que dans ce ſeul mixte : mais cela même rend bien raiſon pourquoi le ſel armoniac mis ſur une pelle rouge s'en va tout en fumée ; ſes deux principes, l'acide & l'alkali, n'ont preſque pas de liaiſon, parce que l'un eſt en trop grande quantité par rapport à l'autre.

Quant à l'odeur agréable que les Anglois donnent à leur ſel, ce n'eſt pas la peine de s'y arrêter, elle vient de quelques Plantes aromatiques. M. Geoffroy donne dans tout le détail la compoſition de ce ſel telle qu'il l'a découverte, & qu'il la pratique. Le génie François n'eſt pas myſtérieux, même en Chymie.



BOTANIQUE.



BOTANIQUE.

M. Marchant a donné la Description du *Chamædrys maritima, incana, frutescens, foliis lanceolatis I. R. H. 205. Marum Cortusi. J. B. T. 3. 242. Majorana Syriaca vel Cretica. Casp. Bauh. Pin. 224.*

Et du *Trachelium azureum, umbelliferum. Pon. Bald. Ital. 44. Cervicaria Valerianoïdes, cærulea. Casp. Bauh. Pin. 95.*

NOus renvoyons entierement aux Memoires L'Ecrit de M. Marchant sur l'établissement d'un nouveau Genre de Plante, qu'il appelle *Ricinocarpos.* V. les M. p. 174.



ALGEBRE.

SUR LE CALCUL DES DIFFERENCES finies, & des sommes des suites.

V. les M. p. 20. & 181.
* p. 38. & suiv.

CETTE matiere a déja été traitée en 1717 d'après M. Nicole *. Il rend présentement sa Théorie plus générale, & l'étend à de nouvelles suites dont les conditions sont moins bornées. Non seulement nous allons le suivre dans cette augmentation qu'il donne à sa recherche, mais pour répandre plus de lumiere sur le tout, nous remonterons jusqu'aux idées fondamentales, que nous éclaircirons plus qu'elles ne l'avoient été.

Si la premiere ordonnée d'une courbe est nulle ou zero, il est très-clair qu'une ordonnée quelconque suivante est la somme des différences de toutes les ordonnées qui la précedent, c'est-à-dire, la somme de toutes les grandeurs dont chaque ordonnée a crû au dessus de la précédente. Ainsi dans une suite d'ordonnées croissantes qui commence par zero, toute ordonnée est la somme de tout ce qu'il y a eu de différences jusqu'à elle inclusivement. Que ces différences soient finies ou infiniment petites, la proposition subsiste également. Si elles sont finies, la 1re ordonnée finie, qui n'est que la 2de ordonnée, puisque la 1re est zero, est la somme d'elle-même qui est la différence de zero à elle ; la 2de ordonnée finie, qui est la 3me, est la somme de la 2de ordonnée entiere, & de la différence dont la 3me surpasse cette seconde, & toûjours ainsi de suite. Si les différences sont infiniment petites, comme on les conçoit dans la géometrie moderne, il n'y a rien de changé, seulement toute ordonnée finie est la somme d'une infinité de différences.

Ce que l'on vient de dire d'une suite croissante d'ordonnées qui commence par zero, s'applique de soi-même à une suite décroissante, qui se terminera par zero. Il n'y a que ce seul changement, l'ordonnée qui dans le 1er cas étoit la somme de toutes les différences des ordonnées précédentes jusqu'à elle inclusivement, est dans le 2d cas la somme des différences de toutes les ordonnées suivantes; car pour rendre la suite croissante, au lieu qu'elle étoit décroissante, il n'a fallu que la concevoir renversée.

Cette condition, que la suite croissante, car il suffit de la considérer, commence par zero, est absolument nécessaire, afin qu'une ordonnée quelconque soit la somme des différences de toutes les ordonnées précedentes, & ne soit ni plus ni moins. Si la premiere ordonnée de la courbe n'est pas zero, ou infiniment petite, mais finie; ou, ce qui revient au même, si on ne considere dans la courbe qu'une suite d'ordonnées qui ne commence qu'après le point où il y en auroit une nulle, une ordonnée quelconque de cette suite sera bien encore la somme des différences de toutes les ordonnées précédentes: mais elle contiendra de plus une grandeur égale à la premiere ordonnée finie par laquelle on aura commencé la suite: ainsi la somme des différences sera égale à cette ordonnée moins la premiere. Si au contraire la suite dont il s'agit commence par quelque ordonnée qui soit avant l'ordonnée nulle, après quoi elle continuera à l'ordinaire par les ordonnées croissantes, une ordonnée quelconque d'entre ces croissantes sera la somme des differences de toutes les ordonnées précédentes jusqu'à zero, mais non pas des différences des ordonnées qui auront précédé zero; ainsi la somme des différences de toutes les ordonnées posées & que l'on veut considerer, sera égale à cette ordonnée, plus la somme des différences des ordonnées qui auront précedé zero, ou l'ordonnée nulle.

Par le calcul différentiel on a toûjours la difference infiniment petite d'une ordonnée quelconque d'une courbe, & cette différence qui est la quantité dont cette ordonnée

ſuppoſée ici croiſſante, ſurpaſſe celle qui la précede, eſt une partie infiniment petite de l'ordonnée. *Integrer* une quantité, c'eſt trouver par une partie infiniment petite quel eſt le tout fini, en déterminer la valeur. Quand on integre la différence infiniment petite d'une ordonnée, on a donc cette ordonnée, ou la ſomme exacte des différences de toutes les ordonnées précédentes dans le cas où cette ſomme & l'ordonnée ſont exactement égales ; & ſi elles ne ſont pas dans ce cas, qui eſt celui où la ſuite a commencé par zero, on voit aiſément, en ſuppoſant une premiere ordonnée nulle, ce qu'il faut ajoûter à la ſomme trouvée des différences, ou en retrancher.

C'eſt par cette methode que l'on détermine la quadrature des courbes, ou les eſpaces finis renfermés entre ces courbes & des droites. On prend les différences de ces eſpaces, ou les eſpaces infiniment petits dont ils croiſſent à chaque inſtant, & on les integre quand l'intégration eſt poſſible ; car on ne ſçait que trop qu'elle ne l'eſt pas toûjours, du moins jusqu'à preſent.

Nous avons dit en 1717 comment toutes ces idées qui ont pris naiſſance dans le ſyſtême de l'infini ont été tranſportées au fini, d'abord par M. Taylor, grand Géometre Anglois, & après lui par M. Nicole. Une ſuite quelconque formée de nombres finis, étant poſée, chacun de ces nombres eſt la différence finie dont la ſomme totale de la ſuite augmente toûjours, & par conſéquent chaque nombre conçu comme une différence, étant integré, ſera égal à la ſomme de toutes les différences précédentes de la ſomme totale, c'eſt-à-dire à la ſomme de tous les nombres qui l'auront précedé, ſuppoſé que la ſuite ait commencé par zero ; ce qui eſt une très-belle methode pour avoir la ſomme de tel nombre de termes qu'on voudra d'une Suite.

Mais cette methode n'eſt pas appliquable à toutes ſortes de ſuites : il faut que chaque terme en puiſſe être exprimé d'une maniere générale & algebrique, & il faut que cette expreſſion, puiſqu'on la conçoit comme l'expreſſion d'une

différence, puisse être intégrée : or cela demande deux conditions, ainsi que nous l'avons dit. 1.° Que les termes de suites soient formés par un produit. 2.° Qu'il n'entre dans ce produit qu'une seule grandeur indéterminée, qui croisse toûjours d'une même quantité, c'est-à-dire, que les nombres multipliants ou *facteurs* qui composeront un terme quelconque de la suite, seront la grandeur indéterminée, la même plus la quantité constante dont elle croît, la même plus deux fois la quantité constante, &c. Car cela peut aller si loin qu'on voudra, & le produit qui fait un terme quelconque de la suite peut avoir un nombre quelconque de facteurs. Quand on détermine la grandeur indéterminée, c'est-à-dire, qu'on lui donne successivement les valeurs des nombres naturels, 1, 2, 3, &c. on a les différents termes consécutifs de la suite. Le premier est celui où la grandeur indéterminée est 1.

La grandeur indéterminée assujettie à croître toûjours d'une quantité constante dans les différents facteurs, qui forment chaque produit ou terme de la suite, n'est pas assujettie pareillement à ne croître que de cette même quantité quand elle passe d'un terme à l'autre. Elle peut croître de toute autre quantité dans ce passage, pourvû que dans chaque passage ce soit toûjours la même quantité. Ainsi il peut y avoir deux différentes quantités constantes, l'une dont la grandeur indéterminée croît dans chaque facteur d'un même terme, l'autre dont elle croît d'un terme à l'autre. Cela fait deux cas, dont le plus simple est celui où les deux quantités constantes sont la même. C'est ce cas-là que M. Nicole a donné en 1717. Une infinité de suites croissantes qu'on peut former à son gré en observant les conditions requises, lui appartiendront, & par conséquent on aura les sommes de tel nombre fini de leurs termes qu'on voudra depuis leur origine. Il est à remarquer qu'entre toutes ces suites sont celles de tous les nombres figurés possibles, & c'est ce que nous allons faire voir.

La suite des nombres naturels étant posée, les nom-

bres qui commençant par 1, auroient pour 1re différence le 2d des naturels, ou 2, & ensuite tous les autres pour différences consecutives, selon les triangulaires. Ils sont cette suite 1, 3, 6, 10, &c. De même ceux qui commençant par 1 auront pour 1re différence le 2d des triangulaire, ou 3, & ensuite tous les autres pour differences consecutives, seront les pyramidaux, 1, 4, 10, 20, &c. De la même maniere se formeront les triangulo-pyramidaux, qui commençant par 1, auront pour 1re difference 4, le 2d pyramidal, & ensuite tous les autres pyramidaux pour différences. On voit qu il se formera ainsi des nombres figurés sans fin. On les appelle aussi nombres du 1er ordre, du 2d, du 3me, &c. en comptant les naturels pour ceux du 1er. Mais on ne peut donner aux naturels le nom de figurés.

Si l'on forme de suite des produits des nombres naturels pris deux à deux, c'est-à-dire, que l'on multiplie 1 par 2, 2 par 3, 3 par 4, &c. & que l'on divise chacun de ces produits par 2, on aura la suite des nombres triangulaires. De même si l'on multiplie de suite les naturels pris trois à trois, c'est-à-dire qu'on fasse le produit de 1, 2, & 3, celui de 2, 3 & 4, celui de 3, 4 & 5, &c. & qu'on divise chacun de ces produits par 6, on aura la suite des pyramidaux. On aura la suite des triangulo-pyramidaux en formant pareillement des produits des naturels pris quatre à quatre, la difficulté ne peut être que de sçavoir quel sera le diviseur commun de ces produits : mais il saute aux yeux que ce diviseur commun sera égal au 1er produit, c'est-à-dire ici 24. Il en ira toûjours ainsi de tous les nombres figurés à l'infini.

On aura donc une infinité de suites dont chaque terme sera un produit formé d'un certain nombre de facteurs qui croîtront d'une même quantité constante, & où de plus d'un terme à l'autre les premiers facteurs comparés entr'eux croîtront encore d'une quantité constante, qui sera la même que la premiere. Quant au diviseur commun de tous les

produits ou termes, il ſera fort aiſé d'en tenir compte. Ainſi toutes les ſuites des nombres figurés ſont telles que par la methode de M. Nicole on peut avoir les ſommes d'un nombre quelconque fini de leurs termes à commencer par le premier.

Si les produits formés, comme on vient de dire, ne ſont pas diviſés par le diviſeur commun que demande chaque ordre de nombres figurés ; ce ſeront d'autres ſuites de nombres qui n'en appartiendront que de plus près à la methode de M. Nicole.

Toutes les ſuites qui y appartiennent peuvent être réduites en ſuites de nombres rompus, il n'y a qu'à donner à tous leurs termes qui deviendront dénominateurs, un même numérateur conſtant. Mais alors elles ſont décroiſſantes, & leur dernier terme infiniment petit, ou zero. Ainſi les ſommes en général étant toûjours priſes depuis zero juſqu'à un terme fini quelconque, celles-là comprennent la partie infinie de la ſuite qui eſt du côté de ſon extrémité, au lieu que les autres n'en comprenoient qu'une partie finie du côté de ſon origine. Les premieres ſommes ne l'étoient que d'un nombre fini de termes, ces ſecondes le ſont d'un nombre infini, ce qui les rend & plus curieuſes, & d'un uſage beaucoup plus grand en géometrie.

Le terme fini d'où l'on prend la ſomme de la ſuite fractionnaire juſqu'à zero ſon dernier terme, peut auſſi-bien être le premier terme que tout autre, & par conſéquent on a la ſomme de la ſuite entiere. On a d'ailleurs la ſomme de cette ſuite depuis tel terme que l'on veut, par exemple, depuis le 10me juſqu'à zero ; ainſi en ôtant cette ſomme de la ſomme totale, on aura celle des 10 premiers termes, & de tout autre nombre fini de ſes termes.

Les ſommes des ſuites fractionnaires conditionnées ſelon que la methode l'exige, ſont néceſſairement finies, quoiqu'elles ſoient ſommes d'une infinité de termes.

Puiſque les produits des nombres naturels pris deux à deux, & diviſés par 2, pris trois à trois, & diviſés par 6,

&c. ſont des ſuites de nombres figurés, il n'y a pour les changer en ſuites dont les nombres figurés ſoient les dénominateurs, qu'à leur donner pour numérateur conſtant, ou 2 ou 6, &c. enfin le nombre que nous avons trouvé pour diviſeur commun à chaque ordre de figurés.

Afin que ces ſuites fractionnaires ſoient compriſes dans la methode de M. Nicole, il n'eſt point abſolument neceſſaire que leur numérateur ſoit conſtant, il ſuffit que les numérateurs ſoient auſſi-bien que les dénominateurs des nombres formés comme la methode le preſcrit pour les ſuites de nombres entiers. Mais ces eſpeces de ſuites fractionnaires ne feront pas toûjours *ſommables*, c'eſt-à-dire, que le nombre infini de leurs termes n'aura pas toûjours une ſomme finie, & dont on puiſſe déterminer la valeur; quelquefois il en aura une infinie, que l'on ne pourra par conſequent déterminer. Ainſi ſi une ſuite fractionnaire a pour numérateurs les nombres triangulaires, & pour déterminateurs les pyramidaux correſpondans, elle ne ſera point ſommable, & ſa ſomme ſera infinie. Mais ſi à ces mêmes nombres triangulaires on donne les triangulo-pyramidaux pour dénominateurs, la ſuite ſera ſommable, & en général une ſuite fractionnaire dont les numérateurs ſeront des nombres figurés d'un ordre quelconque, & les dénominateurs des figurés d'un ordre ſuivant, ne ſera point ſommable quand les deux ordres ſeront immédiatement conſecutifs, & hors de-là le ſera toûjours.

En 1717 M. Nicole ne paſſa point le cas ſuppoſé juſqu'ici, où d'un terme à l'autre de la ſuite la grandeur indéterminée croît de la même quantité conſtante, dont les facteurs d'un même terme croiſſent entr'eux. Maintenant il étend ſa théorie au cas où cette quantité conſtante dans l'étendue de chaque terme, n'eſt plus la même dans le paſſage d'un terme à l'autre, quoique toujours la même dans chaque paſſage. Tels ſont ces nombres 15, 48, 99, &c. Car le 1er eſt le produit de 3 & de 5, le 2d celui de 6 & de 8, le 3me celui de 9 & de 11, où l'on voit que 3
&

& 5 facteurs du 1er terme, 6 & 8 facteurs du 2d, 9 & 11 facteurs du 3me croissent toûjours entr'eux de la quantité 2, mais 3 premier facteur du 1er terme croît de la quantité 3 pour devenir 6 premier facteur du 2d terme, 6 croît aussi de 3 pour devenir 9 premier facteur du 3me terme, ce qui peut être continué à l'infini.

Cette Methode devenue plus vaste demande aussi plus de calcul : mais le même esprit, & les mêmes principes y regnent toûjours. Elle comprend nécessairement l'autre qui est plus simple, & pour l'y ramener il n'y a qu'à supposer égales les deux quantités qui doivent être toûjours constantes.

Si la quantité constante dont croissent les facteurs d'un même terme est nulle, alors ce terme qui n'est plus qu'une même grandeur multipliée par elle-même un certain nombre de fois, est un quarré; s'il a deux facteurs, un cube, s'il en a trois, &c. Et si en même temps la quantité constante, qui doit être dans le passage d'un terme à l'autre, subsiste, on a une suite dont les termes sont ou des quarrés, ou des cubes, &c. de nombres éloignés entr'eux d'un intervalle égal à cette quantité constante. Par exemple, si elle est 3, on a une suite dont les termes sont ou les quarrés, ou les cubes, &c. de 1, de 4, de 7, de 10, &c. Si elle n'est que 1, on a les puissances quelconques consecutives des nombres naturels. Or par la Methode de M. Nicole on a l'expression générale algébrique de la différence des termes de la suite; on a donc celle de la différence qui est entre les mêmes puissances des nombres Naturels éloignés entr'eux de tel intervalle toûjours égal qu'on voudra, & consécutifs, si l'on veut. On a aussi par la même methode la somme d'un nombre fini quelconque des termes d'une suite, depuis tel nombre fini exclusivement qu'on a voulu choisir jusqu'au premier inclusivement; on a donc les sommes d'un nombre fini quelconque de puissances des nombres naturels, soit consécutifs, soit éloignés entr'eux d'un intervalle égal quelconque. On voit assez que cette

détermination, toute vaste qu'elle est, n'est qu'un cas particulier de la Methode modifiée, & restrainte.

Toutes les suites comprises dans la seconde supposition de M. Nicole, & telles que l'on peut avoir leur différence algebrique, & l'intégrer, ce qui donne des sommes, ne sont pas pour cela telles qu'étant devenues fractionnaires elles soient susceptibles des mêmes opérations, & qu'on puisse en avoir les sommes à la maniere des suites fractionnaires. Le changement qu'elles ont reçû apporte des limitations à leur capacité d'être sommées. Ce n'est pas qu'en leur donnant un numérateur constant, elles ne vinssent toutes sans exception à avoir des sommes finies : mais souvent on n'en pourroit pas déterminer la valeur, quoique finie. Ainsi les quarrés des nombres naturels étant réduits en fractions dont 1 sera toûjours le numérateur, la somme de cette suite est certainement finie, mais inconnue. Il en va de même des autres puissances des nombres naturels. Le calcul par lequel M. Nicole trouve les formules générales de la différence & de l'intégration des suites fractionnaires de sa seconde supposition est trop long, trop recherché, trop veritablement calcul, pour nous permettre d'y entrer.

SUR UNE METHODE
pour la transformation des nombres irrationels en rationels.

V. les M. p. 55.

LES nombres irrationels sont des racines quelconques de nombres qui ne sont point les puissances correspondantes à ces racines. Ainsi les racines quarrées ou 2des de 2, de 3, de 5, &c. qui ne sont point des quarrés, ou des puissances 2des, les racines cubiques ou 3mes de 2, de 3, de 4, de 5, &c. qui ne sont point des cubes, ou des puissances 3mes, les racines 4mes, 5mes, 6mes, &c. à l'infini de 2, de 3, de 4, de 5, &c. sont des nombres irrationels. Il n'y a que peu de nombres qui soient quelque puissance, & ces nombres-là

fournissent chacun autant de nombres irrationels, qu'il leur manque de puissances, c'est-à-dire une infinité. A plus forte raison, les nombres qui ne sont aucune puissance. De-là vient que dans les calculs scientifiques on rencontre beaucoup plus de nombres irrationels, que de rationels.

Les irrationels sont naturellement inintelligibles à l'Esprit humain, au lieu que les autres sont l'objet de ses plus claires idées. On ne sçait ce que c'est que la racine 2de, 3me, 4me, &c. de 2, on sçait seulement qu'elle est plus grande que 1, & moindre que 2, & d'autant moins au dessus de 1, & plus au dessous de 2, qu'elle est d'une dénomination plus élevée. Aussi les Anciens n'ont-ils point reconnu les nombres irrationels pour les veritables nombres, ils les évitoient avec beaucoup d'art dans leurs solutions de Problèmes, qu'ils n'eussent pas crûes legitimes, si elles n'eussent abouti qu'à leur en donner, mais les Modernes plus hardis, ou forcés enfin à les admettre, parce qu'ils les rencontroient trop souvent, les ont reçûs, & soûmis au calcul comme les autres, autant que leur nature l'a pû permettre. Nous n'allons traiter que des irrationels, qui sont des racines quarrées, & par le mot de racine nous n'entendrons ici que celle qui est quarrée.

Puisque l'on ne peut avoir la valeur précise d'un irrationel, & que l'on sçait seulement entre quelles limites il est compris, tout ce qu'on peut faire est d'approcher de cette valeur inconnue par des nombres rationels qui soient au dessous : mais le moins au dessous qu'il se pourra, ou au dessus, mais le moins au dessus. La racine de 2 est 1, plus quelque quantité, mais quelle quantité ? Voici comme on s'y prend pour le déterminer autant qu'on le peut. 2 étant pris ici pour un quarré, il est certain que si on le multiplie par un véritable quarré, tel que 100, par exemple, le produit sera un quarré imparfait, que la racine de ce nouveau quarré sera plus grande que n'étoit celle de 2, & que divisée par 10, racine de 100, elle donnera une fraction qu'il faudra ajoûter à 1 pour avoir une racine de 2 plus grande que 1. On tire donc la racine de 200, racine imparfaite, puisque 200 n'est pas quarré.

Cette racine eſt 14, ou 10 plus 4, & cette grandeur diviſée par 10 eſt 1 plus $\frac{4}{10}$, & $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ eſt ce qu'il faut ajoûter à 1 pour approcher plus de la racine de 2 en deſſous que 1 n'en approchoit.

En effet le rapport de 1 à la racine préciſe & inconnue de 2 eſt tel, que le quarré de 1, qui eſt 1, eſt la moitié du quarré de cette racine, & par conſequent ſi l'on avoit deux nombres rationels tels que le quarré de l'un fût la moitié du quarré de l'autre, on auroit le rapport exact de 1 à la racine de 2 : mais puiſque ce rapport exact ne ſe peut trouver, ces deux nombres ne ſe peuvent trouver non plus ; ſeulement en pourra-t-on trouver deux dont les quarrés approchent du rapport cherché. Or c'eſt ce qui ſe voit dans la grandeur 1 $\frac{2}{5}$, ou $\frac{7}{5}$ qu'on vient de déterminer, car il ne s'en faut qu'une unité que 49 quarré de 7 ne ſoit double de 25 quarré de 5, deſorte que le rapport de 5 à 7 repréſente à très-peu près celui de 1 à la racine de 2.

Mais cet *à très-peu près* n'empêche pas qu'on ne puiſſe encore approcher davantage du rapport de 1 à la racine de 2. Au lieu de multiplier comme on a fait dans l'operation précedente 2 par 100, il n'y a qu'à le multiplier par 10000, autre quarré dont la racine eſt 100, & la racine de 20000 qui ſera 141, diviſée par 100, marquera que la racine de 2 eſt 1 plus $\frac{4}{10}$ plus $\frac{1}{100}$, de ſorte que par la ſeconde operation on s'eſt approché de $\frac{1}{100}$ de plus qu'on n'avoit fait par la premiere.

En multipliant encore 20000 par 100, & en opérant de même, on aura une nouvelle fraction plus petite que $\frac{1}{100}$, qu'il faudra ajoûter aux deux déja trouvées, & par la repetition continuelle des operations, le nombre de ces fractions décroiſſantes augmentera toûjours, ſans que jamais leur ſomme puiſſe venir à faire un nombre rationel qui ajoûté à 1 ſoit la racine préciſe de 2, ou ait ſon quarré égal à 2.

Ce ſont là les approximations à l'infini connues de tous les Geometres, mais M. de Lagni les trouve défectueuſes par plus d'un endroit. Elles ne ſe font que par des extractions de

racines, & ces operations tâtonnent necessairement aussi-bien que les divisions, dont elles sont une espece, car toutes les fois qu'on a mis un quotient trop fort, ce qui arrive souvent, on est obligé de le réduire, & de le réduire au hasard, puisque quelquefois on le réduit encore : or selon M. de Lagni, tout tâtonnement dans des opérations prescrites par des méthodes est indigne de la science Mathématique. Mais ce qu'il y a de pis dans les approximations usitées, c'est que les fractions décroissantes, que l'on trouve toûjours à chaque opération, ne suivent aucune regle. Leurs dénominateurs sont, à la verité, reglés par la progression 10, 100, 1000, &c. mais les numérateurs ne le sont, ni ne le peuvent être en aucune maniere, ce qui fait que les fractions mêmes ne peuvent se déterminer qu'une à une, & ne forment point de suite ou de serie algebrique, qui soit un objet de science.

On s'est apperçû, il y a déja quelque temps, que ces nombres fractionnaires $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, &c. représentent chacun, quoi-qu'imparfaitement, ainsi qu'il est inévitable, le rapport de 1 à la racine de 2. On l'a déja vû sur $\frac{7}{5}$, & on le verra de même sur les autres. Ils sont tous tels que le quarré du plus grand est double du quarré du plus petit à une unité près, qu'il a de trop ou de trop peu, & cela alternativement, c'est-à-dire, que dans le 1er terme qui est $\frac{3}{2}$ le quarré 3 ayant une unité de plus que le double du quarré de 2, il arrive dans $\frac{7}{5}$, 2d terme que le quarré de 7 a une unité de moins que le double du quarré de 5, & toûjours ainsi de suite.

L'unité étant donc toûjours l'excès ou le défaut du plus grand quarré, il est évident que plus ce quarré est grand, plus elle est petite par rapport à lui, & par consequent que $\frac{7}{5}$ approche plus du rapport cherché que $\frac{3}{2}$, $\frac{17}{12}$ plus que $\frac{7}{5}$, &c. De sorte qu'en continuant toûjours ces nombres, si on le peut, on aura toûjours une expression rationelle plus approchée du rapport de 1 à la racine de 2.

Or on peut les continuer à l'infini, le 1er seul, ou un autre quelconque étant donné. Car si c'est $\frac{3}{2}$, par exemple,

on trouvera le dénominateur du ſuivant en ajoûtant le numérateur 3, & le dénominateur 2 de $\frac{3}{2}$, & pour avoir le numérateur qui doit répondre au nouveau dénominateur trouvé 5, il faut ajoûter ce dénominateur 5 au dénominateur 2 du terme précédent, & toûjours de même à l'infini. M. de Lagni met cela très aiſément en une formule algebrique générale, & l'on a une ſuite très réguliere, formée par la ſeule addition, ſans aucune opération tâtonneuſe, & où les termes approchent toûjours de plus en plus du rapport de 1 à la racine de 2.

Ce que M. de Lagni a fait ſur cette racine de 2, il le fait enſuite ſur celle de 3. Son rapport à 1 peut être repréſenté par ces nombres fractionnaires $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{11}$, &c. car le quarré de 2 ſurpaſſe d'une unité le triple du quarré de 1, le quarré de 5 eſt de deux unités moindre que le triple du quarré de 3, & ainſi de ſuite, de ſorte que le quarré du plus grand nombre eſt toûjours alternativement plus grand d'une unité & moindre de deux unités qu'il ne faudroit. Cette différence des quarrés excedants & défaillants n'étant pas la même, il faut faire deux ſuites, dont l'une ſera $\frac{2}{1}$, $\frac{7}{4}$, &c. l'autre $\frac{5}{3}$, $\frac{19}{11}$, &c. Et M. de Lagni donne pour chacune une formule générale, qui eſt la même; mais qui ne peut ſervir que pour chacune en particulier, & non pour les deux miſes enſemble, comme nous les avons d'abord expoſées. La loi ou formule de chacune de ces ſuites eſt qu'un terme précédent, tel que $\frac{2}{1}$ étant donné, le numérateur du ſuivant eſt le double du numérateur de ce précédent ajoûté au triple de ſon dénominateur, & le dénominateur du ſuivant eſt le numérateur du précédent ajoûté au double de ſon dénominateur. Les termes ſe forment toûjours encore ici par la ſeule addition.

Le rapport du côté du triangle équilatéral inſcrit dans le Cercle au rayon eſt celui de la racine de 3 à 1. Archimede dans ſa quadrature du Cercle a eu beſoin de ce rapport exprimé en nombres rationels, & il a choiſi $\frac{1351}{780}$, & $\frac{265}{153}$. Le quarré de 1351 eſt plus grand d'une unité que le triple du

quarré de 780, & le quarré de 265 eſt moindre de deux unités que le triple du quarré de 153. Or il ſe trouve que ces deux nombres fractionnaires ſont compris dans les deux ſuites de M. de Lagni, & par cette raiſon il ne croit pas qu'Archimede les ait pris au haſard, quoique ſes Commentateurs les plus zelés n'ayent jamais eu la penſée de lui attribuer un choix ſi judicieux. Il eſt vrai qu'on ne peut guere rien préſumer de trop à la gloire d'un ſi grand & ſi rare génie.

M. de Lagni trouve enſuite les formules générales, qui appartiennent à la racine de 5, à celle de 6, de 7, &c. On voit bien que nous avons ſauté celle de 4, parce qu'elle eſt rationelle : mais quand toutes les formules des racines irrationelles, qui expriment chacune en particulier une ſuite infinie, ſont diſpoſées ſelon leur ordre naturel, on s'apperçoit auſſi-tôt qu'elles ſont elles-mêmes une nouvelle ſuite réguliere, où cependant il manque des termes dans certains intervalles, & ces intervalles ſont juſtement ceux où doivent être placées les racines rationelles, qui viennent d'elles-mêmes, pour ainſi dire, ſe ſoûmettre à l'analogie générale.

Nous pourrons ici donner une remarque ſur les racines quarrées irrationelles, que nous ne croyons pas qui ait encore été faite. Tous les nombres qui ſont la ſomme d'un quarré & de ſa racine, tels que 2, ſomme du quarré 1, & de ſa racine 1, 6 ſomme de 4 & de 2, 12 ſomme de 9 & de 3, 20 30, 42, 56, &c. que j'appelle pour abreger, nombres *mi-partis*, ont néceſſairement leur racine quarrée irrationelle. Si l'on diſpoſe ces racines ſelon leur ordre naturel, celle de 2, de 6, de 12, &c. & que ſous elles on diſpoſe ſelon le même ordre les impairs, 3, 5, 7, &c. le rapport de 1 à chaque racine des mi-partis ſera exprimé par celui de 2 à l'impair correſpondant, de maniere que la différence ne ſera jamais que d'une unité, & toûjours en deſſus. Le rapport de 1 à la racine de 2 premiere racine des mi-partis, eſt tel que ces deux quantités étant quarrées, le quarré de la plus petite eſt la moitié du quarré de la grande; or le quarré de 2 eſt la moitié du quarré de 3, premier impair, à cela près que le quarré de 3

excede d'une unité le double du quarré de 2. Le rapport de 1 à la racine de 6, seconde racine des mi-partis, est tel que le quarré de la plus petite de ces grandeurs est contenu six fois dans le quarré de la plus grande, & le quarré de 2 est contenu 6 fois dans le quarré de 5 second impair, si ce n'est que 25 excede 24 d'une unité. Le rapport de 1 à la racine de 12 est exprimé de la même maniere par celui de 2 à 7, &c. & il est très-aisé de démontrer cette propriété de ces suites de nombres.

Les rapports successifs de 2 à tous les impairs, qui expriment ceux de 1 aux racines des mi-partis, sont extrèmement approchés, puisqu'il n'y a dans les quarrés qu'une différence d'une unité, qui en emporte une bien moindre dans les racines dont il s'agit, & ces rapports sont très-réguliers, puisqu'on a toûjours la même différence, & toûjours du même côté.

Les nombres mi-partis ou leurs racines sont dans la suite naturelle des nombres, des points fixes par lesquels on peut juger des rapports de 1 aux nombres irrationnels intermédiaires. Ainsi puisque le rapport de 1 à la racine de 2, est celui de 2 à 3, & que celui de 1 à la racine de 6 est celui de 2 à 5, il faut que le rapport de 1 à la racine de 5 soit compris entre celui de 2 à 3, & celui de 2 à 5. Il faut que le rapport de 1 à la racine de 10 soit compris entre celui de 2 à 5, & celui de 2 à 7, & ainsi du reste.

Mais il y a plus, & on l'apperçoit déja par ces exemples. Entre deux nombres mi-partis il y a toûjours nécessairement un nombre quarré; entre 2 & 6 est 4, entre 6 & 12 est 9, &c. Le rapport rationel de 1 à la racine de ces quarrés est nécessairement le même que celui de 2 au nombre moyen entre deux impairs. Le rapport de 1 à la racine de 4 est le même que celui de 2 à 4, qui est le nombre moyen entre 3 & 5. Le rapport de 1 à la racine de 9 est le même que celui de 2 à 6, nombre moyen entre 5 & 7, & toûjours ainsi. Par conséquent le rapport de 1 à la racine de 5 est compris entre celui de 2 à 4, & celui de 2 à 5; le rapport de 1 à la racine de 10 est compris entre celui

celui de 2 à 6 & celui de 2 à 7. Dans ce même intervalle est compris aussi le rapport de 1 à la racine de 11.

Le rapport rationel de 1 à la racine d'un quarré étant donc toûjours celui de 2 à un nombre pair, & le rapport de 1 à la racine du mi-parti qui suit ce quarré étant celui de 2 à l'impair qui suit le nombre pair posé, les rapports de 1 à toutes les racines irrationelles des nombres qui sont entre le quarré & le mi-parti suivant sont comprises dans le même intervalle. Ainsi le rapport de 1 à la racine de 49 étant celui de 2 à 14, & le rapport de 1 à la racine de 56, mi-parti suivant, étant celui de 2 à 15, le rapport de 1 aux racines de 50, 51, 52, 53, 54 & 55 sont entre le rapport de 2 à 14 & celui de 2 à 15. Tous les rapports de 1 aux racines de 57, 58, 59, 60, 61, 62 & 63 sont compris entre celui de 2 à 15, & de 2 à 16.

Plus un quarré & le mi-parti qui le suit ou le précede sont grands, plus il y a entr'eux de nombres intermédiaires; & comme en quelque nombre qu'ils soient ils partagent toûjours entr'eux un intervalle égal qui est celui du rapport de 2 à un nombre pair, & à l'impair suivant, il suit que cet intervalle est toûjours partagé en plus petites parties; & plus elles devront être petites, moins il y aura d'erreur à craindre en partageant cet intervalle également pour avoir les racines des nombres intermédiaires. En divisant en 6 parties égales l'intervalle qui est entre 14 & 15, on aura des nombres dont le rapport à 2 exprimera assez exactement les rapports des racines de 50, 51, 52, 53, 54 & 55 à 1. Cela sera encore plus vrai ou plus sûr, quand les nombres intermédiaires étant en plus grand nombre dans des intervalles toûjours égaux, ils y seront plus serrés, & les rapports moins différens.

On pourroit bien par quelques autres considerations diminuer encore le peu d'incertitude qui reste dans ces intervalles, & donner quelques nouveaux points fixes sans sortir de cette petite theorie : mais ce n'est pas la peine de la pousser plus loin, il sembleroit qu'on auroit voulu lui donner plus de relief qu'elle n'en mérite.

Pour revenir à M. de Lagni, il promet d'étendre aux racines 3mes, 4mes, &c. ce qu'il ne donne ici que sur les 2des. Le tout se liera nécessairement avec ce que nous avons déja rapporté d'après lui en 1722 * *sur la Resolution des Equations determinées de tous les degrés ;* car le plus souvent ces résolutions ne se terminent qu'à des racines irrationelles quelconques, qui par les Methodes de M. de Lagni deviendront plus traitables, & en quelque sorte moins inconnues.

* p. 63. & suiv.

LES combinaisons des Carreaux de deux couleurs mipartis par une Diagonale qui, ainsi que nous l'avons dit en 1721 * avoient été traitées avec succès par le P. Doüat Religieux Carme, l'ont été aussi par le P. Meliton de Perpignan, Capucin, ancien Professeur en Theologie, & Gardien du Couvent de Perpignan, qui a communiqué son Ouvrage à l'Académie. Elle y a trouvé beaucoup de travail & de méthode. Il ajoûte à celui du P. Doüat beaucoup de détail ; & ce qui est considérable en cette matiere, & le principal objet de l'Auteur, il détermine parmi un nombre innombrable d'arrangements possibles de carreaux le petit nombre de ceux qui forment les figures les plus agréables, & il en regle le choix. Il donne une pratique aisée & très-méthodique pour l'exécution des divers desseins composés de ces figures.

* p. 42.



GEOMETRIE.

SUR UNE PROPRIETE' DES POLYGONES *inſcrits ou circonſcrits au Cercle.*

M. Saurin examinant une prétendue quadrature du cercle préſentée à l'Académie, découvrit dans les Polygones inſcrits & circonſcrits au cercle une proprieté de même eſpece qu'une autre que l'on y connoiſſoit déja. Celle-ci eſt que ſi on a deux poligones réguliers, l'un d'un nombre de côtés quelconque, & que j'appelle *ſimple*, l'autre d'un nombre de côtés double, & que j'appelle pour cette raiſon le Polygone *double*, on a toûjours en progreſſion géométrique continue, le polygone ſimple circonſcrit au cercle, le double inſcrit & le ſimple inſcrit, par exemple, le triangle équilatéral circonſcrit, l'exagone inſcrit, & le triangle inſcrit. Il eſt viſible qu'il s'agit des aires de ces figures, & tout le monde ſçait qu'un polygone circonſcrit a une aire plus grande que le polygone ſemblable inſcrit, & que le circonſcrit a une aire d'autant plus grande par rapport à celle du cercle, qu'il a moins de côtés, & l'inſcrit au contraire une aire d'autant plus petite, d'où il ſuit que l'un & l'autre approchent d'autant plus de l'aire du cercle, qu'ils ont plus de côtés.

La nouvelle propriété dûe à M. Saurin eſt que le polygone ſimple circonſcrit, le double circonſcrit & le double inſcrit ſont en progreſſion harmonique, c'eſt-à-dire, que le premier terme eſt au troiſieme, comme la différence du premier au ſecond eſt à la différence du ſecond au troiſieme. Tels ſeront donc le triangle circonſcrit, l'exagone circonſcrit, & l'exagone inſcrit. M. Saurin l'a démontré en général d'une maniere très-aiſée & très-courte.

Selon l'idée d'Archimede, la plus naturelle, & même la plus lumineuse de toutes celles qu'on peut jamais prendre pour la quadrature du cercle, si on conçoit un polygone d'un nombre infini de côtés circonscrit, & un autre semblable inscrit au cercle, le circonscrit & l'inscrit se confondent, leurs aires sont égales, & la même que celle du cercle. Cette confusion ou cette identité ne se trouve que dans l'infini, & nullement dans le fini; & quand on imagine qu'un polygone circonscrit se confond avec le semblable inscrit, auquel cas l'un & l'autre devient le cercle, on imagine ou l'on suppose nécessairement que ce polygone a une infinité de côtés.

Il suit de la premiere propriété des polygones que si dans la progression géometrique qu'elle donne on suppose les deux termes extrèmes égaux, le moyen le sera aussi, c'est-à-dire, qu'un polygone d'une infinité de côtés étant égal au cercle, soit qu'il lui soit circonscrit ou inscrit, un autre polygone d'un nombre infini de côtés deux fois plus grand, n'en sera pas plus égal au cercle, quoique dans le fini un polygone approche d'autant plus d'être égal au cercle, qu'il a plus de cotés.

Il suit aussi de la seconde proprieté qui donne une progression harmonique, que si on y suppose les deux derniers termes égaux, le premier le sera, c'est-à-dire, qu'un polygone d'une infinité de côtés étant égal au cercle, un polygone d'une infinité de côtés la moitié moindre, n'en sera pas moins égal au cercle. Ainsi dès qu'un polygone a une infinité de cotés, il ne gagne rien & ne perd rien par rapport à son égalité avec le cercle pour avoir plus ou moins de côtés.

Il est vrai cependant qu'on peut concevoir la chose un peu autrement. Quand on imagine la confusion d'un polygone infini circonscrit avec le semblable inscrit, cette confusion peut n'être pas une identité parfaite, mais laisser une différence infiniment petite qui ne sera pas comptée. Alors il sera toûjours constant que plus un polygone infini aura un grand nombre infini de côtés, plus il approchera d'être exactement égal au cercle, ou plus la différence infiniment petite avec le cercle sera petite. Elle passera même par tous les ordres

d'infiniment petit sans arriver jamais à être absolument nulle; ce qui fait qu'il est inutile de la considerer, & qu'il suffit de concevoir le poligone égal au cercle comme ayant le moindre nombre infini possible de côtés.

De ce qui a été dit sur les deux progressions, l'une géométrique, l'autre harmonique, il suit que plus le polygone simple a de côtés, plus les rapports de l'une & de l'autre progression sont petits. Par exemple, si l'on a ces deux progressions géométriques, l'une, le triangle circonscrit, l'exagone inscrit, le triangle inscrit; l'autre, le quarré circonscrit, l'octogone inscrit, le quarré inscrit, les rapports de la 2[de] sont moindres que ceux de la 1[re], c'est-à-dire que le quarré circonscrit n'est pas si grand par rapport à l'octogone inscrit, que le triangle circonscrit par rapport à l'exagone inscrit, &c. Ces rapports doivent toûjours aller en diminuant, puisqu'on a vû que les termes de ces progressions arrivoient enfin à l'égalité. Il en va de même, & par la même raison, de la progression harmonique de M. Saurin.

SUR L'UNIVERSALITE DES FIGURES.

On voit du premier coup d'œil qu'il doit y avoir plus de quadrilateres possibles que de triangles, plus de pentagones réguliers ou irréguliers, que de quadrilateres, &c. parce que dans la combinaison qui doit former tous les quadrilateres, il entre plus d'élemens, c'est-à-dire ici, plus de côtés & d'angles changeans ou variables, qu'il n'en entre dans la combinaison qui forme les triangles, & ainsi des autres polygones, à mesure qu'ils ont plus de côtés, & par conséquent d'angles. On voit aussi que chacune de ces especes de figures doit en contenir une infinité; mais une infinité plus grande selon le polygone, & apparemment même d'un ordre supérieur. C'est ce que M. Saulmon appelle l'*universalité des figures*, & il s'agit de la déterminer.

Si l'on suppose que l'on ait la plus petite ligne finie pos-

ſible, & qu'enſuite elle augmente toûjours également, elle deviendra ſucceſſivement une infinité de droites différentes, & enfin ſera une droite infinie. C'eſt préciſément la même choſe que la ſuite des nombres naturels. Cet infini qui comprend toutes ces droites eſt un infini du 1er ordre. Il eſt vrai que l'on n'a pas la plus petite droite poſſible, & qu'avant celle qu'on a ſuppoſée, il y en a une infinité; il eſt vrai de plus, qu'au lieu des accroiſſemens toujours égaux qu'on ſuppoſe qu'elle prend, elle en pourroit prendre une infinité de différens à chaque pas, de la même maniere qu'entre deux nombres conſécutifs quelconques de la ſuite naturelle, il peut y en avoir une infinité, ce qui multiplieroit infiniment le nombre des termes de la ſuite naturelle, & celui des droites: mais il n'importe; comme les droites ne ſont ſuſceptibles d'aucune impoſition, leur infini eſt le moindre que l'on puiſſe conſidérer en cette matiere, & il eſt toûjours en ce ſens le 1er infini, ou infini du 1er ordre.

Il en va même de toutes les figures, qui quoique compoſées d'élémens, ne le ſont que d'élemens qui ne varient que d'une ſeule façon. Tels ſont tous les triangles ſemblables à un triangle quelconque déterminé, qui ne peuvent varier que par la grandeur, & non par le rapport de leurs côtés, ni par leurs angles. Tels ſont tous les quarrés, & en général tous les polygones réguliers. Leur infini n'eſt que le même que celui des lignes droites.

Mais c'en ſera un autre bien différent, ſi l'on conſidere tous les triangles poſſibles, par exemple, dans toute la variété que peuvent y apporter la différente grandeur des côtés, & celle des angles. Voici comment on peut déterminer l'ordre dont ſera leur infini par rapport à celui des lignes droites, ou des triangles ſemblables à un donné.

Je ſuppoſe qu'il n'y ait que 10 triangles équilatéraux poſſibles, dont le 1er & le plus petit poſſible a ſes côtés de 1 pouce chacun, le 2d de 2, &c. Je prends deux côtés du 1er; & en augmentant l'angle qu'ils font entr'eux, je lui donne pour baſe 2 pouces, côté du 2d équilatéral, enſuite 3 pouces,

côté du 3me équilateral, & toûjours ainſi juſqu'à la baſe de 10 pouces ; moyennant quoi j'aurai 9 triangles iſoſceles différens, mais dont les côtés égaux ſeront de 1 pouce. J'aurai de même pour chaque autre équilatéral 9 triangles iſoſceles, & par conſéquent 90 iſoſceles en tout.

Je prends maintenant le premier iſoſcele, dont les côtés ſont 1, 1, & 2, & j'en fais un ſcalene, en lui donnant pour côtés 1, 2 & 3, enſuite 1, 2 & 4, 1, 2 & 5, &c. c'eſt-à-dire que je lui laiſſe toûjours deux côtés inégaux conſtans, & change le troiſieme, ce que je puis faire 8 fois ſur ce ſeul iſoſcele, & par conſéquent 8 fois auſſi ſur chacun des autres 9 iſoſceles, & par conſéquent les 90 iſoſceles me donnent 720 ſcalenes.

Ce nombre des ſcalenes eſt le produit de 10, 9 & 8, ou 10; 10 moins 1, 10 moins 2, 10 étant le nombre de tous les équilatéraux, 9 le nombre des iſoſceles que j'ai formés ſur chaque équilatéral, 8 le nombre des ſcalenes que j'ai formés ſur chaque iſoſcele.

La ſomme de tous les triangles poſſibles dans ma ſuppoſition eſt celle de 10, 90 & 720.

Je raiſonnerai de même ſi je ſuppoſe qu'il n'y ait que 20 équilatéraux poſſibles. Le nombre des ſcalenes ſera le produit des trois nombres 20, 19 & 18.

Mais ſi je conçois que le nombre des équilatéraux eſt un infini du 1er ordre, comme il l'eſt réellement, alors le nombre des ſcalenes eſt le produit de trois nombres, qui ſont, l'infini, l'infini moins 1, l'infini moins 2, c'eſt-à-dire, trois infinis égaux, & il eſt un infini du 3me ordre. Et ce nombre des ſcalenes eſt la ſomme de tous les triangles poſſibles, équilatéraux, iſoſceles & ſcalenes ; car la ſomme des équilatéraux ne ſera qu'un infini du 1er ordre, celle des iſoſceles un infini du 2^{d}, & toutes deux ſeront nulles par rapport à la ſomme des ſcalenes.

Puiſque j'ai tous les triangles qui ſont poſſibles par la variation de la grandeur de leurs côtés, & du rapport de leurs côtés entr'eux, j'ai en même-temps tous les triangles qui

ſont poſſibles par la variation de leurs angles ; car le rapport des côtés étant déterminé, celui des angles l'eſt auſſi.

L'infini qui exprime le nombre de tous les triangles poſſibles par la variation de leurs côtés eſt du 2me ordre, c'eſt-à-dire que ſon expoſant 3 eſt égal au nombre de toutes les eſpeces poſſibles de triangles pris par rapport à leurs côtés; car il faut ou que leurs trois côtés ſoient égaux, ou que deux ſeulement le ſoient, ou que tous trois ſoient inégaux. Donc pour avoir auſſi le nombre de tous les quadrilatéres poſſibles pris par rapport à leurs côtés, il faut voir combien il y en a d'eſpeces, & ce nombre ſera un infini dont l'expoſant ſera égal au nombre de ces eſpeces. Or il ne peut y avoir que celles-ci. 1re eſpece. Les quatre côtés égaux. 2de. Trois côtés égaux, & un inégal. 3me. Deux côtés égaux, & deux autres égaux auſſi, mais différens des premiers. 4me. Deux côtés égaux, & deux inégaux. 5me. Quatre côtés inégaux. L'infini des quadrilateres eſt donc du 5me ordre, à ne conſidérer que leurs côtés.

Mais la détermination des côtés n'emporte pas celle des angles dans les quadrilateres comme dans les triangles ; & ſi l'on conſidere les angles des quadrilateres, leur infini doit s'élever d'ordre. La 1re eſpece où les quatre côtés ſont égaux, comprend également les quarrés dont tous les quatre angles ſont droits, & les rhombes qui n'en ont aucun droit. Un quarré étant déterminé de grandeur, il peut y avoir une infinité de rhombes qui auront les mêmes côtés, & par conſéquent le nombre des quadrilateres de la 1re eſpece eſt un infini du 2^{d} ordre. De même la 3me eſpece où ſont deux côtés égaux, & deux autres égaux différens, comprend tous les parallélogrammes rectangles, & tous les rhomboïdes, & pour chaque parallélogramme rectangle il peut y avoir une infinité de rhomboïdes. Cet infini eſt donc encore un infini du 2^{d} ordre. Pour les trois autres eſpeces, on verra aiſément que l'infini de chacune n'eſt qu'un infini ſimple ou du 1er ordre. Donc il faut ajoûter 2 à l'expoſant de l'infini total déja trouvé, & le nombre de tous les quadrilateres poſſibles, tant

par

par rapport à la variation de leurs côtés qu'à celle de leurs angles, sera un infini du 7me ordre.

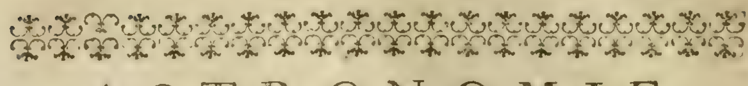
On pourroit appliquer cette théorie aux polygones suivans, au pentagone, à l'exagone, &c. & peut-être trouveroit-on quelque progression réglée entre les exposans croissans des infinis des différents polygones consécutifs. Mais on s'en est épargné la peine, parce qu'on ne voit pas qu'il en dût résulter rien d'assez intéressant. Ceci n'est que pour donner une idée de ce que M. Saulmon appelle l'universalité des figures, & non pas même pour en donner une de sa théorie, qui étoit assez différente.

NOus renvoyons entierement aux Mémoires

L'écrit de M. de Beaufort sur une proposition élémentaire sur les triangles. V. les M. p. 79.

Et les dernieres remarques de M. Saurin sur un cas singulier du problème des tangentes. V. les M. p. 222.





ASTRONOMIE.

SUR L'APOGE'E ET LE PERIGE'E, ou l'Aphélie & le Perihélie des Planetes.

V. les M. p. 143.

TOUS les corps céleſtes de notre monde, ou tourbillon ſolaire, font des révolutions en ligne courbe autour d'un point ; & comme les courbes qu'ils décrivent ne ſont point exactement des cercles, & quelquefois en ſont aſſez éloignées, & que ces points auxquels leurs mouvements ſe rapportent ne ſont point des centres de cercles, il arrive néceſſairement qu'ils en ſont inégalement éloignés en différentes parties de leur révolution. S'ils tournoient tous autour de la terre, comme l'ont crû les premiers aſtronomes, le point où ils en ſeroient les plus éloignés s'appelleroit *Apogée*, & le point oppoſé *Perigée :* mais maintenant que l'on ſçait, car comment ſe défendre du ſyſtème de Copernic ? que toutes les planetes principales tournent autour du ſoleil, il faut appeller *Aphélie* & *Perihélie*, ce qu'on eût appellé apogée & périgée. Cela n'empêche pas que ces planetes principales ne ſoient tantot dans leur plus grande, tantôt dans leur moindre diſtance de la terre, & qu'en ce ſens elles ne ſoient dans leur apogée & dans leur périgée : mais parce que leurs mouvemens ſe rapportent au ſoleil & non à la terre, ces apogées & ces périgées ſont en quelque ſorte des points accidentels dans leur cours, & non pas des points eſſentiels, tels que les aphélies & perihélies. Il n'y a que la lune, qui parce qu'elle tourne autour de la terre, a un apogée & un périgée proprement dit. Si l'on connoiſſoit aſſez exactement les mouvemens des lunes ou ſatellites de Jupiter & de Saturne pour y reconnoître leurs plus grandes & plus petites diſtances à

l'égard de leurs planetes principales, il faudroit faire de nouveaux mots pour exprimer ces points de leurs orbes. Quoique l'on soit persuadé que la terre se meut autour du soleil, on appelle toûjours apogée & périgée ce qui est réellement aphélie & perihélie : mais c'est par la même raison que l'on dit toûjours le lever & le coucher du soleil. Une erreur, qui a long-tems dominé, laisse toûjours des traces.

L'aphélie, ou l'apogée, car il suffit d'en parler, puisque le perihélie & le périgée leur sont toûjours diamétralement opposés, sont des points principaux dans les orbes des planetes, & dont la détermination influe sur toute la théorie de leurs mouvemens. M. Cassini a rassemblé sur une matiere si importante tout ce que les vûes des astronomes qui l'ont précédé, & les siennes propres, ont pû lui fournir de plus exact & de plus facile dans la pratique.

Il faut prendre l'aphélie ou l'apogée par rapport au point autour duquel la planete se meut réellement. Il faut donc prendre l'aphélie des planetes principales par rapport au soleil, c'est-à-dire, déterminer dans quel lieu du ciel est l'aphélie de ces planetes dont le mouvement seroit vû du soleil, où nous ne sommes pas. Si nous y étions, nous les verrions toûjours dans leurs lieux *vrais*, nous verrions les inégalités *vraies* de leur mouvement, & quand nous aurions par observation deux parties ou arcs de leur orbe éloignés l'un de l'autre où leur mouvement seroit égal, nous serions sûrs que le point précis du milieu seroit celui de l'aphélie, ou répondroit à son lieu vrai dans le Ciel, car de part & d'autre de l'aphélie ou de l'apogée, à distances égales, le mouvement est égal. Mais de la terre nous ne voyons point les planetes dans leurs lieux vrais, à moins qu'elles ne soient sur la même ligne droite que le soleil & la terre, auquel cas nous les voyons dans le même lieu où elles sont vûes du soleil. Ce cas ne peut arriver que quand elles sont en conjonction ou en opposition.

Les planetes inférieures, Mercure & Venus, ne sont proprement qu'en conjonction, mais elles ont deux sortes de conjonction : l'une *supérieure*, quand elles passent derriere le

ſoleil qui eſt entr'elles & nous, l'autre *inférieure*, quand elles paſſent entre le ſoleil & nous. Dans la ſupérieure, ſi elles paſſent préciſément derriere le ſoleil, elles nous ſont abſolument cachées, & ſi elles ont une latitude plus grande que le demi-diametre du ſoleil, ou, ce qui eſt le même, qu'elles ſoient au-deſſus ou au-deſſous de cet aſtre à quelque diſtance, comme elles ſont alors dans leur plus grand éloignement de la terre, elles ſont toutes deux trop petites pour être vûes par la lunette. Dans la conjonction inférieure, ſi elles paſſent ſur le diſque du ſoleil, on les y verra comme des taches, mais cela eſt très-rare ; le plus ſouvent elles ont une latitude plus grande que le demi-diametre du ſoleil, & en ſont à quelque diſtance au-deſſus ou au-deſſous : mais alors Mercure eſt trop petit pour être vû, & il n'y a que Venus qu'on puiſſe appercevoir. Il eſt donc très-rare de voir de la terre les deux Panetes inférieures dans leur lieu vrai.

A l'égard des planetes ſupérieures Mars, Jupiter & Saturne, on ne les voit point dans leurs conjonctions, parce qu'alors elles ſont ou immédiatement derriere le ſoleil, ou ſi proches de lui, qu'elles ſont abſorbées dans ſa lumiere, & d'ailleurs elles ſont alors dans leur plus grande diſtance de la terre. Elles ſont très-viſibles dans leurs oppoſitions, qui arrivent au milieu de la nuit, & où elles ſont dans leur plus grande proximité de la terre : mais à peine chacune d'elles eſt en oppoſition une fois par an.

On n'a donc que peu d'obſervations des lieux vrais des planetes, qui ſont cependant les fondemens néceſſaires de la détermination des aphélies.

Quant au ſoleil & à la lune, nous avons toûjours par obſervation leurs lieux vrais, puiſque le ſoleil eſt le point où ſe rapporte le mouvement de la terre, & que la terre eſt celui où ſe rapporte le mouvement de la lune.

Il faut pourtant remarquer que la lune moins réguliere que tous les autres corps celeſtes connus, peut-être, comme nous l'avons quelquefois inſinué, parce que nous la voyons de plus près, n'a pas toûjours un mouvement égal à diſtances

égales de son apogée. Elle est sujette à certains écarts, non pas tout-à-fait imprévûs *, mais qui suffiroient pour rendre fautif un calcul où l'on auroit supposé un orbe plus exact. Elle n'a de régularité sûre que dans ses conjonctions ou oppositions, & ce n'est qu'en ces temps-là qu'il faut compter que les points observés de son cours appartiennent à une même courbe uniforme.

* V. l'Hist. de 1702. p. 75. & suiv. 2de Edit.

C'est donc une méthode générale pour la détermination des aphélies ou apogées des planetes, que d'avoir des observations de leurs lieux vrais en assez grand nombre pour y pouvoir choisir deux temps égaux, pendant lesquels le mouvement d'un lieu vrai à un autre ait été égal.

Si l'on n'a pas assez d'observations pour y trouver le mouvement vrai égal pendant deux différens espaces de temps égaux, on y peut suppléer ainsi. On ne laisse pas de déterminer l'aphelie ou apogée tel qu'il seroit si le mouvement vrai avoit été égal, il est certain que cet aphelie ou apogée est mal placé à proportion de ce que le mouvement a été plus inégal dans les deux temps. On prend ensuite un troisieme espace de temps égal aux deux premiers, & qui comprenne l'un ou l'autre presque entier, pendant lequel le mouvement ait été encore ou plus grand ou plus petit, & par le moyen de ce troisieme espace de temps comparé à l'un des deux premiers, on fait une seconde détermination fausse de l'aphélie ou apogée. Mais entre les deux lieux faux où on l'a placé, se trouve celui où il est réellement, & on le détermine par la différence des deux lieux faux, dont on prend une partie proportionelle aux différentes inégalités de mouvement qu'on a employées. C'est une regle de fausse position appliquée à cette matiere.

Cette méthode, quoique générale dans la théorie, ne peut guere être d'usage que pour le soleil, à cause du grand nombre de lieux vrais qu'il faut avoir par observation ; nous allons donner quelque idée d'une autre aussi générale, & qui peut être employée dans la pratique pour toutes les planetes, qui ne demande absolument que trois observations: mais

aussi qui suppose une connoissance de plus que la premiere.

Tous les astronomes conviennent aujourd'hui que toutes les planetes principales décrivent autour du soleil, & la lune autour de la terre une ellipse, que le soleil est un des foyers des ellipses des planetes; & la terre un des foyers de l'ellipse de la lune. L'aphélie de chaque planete est l'extrémité de son grand axe la plus éloignée du foyer où est le soleil, & le perihélie l'autre extrémité; il en va de même de l'apogée & du périgée de la lune.

Chaque ellipse est différente d'une autre, c'est-à-dire que le rapport du grand axe au petit y est différent, ce qui n'empêche nullement que le soleil ne soit un foyer commun aux ellipses de toutes les planetes principales. Plus dans une ellipse le rapport du grand axe au petit est grand, plus l'ellipse est différente d'un cercle, & plus le mouvement qui se fait sur cette ellipse est différent de celui qui se feroit en même temps sur un cercle correspondant, c'est-à-dire que le mouvement sur un cercle étant uniforme, & faisant parcourir des espaces égaux en temps égaux, celui qui se feroit sur l'ellipse ne le seroit pas, & seroit d'autant plus éloigné de l'être que cette ellipse seroit plus différente du cercle. Le mouvement de la planete sur son ellipse est son mouvement *vrai*, & celui qu'elle auroit sur un cercle correspondant est le *moyen*. Celui-ci est toûjours égal, & l'autre inégal.

Il suit de-là que selon la différente espece de chaque ellipse, le mouvement vrai y est plus ou moins inégal par rapport au moyen; & réciproquement que le différent rapport du mouvement vrai au moyen doit déterminer la différente espece de chaque ellipse. Or l'espece d'une ellipse étant déterminée, on a le rapport de son grand & de son petit axe, & les deux extrémités de son grand axe qui passe nécessairement par le soleil sont l'aphélie & le perihélie de la planete.

On a toûjours le mouvement moyen d'une planete. Il faut avoir par trois observations trois de ses lieux vrais, ce qui donne le rapport de deux portions du mouvement vrai au moyen fait en même temps. Par-là on détermine sur l'orbe

de la planete trois points qui doivent appartenir à une ellipſe, & comme la poſition de ces trois points entr'eux comparée à celle qu'auroient les trois points correſpondants du mouvement moyen dépend du rapport de ces deux mouvemens, elle ſuffit pour déterminer la nature de l'ellipſe. Cela ne laiſſe pas de demander une conſtruction géométrique aſſez compliquée, & aſſez fine. Feu M. Caſſini a été le premier qui a imaginé cette méthode. C'eſt ce problème dont nous avons parlé dans ſon éloge en 1712 *, que les plus grands mathématiciens jugeoient impoſſible, & qu'il reſolut à 26 ans. * p. 86.

Il y a deux manieres de prendre le mouvement moyen des planetes, en ſuppoſant qu'elles décrivent des ellipſes. L'une eſt celle de Kepler qui diviſe l'ellipſe en ſecteurs égaux terminés par des arcs inégaux, deſorte que les aires des ſecteurs repréſentent le mouvement moyen, & les arcs le vrai. L'autre conſiſte à décrire un cercle autour du foyer où le ſoleil n'eſt pas. Nous les avons expliquées toutes deux en 1710 *. M. Caſſini donne la méthode de les employer l'une & l'autre dans la recherche des aphélies par le rapport du mouvement vrai au moyen. Elles produiſent quelque différence, mais legere, dans le lieu de l'aphélie. Les aſtronomes ſont bien perſuadés qu'il ne faut pas s'attendre ſur ce point à une auſſi grande préciſion que ſur quelques autres. Comme de ces deux manieres celle de Kepler eſt la plus conforme à la Phyſique, ainſi que nous l'avons dit en 1710, il ſemble qu'elle mérite la préference, & qu'il vaut mieux s'en tenir aux aphélies qu'elle donne. Du moins elle eſt plus ſûre, ſelon M. Caſſini, pour les planetes dont l'ellipſe eſt plus différente d'un cercle, telles que Mars & Mercure. M. Caſſini donne dans cette hypotheſe une méthode nouvelle. * p. 106. & 107.

Aux méthodes générales ſe joint à l'égard du ſoleil & de la lune une méthode particuliere qui n'a lieu que pour eux, fondée ſur la variation de leur diametre apparent. Il eſt bien certain que quand il eſt le plus petit, ils ſont dans leur plus grand éloignement de la terre, ou dans leur apogée. Pour toutes les autres planetes, leur diametre apparent ne varie

pas assez sensiblement pour donner prise, & on ne distingueroit pas assez les degrés successifs de sa variation.

On voit assez que ce qui a été fait à l'égard de deux mouvemens vrais égaux en deux temps égaux pour une planete quelconque, il faudra le faire ici pour le soleil & pour la lune à l'égard de deux diametres apparens égaux ; & quand on les aura eus par observation, trouver les lieux vrais où étoit alors l'une ou l'autre planete, & prendre le point du milieu de cet intervalle, qui sera le lieu vrai de l'apogée.

Si les deux diametres égaux du soleil sont ceux qu'il a eus à deux différentes hauteurs méridiennes, il faut ne les compter pour égaux qu'après qu'ils auront été corrigés selon la réfraction & la parallaxe dûe à chaque hauteur. Mais s'ils sont pris à des heures où le soleil ait été à la même hauteur sur l'horison, il n'y aura plus de correction à faire pour la réfraction ni pour la parallaxe qui auront été égales de part & d'autre, puisque toutes deux ne varient que par rapport aux différentes hauteurs horisontales.

On ne peut avoir de diametre apparent de la lune que dans l'opposition, puisqu'il n'est entier qu'en ce temps-là. Quand on ne laisse pas de voir la partie obscure du disque de la lune aussi-bien que celle qui est éclairée, on n'a pas pour cela le diametre total, parce que la partie éclairée diminue sensiblement par son éclat la grandeur apparente de l'obscure, & on ne sçait pas précisément de combien. D'ailleurs, comme il a été dit, le mouvement de la lune est trop peu régulier hors de ses conjonctions ou oppositions, & on pourroit se tromper sur ses lieux vrais, qu'il faut pourtant avoir dans une grande justesse pour la détermination de l'apogée.

Il pourroit sembler que jusqu'ici nous avons laissé incertain si c'étoit un apogée ou un périgée, un aphélie ou un perihelie que l'on déterminoit, car ils se trouvent également l'un & l'autre entre deux mouvemens égaux ou entre deux diametres égaux. Mais le doute ne peut pas subsister longtemps, il ne faut que voir si les mouvemens ou les diametres alloient en augmentant de grandeur, en ce cas c'est sûrement

un

un apogée ou un aphélie qu'on a trouvé entr'eux, & au contraire. D'ailleurs on sçait déja, du moins à peu près, quels sont les lieux de tous les apogées ou aphélies, & c'est de part & d'autre de ces lieux-là qu'on cherche des mouvemens ou des diametres égaux. Il ne s'agit presque que de vérifier, ou de déterminer plus précisément; & plus l'Astronomie se perfectionne, plus elle a de peine à se satisfaire sur ce point.

SUR UNE COMETE.

DEPUIS 1707 on n'avoit point observé de comete, à l'exception d'une qui ne fut vûe qu'à Berlin aux mois de Janvier & de Février 1718. Cette année on apperçut à l'Observatoire une comete le 18 Octobre dans la constellation du Capricorne, & on ne put la suivre que jusqu'au 5 Novembre. Il seroit bon de se rappeller ici tout ce qui a été dit sur le sujet des cometes dans les Hist. de 1699 *, 1702 *, 1706 *, 1707 * & 1708.

V. les M. p. 250.

* p. 72. & suiv.
* p. 65. & suiv. 2de Edit.
* p. 104. & suiv.
* p. 103 & suiv.
* p. 97. & suiv.

La comete vûe avec une lunette de 16 pieds, avoit dans son milieu une lumiere blanchâtre & assez claire, le reste étoit une grande chevelure ou nébulosité, toûjours moins éclatante & moins dense à mesure qu'elle s'éloignoit de la tête de la comete, confuse & mal terminée vers ses bords & à sa circonférence extérieure. Une observation heureuse & singuliere apprit à M. Maraldi que cette nébulosité ou atmosphere lumineuse étoit & fort transparente & fort grande par rapport au corps solide de la comete; car il vit au travers de cette atmosphere une petite étoile fixe, & la vit presque jusqu'à ce qu'elle en eût touché le centre.

Par les observations de 18 jours, & par la theorie de feu M. Cassini, expliquée dans les volumes cités, M. Maraldi trouva que la comete alloit du Midi au Septentrion, décrivant assez exactement un grand cercle qui coupoit l'Eclipti-

que au 8me degré d'Aquarius, & en déclinoit de 15 degrés vers l'Occident, que le 14 Octobre elle avoit dû passer par son périgée, qui se trouvoit entre la constellation du phenix, & la fixe appellée *Canopus*; que comme cette partie du ciel, qui est dans l'hemisphere austral, est invisible sur notre horison, la comete dans son périgée, & avant que d'y arriver, n'avoit pû être vûe, qu'elle n'avoit pû l'être que le 17 Octobre, où le temps fut couvert; qu'à son périgée son mouvement étoit de plus de 17 degrés en 24 heures, que le 5 Novembre où l'on cessa de la voir, tant à cause des nuages, que du clair de lune, son mouvement n'étoit plus que d'un tiers de degré, 50 fois moindre qu'au périgée.

Si les cometes étoient d'autant plus proches de la terre, que leur mouvement dans le périgée seroit plus grand, celle-ci seroit une des plus proches qu'on ait observées, depuis qu'on a appris à les bien observer. On n'en connoitroit guere qui eût passé plus près qu'elle de la terre, que celle de 1472 dont nous avons parlé en 1708, & à qui l'on donne un mouvement de 40 degrés par jour: mais on ne la compte pas à cet égard pour bien sûre. Cette conséquence d'un plus grand mouvement à une plus grande proximité n'est pas légitime pour les cometes, comme elle peut l'être pour les planetes. Le mouvement des cometes ne paroit nullement se rapporter à la terre. Il est déja assez surprenant & assez peu conforme au systême commun des cometes que l'on ait trouvé par la parallaxe la seconde comete de 1702, cinq fois seulement plus éloignée de la terre que la lune: celle-ci en seroit au contraire plus proche; car la lune ne fait que 13 degrés par jour.

Il n'y auroit que la parallaxe qui pût donner sûrement la distance d'une comete. Pour cela il faudroit suivre la méthode inventée par feu M. Cassini, & expliquée en 1706 * sur la recherche de la parallaxe de Mars, c'est-à-dire, comparer au mouvement d'une étoile fixe pendant une nuit assez longue le mouvement de la comete, comme il y comparoit celui

* p. 100.

de Mars. Cela demande abſolument que Mars ou la comete ſe meuvent aſſez long-temps dans un même cercle parallele à l'équateur que la fixe ; autrement leur mouvement ne pourroit ſe comparer à celui de la fixe par rapport à l'horiſon, ainſi qu'il eſt néceſſaire pour découvrir une parallaxe. Mars dont le mouvement propre eſt ſelon le Zodiaque & à peu-près ſelon l'écliptique : peut bien décrire pendant une nuit un parallele à l'équateur ; mais la comete de cette année n'en pouvoit pas décrire un, puiſque, comme on l'a vû, ſon mouvement coupoit l'écliptique. C'eſt ce qui a empêché M. Maraldi de pouvoir déterminer, ou même rechercher ſa parallaxe.

On verra qu'elle a avec celle de 1707 quelques conformités qui pourroient la faire prendre pour la même comete revenue au bout de 16 ans. L'une & l'autre alloit du midi au ſeptentrion, elles ont coupé l'écliptique, ou, ce qui eſt le même, ont eu leur nœud à 2 degrés près l'une de l'autre. D'un autre côté elles ne s'accordent pas ſur des points eſſentiels. Leurs orbites ont été différemment inclinées à l'écliptique ; il eſt vrai que cette différence n'eſt pas plus grande que celle qu'on eſt obligé d'admettre dans la même orbite de la lune. Mais ce qu'on ne peut paſſer, c'eſt leur différence de mouvement au périgée, celle de 1707 n'y avoit que 10 degrés par jour. Ce n'eſt pas, comme nous l'avons dit ailleurs, que ces différences empêchent abſolument que deux cometes ne ſoient la même : mais elles ſuffiſent pour nous empêcher d'aſſûrer qu'elles ſoient la même. Les ſyſtèmes iroient bien vîte, ſi nous voulions nous en croire, & un des plus grands efforts de l'eſprit philoſophique eſt d'attendre pour les établir que l'on ait aſſez de fondemens.

SUR LA CONJONCTION DE MERCURE *avec le Soleil, du 9 Novembre.*

V. les M. pag. 105. 259. 285. & 306. LE mouvement de Mercure eſt difficile à connoître, & en effet peu ſûrement connu juſqu'ici. Nous en avons parlé aſſez au long en 1706 * & 1707 *.

* p. 106. & ſuiv.

* p. 83. & ſuiv.

On n'a pû voir que depuis l'invention des lunettes les conjonctions de Mercure avec le ſoleil dans la partie inférieure de ſon orbite, lorſque Mercure a aſſez peu de latitude pour paſſer dans le diſque du ſoleil, rencontres où il eſt le plus aiſé de déterminer les lieux vrais de cette Planete, parce qu'ils ſont alors les mêmes que ceux du ſoleil: mais de ces conjonctions on n'en a eu que ſix dans le ſiecle paſſé. Pluſieurs Aſtronomes en eſpéroient ou en faiſoient eſperer par leurs Tables une 7me à Paris le 5 Mai 1707, comme il a été dit dans l'hiſt. de cette année-là. Mais il n'y en eut point, & pas même apparemment pendant la nuit. Mercure eut trop de latitude, & il ne paſſa point dans le ſoleil.

Cette 7me conjonction viſible, ou ce 7me paſſage de Mercure dans le ſoleil, on l'eſpéra encore à Paris en 1720, ſoit le 7 Mai après midi, ſoit le 8 au matin, ſoit en tout, ſoit en partie; car les différentes tables varioient aſſez conſidérablement; ce qui n'eſt pas étonnant à l'égard de cette planete: mais il n'y eut point encore de paſſage, du moins le jour; & dans pluſieurs lieux de l'Allemagne, plus orientaux que Paris, où par conſéquent on pouvoit plûtôt voir le ſoleil, & où il y a d'habiles obſervateurs, on ne vit rien non plus, quoique le Ciel fût favorable.

On ſe tint plus ſûr d'avoir enfin une conjonction viſible le 9 Novembre de cette année, parce que les tables s'accordoient à y donner peu de latitude à Mercure. M. Deliſle le cadet calcula au mois de Juin par les tables de M. de la Hire, qu'à Paris Mercure devoit être en conjonction à 5^h $30' 20''$ après-midi.

Il ſera bon de donner quelque idée de la maniere particuliere dont M. Deliſle ſe prit à faire ce calcul, & pour cela d'expliquer plus préciſément ce que c'eſt, que la conjonction dont il s'agit.

Comme la terre ſe meut autour du ſoleil dans le plan de l'écliptique, d'où ſon centre & celui du ſoleil ne ſortent jamais; c'eſt à ce plan que tout doit ſe rapporter. Si Mercure, dont l'orbite autour du ſoleil eſt différente de l'écliptique, mais la coupe en deux points oppoſés, qui ſont ſes nœuds, ſe trouvoit dans un nœud, & de plus placé de telle ſorte que ſon centre fût ſur la même ligne droite que ceux de la terre & du ſoleil, on verroit de la terre Mercure au centre du diſque du ſoleil, & ce ſeroit la conjonction la plus parfaite qu'il ſoit poſſible.

On ſçait que les longitudes & les latitudes ſont par rapport à l'écliptique ce que ſont par rapport à l'équateur les aſcenſions droites, & les déclinaiſons. Mercure dans chacune de ſes révolutions a deux conjonctions en longitude avec le ſoleil, ou ſe trouve deux fois dans le même cercle de longitude que lui; l'une dans la partie ſupérieure de ſon orbite, l'autre dans l'inferieure. Ce n'eſt que dans l'inferieure que ſa conjonction nous peut être viſible; & afin qu'elle le ſoit, il faut qu'il paſſe par le diſque du ſoleil. S'il ne faiſoit que le toucher, il s'en faudroit tout le demi-diametre du ſoleil qu'il ne fût en conjonction avec le ſoleil de la maniere dont on l'entend ici. Or Mercure peut avoir juſqu'à 5 degrés de latitude, ou s'éloigner de cette quantité du centre du ſoleil, & le demi-diametre du ſoleil n'a que $\frac{1}{4}$ de degré, il doit donc arriver le plus ordinairement que Mercure ne paſſe point dans le diſque du ſoleil, ou ne ſoit point en conjonction avec lui, quoique conjoint en longitude dans la partie inférieure de ſon orbite.

Les cercles de longitude, ou ceux par leſquels paſſe ſucceſſivement Mercure ſelon ſon mouvement en longitude, étant conçûs menés par tous les degrés de l'écliptique & par ſes poles, les longitudes *vraies* de Mercure ſont déterminées

par ceux de ces cercles où il feroit vû, étant vû du centre du foleil : mais étant vû de la terre, fes longitudes *apparentes* ne font pas les mêmes que les vraies, parce que le point de vûe eft changé. On veut calculer une conjonction en longitude qui fera vûe de la terre, & par conféquent il faut avoir les longitudes apparentes de Mercure. Les tables aftronomiques ne donnent que les vraies ; il faut donc réduire ces vraies en apparentes. M. Delifle évita le travail & même le péril de cette réduction ; car plus on calcule, plus il y a de péril d'erreur, en s'imaginant un fpectateur placé dans le foleil, d'où il verroit Mercure paffer vis-à-vis le difque de la terre fuppofée immobile ; car il eft certain que le moment où Mercure fera conjoint en longitude avec le centre de la terre, fera le même que celui où Mercure vû de la terre feroit vû conjoint en longitude avec le centre du foleil, ou fur le même cercle de longitude. C'eft ce moment qui doit arriver à 5 h 30′ 20″.

Les tables donnent pour ce même moment la latitude de mercure, c'eft-à-dire, fon éloignement à l'écliptique ou au centre de la terre, fur le difque de laquelle il eft vû. On a donc la diftance du centre de Mercure & du centre de la terre fur le cercle de longitude, perpendiculaire à l'écliptique où ils font alors tous deux. Comme on voit par les mêmes tables que la latitude de Mercure eft alors feptentrionale & croiffante, on voit qu'il a paffé fon nœud afcendant, où ce nœud eft fitué, à quelle diftance il eft du cercle de longitude où fe fait la conjonction, quelle eft l'inclinaifon de l'orbite de Mercure fur l'écliptique ; & par-là on décrit la route de Mercure fur le difque de la terre. Une perpendiculaire tirée du centre de ce difque fur la route de Mercure, détermine le point où il eft le plus proche du centre de la terre. Enfuite M. Delifle ayant auffi trouvé par les tables quel eft alors le mouvement horaire de Mercure, détermine en quel temps il doit décrire les portions de cette route, dont on a befoin. Il devoit arriver à 5 h 23′ 48″ au point de fa plus proche diftance au centre de la terre, & par

conſéquent avant ſa conjonction ; car quand une conjonction ne peut être qu'en longitude, une moindre latitude, qui la précede ou la ſuit, n'y eſt point à conſidérer, & n'entre point dans l'idée de conjonction.

Il faut remarquer que dans la ſuppoſition préſente, où la terre eſt immobile, & où par conſéquent le ſoleil ſe meut auſſi-bien que Mercure, le mouvement horaire apparent de Mercure eſt compoſé de ſon mouvement vrai & de celui du ſoleil à l'égard du ſpectateur que nous avons placé dans le ſoleil ; de ſorte que ſi Mercure & le ſoleil vont du même ſens, le mouvement horaire apparent de Mercure, qui eſt celui dont on a beſoin, en eſt plus petit, & on l'aura en retranchant de ſon mouvement vrai trouvé par les tables, celui du ſoleil. Ce ſera le contraire pour le cas oppoſé. Or nous ſommes ici dans le 1er cas ; Mercure qui dans ſa conjonction inferieure eſt *retrograde* à l'égard de la terre, ou va d'orient en occident, eſt *direct* à l'égard du ſoleil, & va toûjours d'occident en orient, & le ſoleil, à qui l'on donne le mouvement de la terre, doit être conçû avec cette même direction de mouvement.

Si l'on veut reprendre la réalité, c'eſt-à-dire, remettre le ſpectateur ſur la terre, il eſt clair qu'il n'y aura rien de changé pour l'heure de la conjonction, pour la route de Mercure ſur le diſque du ſoleil, pour ſa plus petite diſtance à l'égard du centre du ſoleil, pour l'heure où il ſera à cette plus petite diſtance. Mais il manque le tems de l'entrée de Mercure dans le diſque du ſoleil, & celui de ſa ſortie, & on ne les peut avoir immédiatement par l'entrée de Mercure ſur le diſque de la terre, & ſa ſortie, parce que le diſque de la terre & celui du ſoleil ſont différens en grandeur. Voici comment M. Deliſle ſuppléoit à cela.

Si l'on conçoit des rayons tirés de tous les points de la circonference du ſoleil au centre de la terre, il ſe formera un cone de lumiere dont l'angle du ſommet aura pour baſe ou pour meſure le diametre du ſoleil, que l'on connoît pour chaque moment, & l'axe ſera la diſtance connue de la terre

au soleil. Quand Mercure entre dans ce cone, il en intercepte quelques rayons, & c'est là le moment où il sera vû de la terre éclipser une petite partie du soleil, ou, ce qui est le même, entrer dans le disque du soleil. Pour déterminer ce moment, il faut sçavoir à quel point du cone Mercure y entrera, & ce point dépend de la distance où Mercure est alors de la terre qui est au sommet du cone, & du soleil qui est à la base. Or ces deux distances sont connues par les tables. M. Delisle détermina par cette voie que Mercure vû de la terre, entreroit dans le soleil à $2^h\ 45'\ 38''$ après midi, & qu'il en sortiroit à $8^h\ 1'\ 58''$, & par conséquent son passage qui devoit être à peu près de $5^h \frac{1}{4}$, ne pouvoit être visible que pendant moins de 2^h.

La fiction ou supposition de ce cone ne changeoit rien à la premiere supposition que M. Delisle avoit faite du spectateur placé dans le soleil; car si ce cone eût été visible, ce spectateur eût vû Mercure y entrer dans le même moment où la terre l'eût vû entrer dans le soleil.

Selon M. Halley, fameux astronome Anglois, qui avoit calculé cette conjonction en 1691, Mercure devoit entrer dans le soleil à Paris un peu plus tard que par le calcul de M. Delisle, encore plus tard selon les éphémerides de M. Manfredi, celebre Astronome Italien. Selon M. Manfredi il devoit avoir plus de latitude, encore plus, selon M. Halley. Pour les trois différentes routes déterminées par ces deux Astronomes, & par les tables de M. de la Hire, elles étoient assez exactement paralleles.

Le 9 Novembre arriva, & le tems fut favorable. Mrs Cassini, Maraldi & Delisle observerent la conjonction. Nous parlerons d'abord des observations des deux premiers, qui furent faites ensemble.

Ils considererent Mercure àchaque moment comme une tache fixe dont il faudroit déterminer par observation l'ascension droite & la déclinaison à l'égard du centre du soleil. De cette ascension droite & de cette déclinaison on tire la longitude & la latitude. Une suite de plusieurs longitudes &

& latitudes de Mercure par rapport au centre du ſoleil, ainſi concluës pour pluſieurs momens, ſont une ſuite de points de la route de Mercure dans le ſoleil, ou, ce qui eſt le même, de ſon orbite par rapport à l'écliptique. Reſte donc à ſçavoir comment on prendroit dans un moment quelconque l'aſcenſion droite & la déclinaiſon d'une tache fixe par rapport au centre du ſoleil.

Dans le foyer commun de l'objectif & de l'oculaire d'une lunette, il y a quatre fils qui ſe croiſent dans l'axe de la lunette, un horiſontal, un vertical, & deux obliques qui font, tant avec l'horiſontal qu'avec le vertical, un angle de 45 degrés. On poſe la lunette ſur la machine *parallactique*, dont il ſuffira de dire que la lunette qui y eſt poſée ſuit toûjours, en ſe dirigeant à l'aſtre, le mouvement diurne de cet aſtre, ou, ce qui eſt le même, le parallele qu'il décrit.

Si le ſoleil eſt au meridien, & que l'on faſſe toucher ſon bord ſupérieur ou inférieur par le fil horiſontal, ce fil repréſente une tangente ou une très-petite portion du parallele que le bord touché décrit, & il eſt proprement horiſontal. Si à toute autre élevation du ſoleil, excepté le cas où il ſeroit à l'horiſon, on fait toucher ſon bord ſupérieur ou inférieur par ce même, il n'eſt plus horiſontal: mais il eſt toûjours une portion du parallele où eſt le bord touché, & le fil vertical toûjours perpendiculaire à ce fil, repréſente toûjours le meridien qui coupe ce parallele. Nous donnerons toûjours au fil nommé d'abord horiſontal le même nom, en ſouſentendant qu'il prend en un jour les poſitions de toutes les tangentes d'un parallele. C'eſt de cette façon que l'on ſuit toûjours le mouvement diurne d'un aſtre.

Si l'on diſpoſe la lunette de façon que les deux fils obliques ſoient deux tangentes du 1er bord du ſoleil, qui eſt l'occidental, ou plûtôt que la moitié de chacun de ces fils, la moitié ſupérieure de l'un, & l'inférieure de l'autre ſoient ces tangentes, il eſt clair que puiſque ces fils font chacun le même angle avec le fil vertical, le centre du ſoleil décrira la ligne exactement moyenne entre les deux fils, ou le fil

horiſontal. On aura par obſervation le tems qu'il employera à parcourir ce fil, par ce tems la quantité de degrés, ou plûtôt de minutes dont eſt ce fil, portion du cercle diurne que le ſoleil décrit alors. Si ce cercle eſt l'équateur, on a le diametre du ſoleil en parties de l'équateur, ce qui eſt ſa vraie meſure; ſi le cercle eſt un parallele, on en réduit les degrés ou minutes à des degrés ou minutes de l'équateur par une proportion très-connue.

Réciproquement ſi le centre du ſoleil décrit le fil horiſontal, ſes bords, lorſqu'ils ſont aux fils obliques, ſont touchés en même-tems par la moitié ſupérieure d'un de ces fils, & par l'inférieure de l'autre; & s'ils ne le ſont pas, le centre du ſoleil n'eſt point dans le fil horiſontal. Par la différence qui ſe trouve entre le tems où le même bord du ſoleil eſt touché par un fil oblique, & le tems où il l'eſt par l'autre, on voit combien il s'en faut que le centre du ſoleil ne ſoit dans le fil horiſontal, ou quelle eſt la diſtance de ce centre à ce fil, & on ſçait de quel côté eſt cette diſtance ſelon que le fil ſupérieur ou l'inférieur a été touché le premier.

La lunette étant diſpoſée de maniere que le centre du ſoleil parcourt le fil horiſontal, la moitié du tems qu'il emploie à le parcourir eſt le tems où il eſt arrivé à l'interſection des quatre fils; ou au centre de la lunette, ou au fil vertical. Si dans ce même moment une tache eſt arrivée auſſi à un autre point du fil vertical, il eſt clair que la diſtance de ce point au centre de la lunette eſt la différence de la déclinaiſon du centre du ſoleil, & de celle de la tache. Cette diſtance eſt une grandeur aiſée à connoitre, parce qu'on ſçait le rapport de grandeur du fil horiſontal, & par conſéquent de tous les autres au diametre du ſoleil. On a toûjours d'ailleurs par les Tables la déclinaiſon du ſoleil & par conſéquent celle de la tache. Si la tache n'eſt pas ſur le fil vertical dans le même moment que le centre du ſoleil, on voit en quel moment elle eſt arrivée à un fil oblique, la différence de ces deux momens étant convertie en minutes de cercle, on a la grandeur de la ligne tirée du point où la tache a rencontré

le fil oblique sur le fil vertical. A cause de l'angle de 45 degrés que font les obliques, cette ligne est égale à celle qui seroit prise sur le fil vertical, & mesureroit la différence de déclinaison entre la tache & le centre du soleil. On voit immédiatement de quel côté est cette différence, si elle est septentrionale ou méridionale.

Si l'on met la tache dans le centre de la lunette, le centre du soleil n'y viendra point, & par conséquent il y aura différence de déclinaison entre ce centre & la tache, à moins que quand un bord du soleil viendra à être touché par un fil oblique, il ne le soit en même-tems par l'autre. Si cela n'est pas, on verra qu'il y aura différence de déclinaison, & quelle elle sera, & de quel côté.

Quant à la différence entre l'ascension droite du soleil toûjours connue & celle de la tache, elle se conclut de la différence entre le tems où le centre du soleil passe par le fil vertical, & le tems où la tache y passe; car ce fil représente une portion de méridien, & c'est pourquoi on l'appelle aussi *horaire*.

Par plusieurs observations de cette espece, dont chacune, comme il a été dit, donnoit un point de la route de Mercure dans le disque du soleil, cette route y ayant été tracée, on eut sa grandeur & son rapport au diametre du soleil, & l'on connut de quelle quantité étoit la portion que Mercure en parcouroit en une heure, ou son mouvement horaire apparent. L'écliptique ayant aussi été tracée sur le disque du soleil, selon la méthode expliquée en 1707 *, on eut l'inclinaison de la route ou de l'orbite de Mercure sur l'écliptique, telle qu'elle est vûe de la terre, & rapportée au soleil; car vûe du soleil, elle est différente.

* p. 106. & 107.

Il paroît assez qu'elle doit l'être à cause des deux différens points de vûe; mais il ne paroît pas de même que vûe de la terre, elle doive être plus grande; au contraire la terre étant plus éloignée de Mercure que Mercure ne l'est du soleil, on croiroit d'abord que l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur l'écliptique devroit paroître plus grande vûe du soleil, que

vûe de la terre. Mais il eſt vrai qu'elle peut paroître ou plus ou moins grande, & voici d'où cela vient. Le rapport du mouvement horaire de Mercure en longitude à ſon mouvevent horaire en latitude eſt ce qui détermine ſon inclinaiſon; car ces deux mouvemens ſont repréſentés par deux droites, qui avec une portion correſpondante de l'écliptique, font un triangle rectangle, puiſque la ligne de la latitude coupe toûjours l'écliptique à angles droits, & par conſéquent le rapport du mouvement en longitude au mouvement en latitude fait en même-tems, ou le rapport des deux lignes qui les repréſentent, détermine l'angle ſous lequel le mouvement total de Mercure compoſé des deux, coupe l'écliptique. Si le mouvement en latitude étoit nul, il n'y auroit point d'inclinaiſon du mouvement ou de l'orbite de Mercure ſur l'écliptique. Si le mouvement en latitude étoit égal au mouvement en longitude, l'orbite feroit inclinée ſur l'écliptique de 45 degrés. Mercure étant vû du ſoleil, on voit ſon mouvement vrai en longitude, & ſon mouvement vrai en latitude, & leur rapport détermine l'inclinaiſon vraie de l'orbite. Mais ſi Mercure eſt vû de la terre, les deux mouvemens ne paroiſſent plus les mêmes. Tous deux ſont changés, parce qu'étant vûs de plus loin, ils ſont vûs plus petits, & outre cela le mouvement en longitude eſt très-conſidérablement alteré dans les conjonctions, où Mercure étant dans la moitié inférieure de ſon orbite, eſt rétrograde, & beaucoup plus lent. Nous avons expliqué en 1709 * pourquoi les planetes ſont plus lentes dans leurs rétrogradations. Le rapport des deux mouvemens de Mercure vû de la terre étant changé, peut donc être plus grand, quoique les deux mouvemens ſoient en eux-mêmes plus petits : or il eſt effectivement plus grand, & par conſéquent l'inclinaiſon apparente de ſon orbite ſur l'écliptique plus grande que la vraie.

* p. 82. & ſuiv.

M. Caſſini conclut de ſes obſervations l'entrée de Mercure dans le ſoleil à $2^h\ 50'\ 30''$, ſa conjonction à $5^h\ 28'\ 56''$, ſa ſortie à $7^h\ 43'\ 14''$, ce qui differe très-peu des prédictions de M. Deliſle, & prouve beaucoup en faveur des tables de

M. de la Hire sur la moins connue de toutes les planetes. Nous passerons sous silence la détermination de l'inclinaison de son orbite du lieu de ses nœuds, &c. pour en venir à quelques remarques plus généralement intéressantes.

Le mouvement horaire moyen de Mercure vû du soleil est de 10′ 14″ selon M. de la Hire, & le vrai étoit alors de 12′ 46″. Vû de la terre pendant son passage par le soleil, il ne fut que de 6′ 4″. La raison en est la rétrogadation.

Quand Mercure entré dans le soleil en touchoit encore le bord oriental par où il étoit entré, & par conséquent avoit parcouru sur le disque du soleil un espace égal à son diametre apparent, M. Cassini observa en combien de tems il parcourroit encore un espace de la même longueur. Ce fut en 1′ 18″. Ce tems converti en minutes de degré, & de plus en minutes qui appartinssent au diametre du soleil, donna un espace de plus de 7″, qui étoit donc le diametre de Mercure vû de la terre.

On sçait que la parallaxe du soleil est de 10″ au plus ; ou, ce qui est le même, que le demi-diametre de la terre vû du soleil seroit de 10″, & par conséquent qu'une grandeur égale au diametre de la terre, vûe de la terre sur le soleil, seroit de 20″. Pour comparer à cette grandeur le diametre de mercure, il faut concevoir Mercure porté jusqu'à la distance de la terre où est le soleil, & alors son diametre apparent diminuera selon la raison qui est entre la distance de la terre à Mercure dans sa conjonction inférieure, & la distance de la terre au soleil. Si l'on prend ces distances selon la regle de Kepler, qui donne le rapport des distances aux révolutions, on trouvera que la distance de la terre au soleil étant 5, celle de Mercure dans sa conjonction inférieure est à peu-près 2 ; que par conséquent sa distance à la terre étoit 3, & que si à la distance 3 son diametre a été de 7″, il ne doit être que d'un peu plus de 4″ vû à la distance 5, c'est-à-dire à celle où est le soleil. Le diametre de Mercure ne seroit donc guere que la 5me partie de celui de la terre, & la terre seroit 125 fois plus grosse que Mercure. M. Cassini trouve par une autre

voie, mais sur le fondement de la même observation, que le diametre de Mercure n'est que 4 fois plus petit que celui de la terre, & alors Mercure est égal à la lune. Ce qui peut rapprocher les deux calculs, qui vû le sujet ne different pourtant pas beaucoup, c'est que les nombres 5 & 2 tirés de la regle de Kepler, ont été pris peu exacts pour la commodité.

Mercure fut toûjours vû fort noir, fort rond, bien terminé, & sans aucune nébulosité qui l'environnât. On en avoit soupçonné une dans une conjonction pareille observée en 1697 : mais cette année on n'en put absolument découvrir, même avec une lunette de 34 pieds. Il y a donc toute apparence que Mercure n'a point d'atmosphere. Puisque la notre augmente par sa densité l'impression de chaleur que nous portent les rayons du soleil, Mercure n'avoit pas besoin d'en avoir une.

M. Delisle observa d'une autre maniere ce même passage de Mercure dans le soleil. Il falloit que M[rs] Cassini & Maraldi changeassent souvent la position du fil horisontal de leurs lunettes, afin de lui faire toûjours suivre le parallele du soleil, & qu'ils le rendissent toûjours tangente d'un bord, ce qui emporte du tems par les fréquentes répétitions ; & le passage visible de Mercure devoit être assez court. Feu M. Cassini avoit pratiqué une autre méthode en 1697 pour un autre passage de Mercure qui devoit aussi durer peu, & il l'avoit choisie pour aller à l'épargne du tems. M. Delisle s'en servit, & voici en quoi elle consiste.

On laisse le fil horisontal de la lunette toûjours horisontal, & coupé à angles droits par le vertical, les obliques sont supprimés, ou n'ont point d'usage : mais on met deux horisontaux dont la distance peut changer, & est toûjours connue. Le fil horisontal représente donc toûjours ou l'horison, ou un petit cercle parallele à l'horison, qu'on appelle *Almicantarath*, & le vertical représente toûjours un azimuth. Les azimuths sont à l'égard de l'horison & des almicantaraths ce que sont les méridiens à l'égard de l'équateur & des paralleles, ils coupent l'horison & tous les almicantaraths à

angles droits, & concourent tous aux poles de l'horison, qui sont le zenith & le nadir. Par les temps du passage du centre du soleil & de Mercure, chacun par un même fil horisontal, & chacun par le fil vertical, on a la distance des almicantaraths & des azimuths où ils sont chacun. Or ils ne sont en différens almicantaraths & en différens azimuts que parce qu'ils sont en différens paralleles & en différens méridiens, ou, ce qui est le même, parce qu'ils ont différente déclinaison & différente ascension droite. On tire donc de-là leur déclinaison & leur ascension droite, & de-là enfin leur latitude & leur longitude.

Il est visible que cette méthode demande plus de calcul que l'autre, où la déclinaison & l'ascension droite se tirent immédiatement de l'observation : mais en récompense elle peut fournir dans un même temps un plus grand nombre d'observations, & par conséquent de points qui détermineront la route de Mercure dans le soleil.

Elle a encore cet avantage, que les réfractions n'y peuvent causer aucune erreur, & que l'on n'est pas obligé d'y avoir égard. On prend le centre du soleil & Mercure à la même hauteur horisontale, & par conséquent la réfraction les a également élevés, & la différence entre leurs hauteurs vraies est la même qu'entre les apparentes. Cela ne pourroit être autrement que dans le cas où il se seroit fait un changement subit de réfraction entre le passage d'un astre & celui de l'autre par le même fil horisontal : mais ce tems est trop court, & d'ailleurs on a observé que ces changemens soudains n'arrivent qu'au lever du soleil, & rarement. L'observation dont il s'agit fut faite le soir. Mrs Cassini & Maraldi ne compterent pas sur leurs dernieres observations, parce que les réfractions étoient alors trop grandes, & M. Delisle en vertu de la pratique qu'il suivoit, eut des observations du même-temps qu'il crut aussi sûres que les autres.

Pour la différence de parallaxe, qui appartient à deux astres, parce qu'ils sont différemment éloignés de la terre, cette méthode ne la sauve pas : mais elle ne pouvoit être que

si légere, que ce n'étoit guere la peine d'y avoir égard. Cependant pour plus de sûreté, M. Delisle supposa, selon les tables de M. de la Hire, que Mercure avoit 3″ de parallaxe plus que le soleil.

Pendant 1 h 40′ que M. Delisle put voir Mercure dans le soleil, il fit 52 observations, dont 26 déterminoient l'almicantarath de Mercure à l'égard du soleil, & les 26 autres son azimuth. Ce grand nombre de points ainsi déterminés dans la route de Mercure, devoit en augmenter la justesse & la précision. Ses déterminations s'accorderent assez, & avec ce qu'il avoit prédit lui-même, & avec celles de Mrs Cassini & Maraldi.

Pour mieux faire voir cet accord, M. Delisle prit quelques unes des dernieres latitudes de Mercure, telles que Mrs Cassini & Maraldi les avoient conclues de leurs observations, & qui différoient trop de celles qu'il avoit trouvées pour les mêmes momens, & il montra que réellement ils convenoient ensemble. La méthode de Mrs Cassini & Maraldi étoit sujette aux réfractions, qu'ils avoient cependant négligées dans leurs dernieres observations, parce qu'ils avoient assez d'observations précédentes, où elles avoient pû effectivement être négligées sans erreur sensible. Les latitudes tirées de ces dernieres observations se sentoient donc de ce défaut ; car les réfractions n'alterent que les élevations horisontales, & ces élevations n'ont rapport qu'aux déclinaisons, & les déclinaisons aux latitudes. La méthode de M. Delisle étoit indépendante des réfractions. De-là il arrivoit que ses dernieres latitudes ne devoient pas convenir avec celles des deux autres Astronomes : mais en rectifiant les leurs sur le pied des réfractions, dont la variation est assez connue, tout se remettoit d'accord.

Sur cela M. Delisle donna une méthode qu'il avoit trouvée pour calculer la véritable position de Mercure dans le soleil, quand les observations auroient été faites par une méthode sujette aux réfractions, & dans un tems où il auroit fallu les compter.

Tout

Tout le monde s'est apperçû que près de l'horison le disque du soleil est très-sensiblement alteré, son diametre vertical est plus court que l'horisontal, parce que la réfraction étant inégale, & élevant d'autant moins un objet qu'il est plus haut sur l'horison, l'extrémité supérieure du diametre vertical du soleil est moins élevée par la réfraction que l'inférieure, ce qui fait le même effet que si ce diametre étoit réellement raccourci; pour l'horisontal, il ne peut recevoir dans ses parties aucune inégalité d'élévation. Si Mercure est alors dans le soleil, ses positions doivent donc être altérées en ce qu'elles ont de vertical, & il faut les réduire au vrai. M. Delisle suppose que le soleil est devenu une ellipse exacte, dont le petit axe est le diametre vertical raccourci selon la réfraction de ce moment-là, & par-là il connoît la nature de l'ellipse, ou la distance de ses foyers, qui dépend du rapport des deux axes. Cela posé, il donne une méthode géométrique pour réduire les positions apparentes de Mercure aux vraies. Il semble que les Mathématiciens d'aujourd'hui se croyent trop heureux d'avoir encore des difficultés à éclaircir.



OPTIQUE.

SUR LES OMBRES DES CORPS.

V. les M. p. 111.

SI l'on vouloit prouver combien le physique est quelquefois différent du géométrique, combien l'exécution réelle des choses s'éloigne de ce que la géométrie en auroit attendu par ses calculs, rien n'y seroit peut-être plus propre que le sujet qui va être traité. Ce n'est pas qu'il n'y ait de la géométrie par-tout sans nulle exception : mais elle est ordinairement fort compliquée, & celle qui avoit fondé nos raisonnemens étoit trop simple pour attraper juste les effets tels qu'ils sont.

* p. 74. & suiv.

Nous avons parlé en 1711 * de l'ombre & de la pénombre de la terre ou de la lune, d'où dépendent les éclipses, & nous supposerons ici ce qui en a été dit. Le triangle d'ombre véritable de la terre est formé du diametre de la terre, & de deux rayons partis des deux extrémités du soleil, & prolongés jusqu'à ce qu'ils concourent au-delà de la terre. Ce triangle est isoscele, son angle du sommet est mesuré par le diametre apparent du soleil qui est de 32′, d'où l'on conclut par la trigonométrie que la perpendiculaire tirée du sommet de ce triangle sur sa base, où la longueur de l'ombre est de 110 diametres de la terre, ou de 330 mille lieues. Or la lune n'est éloignée de la terre, que de 100 mille lieues tout au plus, d'où il suit que quand elle s'éclipse, elle tomberoit dans l'ombre véritable de la terre à moins d'un tiers de sa longueur, qu'elle devroit absolument disparoître dans une ombre si épaisse, & disparoître pour un long temps. Cependant elle ne disparoit presque jamais, & on la voit toûjours assez lumineuse, & seulement rougeâtre, ce qui marque sûre-

ment qu'elle n'eſt que dans la pénombre. Il y a donc là du phyſique qui dérange beaucoup le géométrique.

M. Maraldi a fait un grand nombre l'expériences pour éclaircir cette matiere, non ſeulement par rapport à l'aſtronomie, mais encore plus par rapport à l'optique, qui à meſure qu'elle ſera plus étudiée, donnera toûjours des phénomenes plus curieux, & auxquels on ſe ſeroit moins attendu. M. Deliſle le cadet avoit déja donné en 1717 ſes expériences & ſes réflexions ſur cette même partie de l'optique.

Que l'on expoſe au ſoleil un cylindre quelconque, il ſera fort naturel de croire, ſelon la petite théorie de 1711, qu'en ſuppoſant ce cylindre vertical, & en ne conſidérant dans le ſolide de ſon ombre qu'un plan horiſontal, il n'arrivera rien autre choſe, ſinon qu'il y aura un triangle d'ombre véritable dont le ſommet ou la pointe ſe terminera à quelque diſtance du cylindre, & aux deux côtés de ce triangle une pénombre infinie, mais toûjours plus claire, de ſorte qu'elle ceſſera bien-tôt d'être ſenſible, quoiqu'elle le ſoit encore à une diſtance où le triangle d'ombre n'exiſte plus. Si l'on met donc verticalement derriere le cylindre une ſuperficie blanche, que l'on éloignera ſucceſſivement du cylindre tant qu'on voudra, on y verra toûjours une ombre noire & également noire, mais toûjours plus étroite juſqu'à une certaine diſtance du cylindre qui ſera de 110 diametres de ce cylindre, car cela doit être égal pour tous les corps expoſés en plein ſoleil, après quoi l'ombre diſparoîtra, & on verra toûjours à ſes deux côtés une pénombre, toûjours plus large & plus claire, qui ne diſparoîtra qu'à une diſtance plus grande. Voilà tout ce que la géométrie donne, & tout ce qu'elle fait prévoir, mais le fait eſt bien différent.

L'ombre véritable ne s'étend, en demeurant uniforme & également noire, qu'à une diſtance plus de la moitié moindre que les 110 diametres du cylindre. Paſſé cela, ſon milieu devient une pénombre, & elle ne conſerve de ce qu'elle devroit être que deux traits noirs fort étroits qui terminent cette pénombre de part & d'autre ſelon ſa longueur. Ces deux traits

ſont de la noirceur qui appartient à l'ombre véritable. On reconnoît encore tout cet eſpace pour être celui que cette ombre devroit occuper, à ce qu'il eſt de la largeur qui convient à la diſtance. De plus ſi on augmente la diſtance où l'on a commencé à voir cette pénombre, l'eſpace total qu'elle occupe avec les deux traits noirs diminue toûjours de largeur, comme doit faire celui de l'ombre véritable; ſeulement la pénombre, en s'étreciſſant, s'éclaircit toûjours, les traits noirs gardant la même noirceur & la même largeur, & enfin à la diſtance des 110 diametres ou à peu près, les deux traits noirs qui ſe ſont toûjours approchés ſe confondent en un, après que l'ombre véritable diſparoît, & il n'y a plus que de la pénombre. Comment l'ombre véritable qui a retenu toute l'étendue de ſon cours naturel, & ſa projection triangulaire, s'eſt-elle changée en pénombre pendant plus de la moitié de ce cours, à l'exception de ces deux extrémités, qui ſont demeurées inaltérables? Nous appellerons cette pénombre qui tient la place preſque entiere de l'ombre véritable, *fauſſe* pénombre, pour la diſtinguer de celle qu'on a toûjours appellée ainſi.

Il ſe fait encore une apparence imprévûe. Quand l'ombre eſt reçûe aſſez proche du cylindre, & qu'elle n'a point encore dégeneré en fauſſe pénombre, on voit que la vraie pénombre placée, comme elle doit l'être, des deux côtés de l'ombre, eſt terminée en dehors par deux traits de lumiere plus vifs & plus éclatans que la lumiere même qui vient directement & à plein du ſoleil. Ils s'élargiſſent & s'affoibliſſent toûjours à meſure que l'ombre eſt reçûe plus loin du cylindre. D'où leur vient cet éclat plus grand qu'il ne devroit être, puiſqu'il n'y en a point au-deſſus de celui de la lumiere directe? Quant à la vraie pénombre, elle eſt toûjours dans ſon état naturel.

M. Maraldi a reconnu par ſes expériences que la diſtance où la fauſſe penombre commence à paroitre, n'eſt point proportionnée au diametre des cilindres; mais qu'elle eſt à peu près la même pour tous avec quelque petite variation irréguliere. Il la fixe à 41 diametres du cylindre. Elle devient

plus grande, quand le soleil est peu lumineux, soit qu'il soit couvert de quelques nuages clairs, soit qu'il soit peu élevé sur l'horison.

Pour expliquer la fausse pénombre, M. Maraldi juge qu'il ne faut pas, ainsi qu'on le fait ordinairement, & avec raison en beaucoup d'occasions, prendre les rayons de lumiere pour des lignes mathématiques & roides; mais qu'il faut imaginer la lumiere comme un fluide, analogue à l'eau, & qui prend les mêmes mouvemens, les mêmes irrégularités de mouvement, si cependant ce sont des irrégularités. Quand une riviere rencontre une pile d'un pont, elle se divise, & si les deux parties divisées qui ont été chacune une tangente de la pile suivent toûjours exactement cette direction qu'elles ont prise, elles ne se réuniront qu'à une certaine distance au delà de la pile. Mais cela n'est pas ainsi, les parties d'eau, qui touchent la pile, en suivent en partie le contour, les unes plus, les autres moins, & entrent dans cet espace où aucune ne devroit entrer si elles suivoient la direction des deux tangentes de la pile. L'application de cet exemple est aisée à faire, le cylindre devient la pile du pont. Il entre donc des rayons de lumiere dans l'espace qui ne devroit être occupé que par l'ombre véritable : mais comme cette ombre est d'une grande largeur proche du cylindre, ces rayons ne l'alterent & ne l'éclaircissent pas suffisamment pour faire une pénombre sensible, & cela n'arrive que quand l'ombre est devenue plus étroite à une plus grande distance du cylindre, qu'on a trouvée de 41 diametres. Alors une même quantité de rayons se mêle à une beaucoup moindre quantité d'ombre. Comme l'ombre devient toûjours plus étroite, la fausse pénombre s'éclaircit toûjours.

Puisque tous les rayons de lumiere, ou du moins la plus grande partie, suivent pendant quelque petite étendue le contour du cylindre, ou tournent un peu après en avoir rencontré les bords, ces bords qui ne sont nullement éclairés, doivent toûjours jetter une ombre véritable, & c'est là tout ce qui en reste. Voilà les deux traits noirs qui enferment la

fausse pénombre. Il n'y a rien qui puisse faire varier leur petite largeur.

Cependant il est impossible que sur ces mêmes bords il ne se réfléchisse en même temps d'autres rayons, différens de ceux qui circulent un peu à l'entour. Mathématiquement ils ne devroient déterminer que la position ou direction de deux tangentes extrêmes qui embrasseroient le cylindre, & au delà desquelles & en dehors seroit la vraie pénombre: mais ces bords sont des surfaces physiques qui par leur inégalité doivent causer des réflexions de rayons. Ce sont ces rayons réfléchis qui se jettant au dehors de la vraie pénombre, forment ces deux traits de lumiere si éclatans. Ils le sont plus que la lumiere directe, parce que la lumiere directe tombe dans ce même espace, où la vraie pénombre cesse, & que les rayons réfléchis des bords du cylindre y sont de plus. On voit assez que ces deux traits lumineux doivent toujours s'affoiblir à mesure que l'ombre est reçûe plus loin, puisque la même quantité de rayons réfléchis occupe toûjours une plus grande étendue.

A suivre les idées qui ont été établies, il est aisé de prévoir que si les mêmes expériences qui ont été faites avec des cylindres se font avec des Globes, la figure des phénomenes changera; que la fausse pénombre qui étoit un parallélogramme sur le papier où l'on recevoit les apparences, y deviendra un cercle; que les deux traits noirs qui la terminoient des deux côtés selon sa longueur, deviendront un anneau circulaire noir & étroit qui enfermera la fausse pénombre; qu'au delà de cet anneau sera un autre anneau de vraie pénombre, & au-delà de celui-ci encore un autre plus éclatant que la lumiere directe. On jugera même que l'anneau noir qui enferme la fausse pénombre diminuera toûjours de largeur dans une plus grande distance du globe, parce qu'il est formé de la même maniere que les deux traits noirs qui s'approchoient toûjours, & qu'enfin il s'anéantira à la distance de 110 diametres, où il n'y a plus que de la vraie pénombre.

Il faut seulement remarquer que la fausse pénombre com-

mence à paroître beaucoup plus près du globe qu'elle ne faisoit avec le cylindre. Elle se montre à 15 ou 16 diametres du globe, au lieu qu'elle ne se montroit qu'à 41 du cylindre. Cela convient extrèmement à l'explication physique que M. Maraldi donne de la fausse pénombre, car qu'un globe & un cylindre soient d'un même diametre & d'une même hauteur, le fluide lumineux qui rencontre le globe par toute la circonférence d'un grand cercle, circulera derriere & alentour en plus grande quantité qu'autour du cylindre dont il ne rencontrera que deux lignes droites de sa surface égales chacune à un diametre. Cela ne donne encore au globe qu'un avantage d'un tiers, & il en a un de près de deux tiers selon le rapport de 15 ou 16 à 41 : mais on peut aisément concevoir que tout ce qui rencontre le globe circulant alentour à cause de l'uniformité de sa figure, & non pas tout ce qui rencontre le cylindre, car il en faut excepter ce qui rencontre ses deux surfaces circulaires, la supérieure, & l'inférieure, toutes les parties du fluide lumineux qui rencontrent le grand cercle du globe, conspirent au même mouvement de circulation, & s'y entr'aident mutuellement, ce qui n'est pas dans le cylindre, & que delà vient à la lumiere une plus grande facilité de circuler autour du globe, qui s'ajoûte à sa plus grande quantité.

M. Maraldi conclut de ses expériences qu'apparemment il n'y a aucun corps opaque qui fasse une ombre pure, à quelque petite distance qu'elle soit de ce corps, qu'il s'y mêle toûjours des rayons qui n'ont pas suivi la ligne droite, & ont circulé ; mais que leur quantité, trop petite par rapport à celle de l'ombre, les rend insensibles. Il n'y a que des pénombres physiques.

Il ne reste plus de difficulté sur la trop grande noirceur de l'ombre de la terre où la lune doit tomber quand elle s'éclipse. La fausse pénombre de la terre commence selon les expériences de M. Maraldi à 16 de ses diametres, c'est-à-dire, à 48 mille lieues, & la lune est la moitié plus loin, elle ne sera donc pas trop obscurcie. Mais des mêmes expé-

riences il restoit une grande difficulté que M. Maraldi ne dissimule pas. L'anneau noir, seul reste de l'ombre véritable, enferme la fausse pénombre, & il est indispensable qu'avant que d'arriver à cette pénombre la lune passe par cet anneau. Elle sera donc plus obscurcie au commencement de l'éclipse, & ensuite elle le sera moins; ce sera la même chose renversée pour la fin de l'éclipse, où elle repassera par l'anneau : or il est bien sûr que c'est précisément le contraire.

L'atmosphere de la terre peut servir à la solution. Son ombre doit se trouver justement à la même place que l'anneau noir, & cette ombre qui doit être fort claire, puisque l'atmosphere laisse passer beaucoup de rayons, éclaircira suffisamment l'anneau, & le rendra homogene à la fausse pénombre, desorte qu'il ne restera dans tout aucune inégalité de noirceur que celle qui dépendra du plus ou moins de proximité à l'axe, selon qu'il est naturel & ordinaire. M. Maraldi ne prétend pourtant pas donner cette réponse pour décisive, quoiqu'elle soit assez plausible, il attend sagement de nouvelles observations plus exactes sur la différente obscurité de la lune éclipsée.

Aux expériences sur les ombres en plein soleil ont succedé celles que M. Maraldi a faites dans une chambre obscure, où la lumiere du soleil n'entroit que par un trou qui n'avoit pas $\frac{1}{3}$ de ligne de diametre. On se ménage cette obscurité pour voir des phénomenes foibles & délicats que le grand jour effaceroit.

Le premier que nous considérerons est l'agrandissement surprenant de l'ombre d'un petit corps cylindrique, tel qu'une aiguille ou un cheveu, placé directement dans le petit cone de lumiere du soleil qui entre par le trou, & à une distance de ce trou, comme, de 12 pieds. On met le corps à cette distance de la pointe du cone de lumiere, afin qu'il soit environné d'une quantité de lumiere assez grande. Si son ombre est reçûe sur un carton à 2 pieds loin de lui, où, vû son petit diametre, il ne doit y avoir nulle ombre véritable, mais seulement une pénombre très-foible & très-étroite, on

voit

voit une pénombre bien marquée, & 10 fois plus grande que le corps; si le carton est à 10 pieds de distance du corps, la pénombre est 35 fois plus grande, & elle croît toûjours à mesure qu'elle est reçûe plus loin.

Le P. Grimaldi, qui a le premier observé ce phénomene, l'attribue à une *diffraction* des rayons, c'est-à-dire, à un mouvement qu'il leur donne, par lequel les deux rayons extrèmes qui rencontrent un corps, & en sont les tangentes, ne suivent pas cette direction de tangentes, mais s'en écartent en dehors, comme s'ils en fuyoient les bords qu'ils ont rencontrés. M. Newton suppose dans le corps la vertu de les écarter. Il est certain que tout cela agrandit l'ombre : mais M. Maraldi croit qu'une explication plus simple & plus physique peut suffire.

Si l'ombre & la pénombre du cheveu ou de l'aiguille ne sont formées que par les rayons du soleil entrés par le trou, elles sont trop grandes selon les principes ordinaires de l'optique; mais selon ces mêmes principes, elles ne le seront pas trop, si outre les rayons directs du soleil, il en vient d'autres de dehors, qui passeront aussi par le trou, & frapperont le petit cylindre en autant de points, à l'opposite desquels seront des ombres qui s'ajoûteront à la premiere ombre causée par le soleil seul. Or M. Maraldi conçoit qu'il doit entrer par le trou une infinité de rayons reflèchis par les particules de l'air extérieur, & que les ombres qu'ils causeront, qui n'auroient pas été sensibles dans un lieu éclairé à l'ordinaire, le seront dans la chambre obscure.

Selon cette idée l'ombre ne devient que trop grande. Elle doit être comprise entre deux lignes tirées par deux bords opposés du trou, & prolongées dans la chambre jusqu'au carton; & il est certain qu'elle n'est pas de cette étendue : mais aussi il y a lieu d'en rabattre. Les rayons reflèchis par les particules d'air que l'on imaginera comme disposées en un demi-cercle dont le soleil tiendra le sommet, seront d'autant plus foibles, qu'ils seront plus éloignés du soleil; ou, ce qui revient au même, d'un rayon du soleil qui passera par

le centre du trou ; les ombres des rayons qui feront à un certain éloignement de cet axe ne feront plus fenfibles. Celles des rayons trop obliques au trou, ne le feront pas non plus. Enfin, fuivant ce qui a été dit, les pénombres qui fe font en plein foleil font terminées par une lumiere fort éclatante ; ici c'eft encore à plus forte raifon la même chofe, & les ombres formées par les rayons réfléchis, & qui tomberoient dans cet efpace, ne peuvent pas y fubfifter. On verra encore l'agrandiffement de l'ombre expliqué par M. Maraldi d'une autre maniere auffi phyfique, mais moins fimple, toûjours conforme à ce qu'il avoit établi pour les premiers phénomenes.

Outre l'agrandiffement extraordinaire de l'ombre ou de la pénombre des aiguilles, on obferve encore une apparence finguliere. Quand cette pénombre eft reçûe fort loin, elle eft tantôt coupée en fon milieu felon fa longueur par une bande claire, ou un peu rougeâtre, tantôt partagée en plufieurs bandes alternativement plus claires & plus noires, une plus grande diftance diminue le nombre de ces bandes. Dans cette variété il y a toûjours de commun que la pénombre eft terminée de part & d'autre par deux bandes claires, qui ont la même caufe que celles qui terminent les ombres en plein foleil, & toûjours après ces bandes claires font deux ou trois traits colorés de rouge, de violet & de bleu, qui fans doute ne s'apperçoivent qu'à la faveur de l'obfcurité de la chambre, & doivent fubfifter en plein foleil, quoiqu'ils n'y foient pas vifibles.

Pour tâcher de découvrir d'où venoient les bandes, M. Maraldi fit les obfervations avec des lames longues de 2 pouces, & larges les unes de $\frac{1}{2}$ ligne, les autres de 1 ligne, largeur beaucoup plus grande que le diametre des aiguilles ou des cheveux. Elles produifoient les bandes comme les aiguilles, mais à de plus grandes diftances ; & lorfqu'elles paffoient 1 ligne de largeur, elles n'en produifoient plus à une diftance de 72 pieds, mais feulement une pénombre uniforme, telle qu'auroit été celle d'une aiguille à une petite diftance ; d'où M. Maraldi conclut, avec beaucoup de fon-

dement qu'à cauſe de leur largeur, elles demandoient une plus grande diſtance pour produire des bandes, & qu'on en auroit vû paroître ſi on avoit pû faire l'obſervation dans des lieux aſſez grands. Et comme il ſuit de cette idée que les bandes qui étoient confondues ne font que ſe démêler par la diſtance & ſe rendre ſenſibles, M. Maraldi croit qu'on les verroit dans l'ombre des aiguilles reçûe fort proche, ſi ce n'étoit que cette ombre eſt trop étroite.

La bande claire ou rougeâtre du milieu eſt un effet néceſſaire de ce qui a été dit ſur les ombres en plein ſoleil. Qu'à quelque diſtance d'elle, de part & d'autre il y ait ſur la pénombre deux bandes plus noires, on conçoit aiſément qu'elles ſeront formées par ces rayons réfléchis dans l'air extérieur, que M. Maraldi ſuppoſe pour l'agrandiſſement de l'ombre, il eſt indiſpenſable qu'ils apportent quelque changement à la pénombre formée par la lumiere directe, & qui naturellement auroit été uniforme. D'autres bandes pareilles, s'il y en a, ſeront formées par d'autres rayons refléchis; mais plus éloignés de l'axe ou rayon principal, peut-être auſſi par des rayons qui auront eſſuyé deux réflexions dans l'air, & en ces deux cas les bandes qu'ils formeroient devroient être moins noires & plus foibles. Quand après les bandes formées on augmente la diſtance du carton qui reçoit l'ombre, il eſt évident que ces bandes, en ſe dilatant, ſe mêlent & avec la pénombre primitive, & entr'elles, & reçoivent des altérations & des variétés qu'il eſt bien plus aiſé d'imaginer en général, que d'expliquer dans tous les détails. Ils paroîtroient même inutiles, le général étant une fois bien conçû.

Les traits colorés de rouge, de violet & de bleu, qui terminent tout de part & d'autre, paroiſſent dans l'ombre d'un cheveu, lors même qu'il n'eſt plus expoſé à la lumiere directe qui a paſſé par le trou, & qu'il n'a pû recevoir que des rayons réfléchis dans l'air extérieur. C'eſt là une aſſez forte preuve de toute l'hypotheſe de M. Maraldi ſur les rayons réfléchis.

Ces traits colorés peuvent être cauſés par des réfractions

faites sur la derniere & la plus mince couche de la surface du corps opaque, elle doit toûjours être assez transparente pour cet effet, & l'on est aujourd'hui assez communément persuadé qu'il n'y a que les réfractions qui séparent assez les rayons teints naturellement de diverses couleurs, pour rendre la diversité de ces couleurs sensible. Cependant M. Maraldi explique les traits colorés par la seule réflexion, faite sur les extrémités du corps opaque. Il a mis dans la lumiere du soleil qui entroit dans une chambre obscure par un trou de $\frac{1}{2}$ pouce de diametre, un cylindre de 1 pouce de diametre, placé de sorte qu'il ne recevoit pas toute la lumiere, & qu'il en tomboit une partie au-dehors sans le rencontrer. Il s'en réfléchissoit donc à plus forte raison sur les bords du cylindre, & cette lumiere réfléchie reçûe sur un carton avoit des couleurs si fortes & si vives, que l'on eût pris le carton pour du papier marbré. C'étoit-là un effet de la figure cylindrique qui écarte & démêle les rayons, puisqu'elle renvoie divergens ceux qu'elle a reçûs paralleles.

On devine les phénomenes des globes qui n'auront que de très-petits diametres, & qu'on substituera dans les observations aux aiguilles ou aux lames. Les circonstances requises étant gardées, on aura dans le milieu de l'ombre de ces globes une aire circulaire fort claire, ensuite un anneau obscur & étroit, un autre anneau de pénombre plus large, un second anneau obscur & étroit; enfin un anneau lumineux assez large, bordé de couleurs en dehors.

Au lieu que les bandes ne paroissent pas même à une distance de 72 pieds dans l'ombre des lames qui ont un peu plus de 1 ligne de largeur, les différens anneaux, qui sont la même chose que les bandes, paroissent à cette distance dans l'ombre de globes qui ont jusqu'à 2 $\frac{1}{4}$ lignes de diametre. Cela s'accorde avec ce qui a été dit.

Plus les globes sont petits, plus les aires claires de leurs ombres sont grandes, ce qui s'accorde encore avec la plus grande facilité de la lumiere à tourner autour des petits corps.

Nous ne dirons rien de quelques autres expériences de M.

Maraldi, parce qu'elles ne ſont en quelque ſorte qu'incidentes, & n'entrent pas néceſſairement dans ſon deſſein principal. Un Philoſophe, qui ne veut faire des expériences que par rapport à un ſujet, a bien de la peine à réſiſter à des idées de traverſe qui lui en demandent auſſi, & elles le meneroient loin hors de ſa route, s'il n'avoit la force de ſe preſcrire des bornes.

MECHANIQUE.

SUR LE CHOC DES CORPS A RESSORT.

LES corps à reſſort parſait ſont les plus rares dans la nature, & l'on peut même croire qu'à la rigueur il n'y en a point. Ce ne ſont que ceux-là dont nous avons parlé en 1721 * d'après M. Saulmon, & ce ſont les ſeuls auſſi que l'on conſidere ordinairement dans les théories géométriques du choc des corps à reſſort, parce qu'ils ne demandent qu'une hypotheſe fort ſimple, & qui facilite les calculs. Mais M. Saulmon a donné auſſi la théorie du choc des corps à reſſort imparfait, plus générale & plus compliquée que la premiere, & qui doit par conſéquent la comprendre comme un de ſes cas particuliers.

* p. 86. & ſuiv.

Nous avions défini le reſſort parfait, celui qui en ſe débandant rend parfaitement au corps la figure qu'il avoit perdue, lorſque ce même reſſort s'étoit bandé par quelque choc. Mais nous le définirons ici plus préciſément, celui qui ſe débande avec une force parfaitement égale à celle dont il a été bandé; d'où ſuit l'entiere reſtitution de la figure, & même une vîteſſe dans cette reſtitution égale à la viteſſe dont s'eſt fait le changement de figure; en un mot, toutes choſes égales dans les deux temps, mais ſelon un ordre contraire.

Le reſſort imparfait ne ſe débande donc pas avec autant de force qu'il a été bandé. Il n'importe pour la géométrie quelle ſoit la cauſe phyſique de cette inégalité. Peut-être, comme un reſſort ſenſible eſt apparemment compoſé de pluſieurs petits reſſorts particuliers inſenſibles, quelques-uns des petits reſſorts ſe ſont rompus dans le débandement, ce qui a affoibli d'autant le reſſort total. Enfin il ſera arrivé un dérangement, un déplacement de parties, quel qu'il ſoit, qui empêchera le reſſort de ſe débander avec la même force dont il a été bandé. Si l'on conçoit que dans le bandement du reſſott il arrive au corps un changement qui ſubſiſte le même dans le débandement, le reſſort n'eſt pas pour cela imparfait, puiſque le débandement ſera toûjours égal au bandement; il n'y a que l'inégalité des forces des deux tems qui rende le reſſort imparfait, le plus ou le moins de *vivacité* du reſſort, c'eſt-à-dire, de promptitude avec laquelle il ſe bande & débande, n'y fait rien.

Le reſſort abſolument imparfait ou nul ſera donc celui qui ayant été bandé ne ſe débande point du tout. Les corps mous peuvent être conçûs ſous cette idée, ils s'applatiſſent par le choc, & ne ſe rétabliſſent point, cela veut dire que tous leurs reſſorts ſe ſont rompus en ſe bandant, & qu'il n'en reſte point pour ſe débander.

Puiſque le reſſort, quel qu'il fût, ſeroit parfait ſi la force du débandement étoit égale à celle du bandement, il ſuit que la force du bandement eſt à celle du débandement, comme le reſſort parfait eſt à l'imparfait dont il s'agira en particulier. Si, par exemple, dans une balle de jeu de paume la force du bandement du reſſort eſt 9, & celle du débandement 5, le reſſort parfait eſt au reſſort d'une balle comme 9 à 5.

Nous ſuppoſerons ici tout ce qui a été établi en 1721. Deux corps doivent ſe choquer directement, tous deux vont à l'orient, le 1er qui eſt le plus vîte rencontrera le 2d. Lorſqu'ils ſont à reſſort parfait, nous avons dit que dans le bandement du reſſort le 1er eſt repouſſé vers l'occident avec une certaine force qui diminuoit celle qu'il avoit avant le choc

pour aller à l'orient, que dans le débandement du reſſort il étoit encore repouſſé vers l'occident avec une nouvelle force égale à la premiere. Mais ſi le reſſort eſt imparfait, la nouvelle force qui agit dans le débandement ſelon la même direction que la premiere, ne lui eſt plus égale; & il eſt aiſé de voir qu'elle eſt moindre dans la raiſon du reſſort imparfait au parfait. Elle ſeroit 5, par exemple, la premiere ayant été 9, s'il s'agiſſoit d'une balle de paume.

On a déterminé en 1721 l'expreſſion de cette force, qui dans le bandement repouſſoit le 1er corps vers l'occident, par conſéquent la force qui dans le débandement l'y repouſſeroit encore, ſeroit cette premiere force multipliée par 5, & diviſée par 9, mais pour la généralité, & même pour la facilité du calcul algébrique, il vaut mieux exprimer en grandeurs indéterminées le rapport du reſſort parfait à l'imparfait. Ainſi le 1er corps ſera repouſſé vers l'occident avec les deux forces inégales & connues, l'une du bandement, l'autre du débandement, & pour avoir la force totale du corps après le choc, il faudra rabattre ces deux forces de celle qu'il avoit vers l'orient avant le choc. Ces deux mêmes forces inégales s'ajoûtent après le choc à celle que le 2^d corps avoit avant le choc vers l'orient, & de-là ſe tire ſans aucune peine la vîteſſe & la direction de la vîteſſe de chacun des deux corps après le choc; car il n'y a qu'à diviſer la force de chacun par ſa maſſe.

Nous avons dit en 1721 comment le cas où les deux corps vont du même ſens avant le choc ſe change en celui où ils vont en ſens contraire, ou en celui où l'un eſt en repos. Il ne faut que rendre négative la vîteſſe du 2^d corps avant le choc, ou la ſuppoſer nulle. La formule de la vîteſſe que prennent après le choc les corps à reſſort imparfait, devient donc abſolument générale. Elle comprend même les corps à reſſort parfait; on n'a qu'à y ſuppoſer égales les deux forces du bandement & du débandement. Elle comprend encore les corps abſolument mous, ou abſolument durs, il ne faut qu'y ſuppoſer nul tout ce qui exprime la force du

débandement; car s'il n'y a point de débandement, il n'y a point de ressort, & en ce cas, ou il y a eu un bandement, c'est-à-dire, un aplatissement sans restitution de figure, ce qui appartient aux corps absolument mous, ou il n'y a point eu de bandement ou de changement de figure ce qui appartient aux corps absolument durs.

La formule est encore générale par un endroit que nous n'avons pas expliqué jusqu'ici, de peur d'entasser trop d'idées différentes. Le ressort que le choc met en action est un ressort composé de celui des deux corps; car tous deux agissent l'un sur l'autre dans le débandement. Les théories ordinaires où l'on suppose que le ressort est parfait des deux parts, n'ont nulle difficulté sur ce point, nulle attention particuliere à y faire; mais ici où les ressorts peuvent être & sont le plus souvent imparfaits, le ressort composé ou total varie selon les deux ressorts particuliers qui le composent. L'un peut être parfait, & l'autre imparfait; & même imparfait à tel point, qu'il sera nul ou n'aura point de débandement, ou bien tous deux seront différemment imparfaits. Il est évident que la force dont le ressort composé agit sur chacun des deux corps, est la moitié de la force des deux ressorts particuliers; car il partage également son action entre ces deux corps; ou, ce qui revient au même, le ressort composé est la moitié de la somme des deux particuliers. Si l'un manque, il n'est que la moitié de l'autre. Par-là on exprime aisément toutes les suppositions différentes qu'on peut faire sur les différentes combinaisons des deux ressorts particuliers; & comme il y a dans la formule de M. Saulmon une grandeur indéterminée qui représente le ressort composé, on voit très-aisément ce qu'il faut substituer en sa place selon les cas. Quand on prend le rapport du ressort parfait à l'imparfait, c'est le composé qui est cet imparfait.

De cette formule générale & toute nouvelle de M. Saulmon, naissent des conséquences en foule, nous en détacherons les principales, ou les plus faciles.

Il est clair par ce que nous avons dit, & sans y rien ajoûter, que

que ce que le 1er corps qui alloit à l'Orient prend de force par le bandement & le débandement du reſſort compoſé pour retourner vers l'Occident, le 2d le prend de ſurplus pour continuer d'aller à l'Orient, & cela ſoit que les forces du bandement & du débandement ſoient égales ou inégales, c'eſt-à-dire, que le reſſort compoſé ſoit parfait ou imparfait, ou, ce qui eſt le même, ce qu'un des deux corps perd de force vers un certain côté, l'autre l'acquiert vers ce même côté, & par conſéquent, quel que ſoit le reſſort, la quantité de mouvement des deux corps vers un même côté eſt égale avant & après le choc.

La vîteſſe reſpective des deux corps avant le choc, qui eſt la ſomme de leurs viteſſes particulieres, s'ils vont en ſens contraire, ou la différence de ces vîteſſes, s'ils vont de même part, eſt telle qu'on veut la ſuppoſer: mais la vîteſſe reſpective après le choc dépend de l'action du reſſort; car s'il n'y avoit point de reſſort, il n'y auroit plus de vîteſſe reſpective, puiſque les deux corps iroient enſemble d'une vîteſſe commune, & moins le reſſort agit, moins il y a de vîteſſe reſpective. Quand le reſſort compoſé, c'eſt-à-dire, les deux reſſorts particuliers ſont parfaits, la vîteſſe reſpective eſt égale avant & après le choc, ce que l'on ſçait par les théories ordinaires; donc ſi le reſſort compoſé eſt imparfait, la vîteſſe reſpective eſt moindre après le choc, & elle eſt moindre ſelon la raiſon du reſſort imparfait au parfait.

Par-là on peut toûjours connoître combien un reſſort imparfait eſt imparfait. Par exemple, M. Newton ayant fait choquer directement deux balles de paume, a trouvé que leurs vîteſſes reſpectives avant & après le choc, étoient comme 9 & 5, le reſſort imparfait des balles eſt donc à un reſſort qui ſeroit parfait, comme 5 à 9. Les reſſorts de tous les corps pourront être meſurés de la même maniere, & même les reſſorts compoſés de deux corps quelconques de différente eſpece.

Il a été dit en 1721 que la force du bandement du reſſort s'exprime par le rapport du produit des deux corps à leur

ſomme, ce rapport étant multiplié par leur vîteſſe reſpective avant le choc. Cette force eſt à celle du débandement comme le reſſort parfait à l'imparfait ; ce qui fait voir tout d'un coup que la force du débandement s'exprime par celle du bandement que le reſſort imparfait multiplie, & que le parfait diviſe. La conſidération de ces expreſſions donne quelques analogies qui ſautent aux yeux. Ce qu'elles ont de commode, c'eſt que la vîteſſe reſpective avant le choc, qui eſt toûjours connüe, y entre toûjours.

Le chemin ou la vîteſſe du centre de gravité commun des deux corps n'eſt pas plus difficile à trouver dans l'hypothèſe du reſſort compoſé imparfait, que dans celle du parfait. Cette vîteſſe n'eſt que moindre après le choc dans l'hypotheſe du reſſort imparfait : mais elle dépend toûjours des mêmes principes.

En général & dans les deux hypotheſes, il ſuit de ce qui a été dit en 1721, que la vîteſſe du centre de gravité dépend des forces ou quantités de mouvement des deux corps, qui toutes deux ou le tirent vers un même côté, auquel cas c'eſt leur ſomme qui meut le centre de gravité, ou le tirent de deux côtés oppoſés, auquel cas ce n'eſt que leur différence qui le meut vers le côté de la plus grande force ; & ſi cette différence eſt nulle, il ne ſe meut point. Or quel que ſoit le reſſort, la quantité de mouvement des deux corps vers un même côté eſt égale avant & après le choc ; donc la vîteſſe du centre de gravité ſera toûjours la même avant & après le choc, & aura la même direction.

Si l'on ſe ſouvient de la maniere dont nous avons expliqué en 1721 que la même quantité abſolue de mouvement pouvoit, ſelon M. Saulmon, ſubſiſter dans la nature, à une petite reſtriction près, on verra que la même idée ſubſiſte toûjours. Un fluide ſubtil prendra tout ce qui ſe perd de mouvement dans un choc, où le reſſort compoſé étant imparfait, il s'eſt rompu quelques petits reſſorts particuliers. Le principe de la même quantité de mouvement toûjours ſubſiſtante eſt ſi beau, & ſi digne de l'Auteur de l'univers, qu'il

mérite les efforts des Philosophes pour le conserver, & l'on ne peut s'empêcher d'avoir regret à quelques modifications qu'on est forcé d'y mettre.

SUR LA REFLEXION ET LA REFRACTION.

NOUS avons déja annoncé en 1722 * que la théorie de M. de Mairan sur la réflexion des corps, le conduiroit à celle de la réfraction, & il étoit aisé de s'appercevoir qu'elle étoit trop étendue & trop générale pour ne pas aller jusque-là. Mais pour voir naître la réfraction de la réflexion, il faut prendre de nouvelles vûes, qui seront toûjours étroitement liées aux premieres.

* V. les M. p. 343. & suiv.

On conserve ces anciennes suppositions, qu'un plan ou la surface d'un corps quelconque est choquée par une sphere, de sorte que le centre de gravité du corps, celui de la sphere, & le point de contact sont sur une même ligne droite, que le plan choqué est horisontal, que l'incidence de la sphere est oblique pour plus de généralité, & qu'il y a un ressort parfait dans la sphere. Il est le plus souvent inutile d'en concevoir un dans le plan ou corps choqué. Tout ce que l'on change, c'est que ce plan ou corps qui étoit inébranlable est maintenant mobile.

Puisqu'il l'est, la sphere doit le mouvoir. Elle fera sortir sa surface de cette ligne horisontale selon laquelle elle étoit étendue. Nous rapporterons à cette ligne, comme à un terme fixe, les mouvemens qui vont arriver, & nous la nommerons ligne *fixe*. La sphere, dont le mouvement est composé d'horisontal & de vertical, puisqu'il est oblique, ne peut mouvoir le corps choqué, ou le pousser au-delà de la ligne fixe, que selon une direction verticale, car par sa direction horisontale elle ne le choque point. Si le corps & la sphere étoient des corps parfaitement durs, ou parfaitement mous,

la ſphere donneroit au corps choqué une vîteſſe verticale d'autant plus grande, qu'il ſeroit d'une plus petite maſſe, & au contraire. On peut concevoir que la maſſe du corps choqué fait une certaine réſiſtance à la viteſſe que le choquant tend à lui imprimer, & que cette réſiſtance croît ou décroît avec la maſſe. Cela eſt général, & ſubſiſte dans le cas du reſſort, comme dans celui des corps parfaitement durs ou mous: mais le reſſort amene des conſidérations nouvelles.

La réflexion dépend totalement du reſſort, & afin qu'elle ſoit parfaite, c'eſt-à-dire, qu'elle ſe faſſe ſous un angle égal à celui d'incidence, il faut que le reſſort ſoit parfaitement comprimé, & parfaitement reſtitué. Pour cela il lui faut un appui inébranlable, qui ne peut être que le corps choqué. Mais ce corps choqué eſt mobile, & prend une vîteſſe verticale; il cede donc, & n'eſt plus du tout un appui, s'il cede dans l'inſtant indiviſible où il eſt choqué; du moins il n'eſt qu'un appui imparfait, s'il ne cede pas entierement dans cet inſtant, & eſt quelque temps à ſe retirer.

Que le corps choqué ſoit plus ou moins de temps à ceder entierement, il eſt viſible que cela dépend du plus ou moins de viteſſe verticale qu'il doit prendre, & ce plus ou moins de viteſſe dépend du rapport qui ſera entre la réſiſtance de ſa maſſe & la force de la ſphere ſelon ſa direction verticale. Plus la maſſe du corps ſera grande, & la force verticale de la ſphere petite, plus le corps ſera de temps à ceder, plus il ſera de temps à ſervir d'appui, quoique d'un appui toûjours cedant, & au contraire. Il ſuffira de concevoir déſormais une même direction ou viteſſe verticale dans le mouvement compoſé de la ſphere, & la maſſe du corps choqué toûjours croiſſante ou décroiſſante.

Il faut un temps fini, quoique très-court, pour la compreſſion du reſſort, & un autre égal pour la reſtitution. Le corps choqué a toute la durée de ces deux temps pour achever entierement de ceder, & pour ſe dérober tout-à-fait à la ſphere choquante; il ſe dérobera dans le 1er temps, & plûtôt dans le 1er, s'il prend plus de vîteſſe; & il ne ſe dérobera

que dans le 2d, & plus tard dans le 2d, s'il en prend moins, ce qui fait deux cas remarquables, ou plûtôt trois.

Si le corps choqué est infiniment petit, & par conséquent d'une résistance nulle par sa masse, il prend dans l'instant indivisible du choc toute la vitesse verticale qu'il doit prendre, il se dérobe, le ressort de la sphere n'est nullement comprimé; & comme elle n'a reçû aucune altération à son mouvement, elle le continue selon la même ligne oblique qu'elle décrivoit. Il n'y a point de réflexion. Si le corps est fini, mais très-petit, il prendra moins de vîtesse, résistera un peu de temps, mais se dérobera tout-à-fait un peu après le commencement de la compression du ressort. Ici s'applique ce qui a été dit en 1722 d'après M. de Mairan, que dans tous les instans infiniment petits, tant de la compression que de la restitution du ressort, la sphere avoit toûjours différentes tendances à des directions qu'elle suivroit, si le corps, supposé alors inébranlable, étoit subitement enlevé dans quelqu'un de ces instans. Maintenant le corps est réellement enlevé dans un instant de la compression du ressort, la sphere ira donc selon la tendance de cet instant, & il est aisé de voir que dans la supposition présente ce sera une ligne peu différente de celle qu'elle suivoit dans la réflexion nulle, & lorsque son mouvement n'étoit nullement alteré. Cette nouvelle ligne sera celle d'une réflexion très-imparfaite, & comme elle ne peut être qu'au-dessous de la ligne qu'on a nommée *fixe*, ce sera une réflexion *en dessous*. Puisque la vîtesse verticale de la sphere diminue toûjours par degrés pendant toute la compression du ressort, & ne renaît par les mêmes degrés que pendant la restitution, ici, où il y a eu une compression incomplete sans restitution suivante, la sphere a perdu de sa vîtesse verticale qu'elle n'a point regagnée, & la ligne de réflexion en dessous est celle du mouvement composé de la sphere, où la vitesse verticale est moindre qu'avant le choc, & l'horisontale la même, car elle est constante. Il suit de là que si du centre de la sphere, dans l'instant du choc, on tire une perpendiculaire sur le plan choqué, ou la ligne fixe, la

ligne de la réflexion en dessous s'éloignera plus de cette perpendiculaire que ne faisoit la ligne d'incidence. Il est très-facile d'imaginer tous les cas suivans, où la résistance du corps choqué croissant toûjours, il ne se dérobera tout-à-fait qu'après une plus grande compression du ressort, mais toûjours incomplete, & où la sphere suivra une ligne de réflexion en dessous toûjours plus éloignée de la perpendiculaire au plan, & par conséquent plus inclinée à la ligne fixe horisontale, puisque le rapport de la vîtesse verticale de la sphere à l'horisontale diminue toûjours.

Si la masse ou la résistance du corps choqué est telle qu'il ne se dérobe que dans l'instant où la compression du ressort de la sphere est entierement finie, la sphere qui a perdu toute sa vîtesse verticale, & n'en reprend rien, faute d'appui, n'a plus que sa direction ou vîtesse horisontale, & cette direction est en effet la tangente du sommet de la courbe, selon laquelle est alors sa tendance. Son centre ne peut plus que se mouvoir horisontalement sur la ligne fixe, ce qui sera, si l'on veut, une reflexion *moyenne*.

Car on voit déja que les réflexions *en dessus*, qui sont les ordinaires, vont venir, à mesure que la résistance du corps choqué devenant encore plus grande, il ne se dérobera que pendant la restitution du ressort toûjours plus avancée. Les réflexions en dessus seront toûjours moins inclinées à la ligne fixe, & moins éloignées de la perpendiculaire au plan, & afin qu'il en vînt une qui fit avec elle le même angle que la ligne d'incidence, il faudroit que la restitution du ressort eût été entiere, c'est-à-dire, que le corps choqué n'eût point du tout cedé, ou eût été d'une masse infinie, ou inébranlable, ce qui est le cas de la réflexion parfaite.

L'angle que fait la ligne de réflexion nulle avec la ligne fixe est égal à celui d'incidence, puisque la sphere ne suit que la même direction ou ligne tant au-dessous qu'au-dessus de la ligne fixe. Ensuite cet angle de la ligne de réflexion en dessous avec la ligne fixe, diminue toûjours jusqu'à ce qu'il devienne nul dans la réflexion moyenne, après quoi il com-

mence à croître dans les réflexions en deſſus, & redevient enfin dans la réflexion parfaite égal à celui d'incidence, de ſorte qu'à cet égard les deux extrémités ſe rejoignent, mais en ſens contraires.

En conſidérant ce qui arrive ici à la vîteſſe verticale de la ſphere dans les trois cas de la réflexion nulle, moyenne & parfaite, on reconnoîtra trois cas dont nous avons parlé en 1706 * dans l'explication du mouvement ſimple & direct des corps à reſſort. Si le choqué en repos eſt infiniment petit par rapport au choquant, le choquant ne perd rien de ſa vîteſſe; ſi le choqué eſt égal, il prend toute la vîteſſe du choquant qui demeure immobile; ſi le choqué eſt infiniment grand par rapport au choquant, il lui rend toute ſa vîteſſe; l'application ſe fait d'elle-même.

* p. 124. & ſuiv.

Il ne ſera peut-être pas hors de propos de s'arrêter un peu ici pour expliquer comment une boule, qui en choque une égale en repos, lui donne toute ſa vîteſſe, & demeure en repos elle-même, cela éclaircira ce qui a été dit ou ſuppoſé. Ce phénomene ne peut arriver ſi la compreſſion & la reſtitution du reſſort des deux boules n'ont été toutes deux égales & parfaites, & elles ne peuvent l'avoir été, ſi les deux boules n'ont été à l'égard l'une de l'autre un appui parfaitement immobile. Mais comment cela, ſi la boule choquée n'a nullement été immobile à l'égard de la choquante? Elle a dû lui céder, & diminuer d'autant l'action des deux reſſorts.

Il ſuffit de conſidérer celui de la choquée. Dès le premier inſtant où elle l'eſt, elle s'aplatit un peu, & devient un ſphéroïde, dont le petit axe eſt dans la ligne qui joint ſon centre avec le point de contact. Le grand cercle, dont cette ligne étoit le diametre, étant devenu ellipſe, le point du contact & le point de la ſphere diamétralement oppoſé s'approchent tous deux de ſon centre, & ſi on avoit d'aſſez bons yeux, on verroit la partie de la ſphere antérieure par rapport au coup le fuir, & la poſtérieure s'en approcher; d'où il ſuit que le centre de la ſphere placé à égale diſtance de ces deux parties, & pouſſé en même-tems & également

par elles deux en ſens contraires, demeure immobile. Dans les inſtans ſuivans le ſphéroïde devient toûjours plus ſphéroïde, & le centre demeure toûjours immobile, parce que toute la force de la boule choquante ſe conſume à changer toûjours de plus en plus la ſphere en ſphéroïde, ce qui ne demande aucun mouvement, ni déplacement du centre. Son immobilité fait que la ſphere choquée tient lieu à la choquante d'un appui inébranlable.

On voit par tout ce qui a été dit, que les réflexions en deſſous & les réflexions en deſſus ſont ſéparées par une réflexion qui n'eſt ni en deſſous, ni en deſſus, c'eſt la moyenne. Les réflexions en deſſous ſe font tant que la vîteſſe verticale de la ſphere eſt diminuée par la réſiſtance du plan choqué, & non rétablie; la réflexion moyenne, lorſque cette vîteſſe eſt entierement éteinte, & nullement rétablie; les réflexions en deſſus, tant que cette vîteſſe eſt rétablie en partie, juſqu'à ce qu'enfin elle le ſoit entierement dans la réflexion parfaite.

La vîteſſe verticale de la ſphere ne peut jamais être dans un cas plus avantageux que celui où elle ne diminue aucunement par la réſiſtance du plan, & c'eſt alors la réflexion nulle, dont la ligne n'eſt que celle d'incidence continuée au deſſous de la ligne fixe. D'un autre côté ſi cette vîteſſe a été diminuée, elle ne peut être dans un cas plus avantageux que celui où elle ſe rétablit entierement, & c'eſt la réflexion parfaite, dont la ligne fait au deſſus de la ligne fixe un angle égal à celui d'incidence. Donc l'eſpace qui eſt entre la réflexion nulle & la parfaite comprend toutes les réflexions poſſibles. Afin qu'il y eût encore des réflexions au-delà de la parfaite, il faudroit que le plan ne fût pas ſeulement inébranlable pour rendre à la ſphere toute ſa vîteſſe verticale: mais qu'il eût encore une force pour l'augmenter, ce qui ne peut être en phyſique. Dans ce cas, s'il étoit poſſible, l'angle de réflexion ſeroit plus grand que celui d'incidence, & la ligne de réflexion s'approcheroit plus de la perpendiculaire au plan que ne faiſoit celle d'incidence.

On s'apperçoit déja ſans doute que les réflexions en deſſous

vont devenir des réfractions. Car si une sphere ayant traversé un milieu fluide, vient à tomber obliquement sur la surface d'un second milieu horisontal, plus difficile à pénétrer, sa vîtesse verticale, par laquelle seule elle pénetre, sera nécessairement diminuée, & il est bien certain qu'elle ne se rétablira pas; la sphere qui entrera dans le 2d milieu sera donc dans le même cas que celle qui se réfléchissoit en dessous, parce qu'elle avoit perdu quelque portion de sa vîtesse verticale qu'elle ne recouvroit point. Elle entrera dans le nouveau milieu, en suivant une ligne de réflexion en dessous, non continue à celle d'incidence, & c'est là ce qu'on appelle une réfraction. Cette ligne de réflexion en dessous, ou de réfraction est, comme on l'a vû, plus éloignée de la perpendiculaire au plan que n'étoit la ligne d'incidence, & c'est ce qu'on appelle une réfraction qui s'éloigne de la perpendiculaire. Elle s'en éloigne d'autant plus que le 2d milieu a par rapport au 1er plus de difficulté à se laisser pénétrer par la sphere.

Si au contraire le 2d milieu étoit plus aisé à pénétrer que le 1er, il est bien vrai que la force verticale absolue de la sphere n'en seroit pas augmentée: mais sa vîtesse seroit moins retardée par le 2d milieu qu'elle ne l'avoit été par le 1er, ce qui est l'équivalent d'une augmentation réelle de force ou de vîtesse. La sphere doit nécessairement pénétrer le 2d milieu, puisqu'elle a bien pénétré le 1er, elle doit donc se mouvoir au dessous de la ligne fixe, qui appartient ici à la surface commune des deux milieux. Elle ne peut se mouvoir dans tout l'espace qui appartient aux réflexions en dessous, qui ne sont telles que parce que la vîtesse verticale est diminuée. Elle doit donc suivre une ligne qui soit hors de cet espace, & elle ne le peut sans en prendre une qui s'approche plus de la perpendiculaire au plan que ne faisoit la ligne d'incidence. Cette réfraction se fait donc en s'approchant de la perpendiculaire, & elle s'en approche d'autant plus que la facilité du 2d milieu à être pénétré est plus grande que celle du 1er. Voilà le cas qui n'avoit pas lieu dans la

réflexion, parce qu'on n'y considéroit que des corps solides rencontrés par la sphere, au lieu qu'ici on en considere de fluides qu'elle traverse avec plus ou moins de facilité.

En géneral il est très-clair par la théorie des mouvemens composés, que dans le triangle rectangle, dont l'hypoténuse représente l'incidence oblique de la sphere sur un plan horisontal, & les deux autres côtés la vîtesse horisontale constante, & la verticale variable, qui est aussi ce que nous avons toûjours nommé la perpendiculaire au plan, il arrive nécessairement que quand cette vîtesse verticale est retardée ou diminuée, l'angle de l'hypotenuse avec elle devient plus grand, ou, ce qui est le même, l'hypoténuse qui est le chemin de la sphere s'éloigne de la perpendiculaire au plan, & qu'au contraire si la vîtesse verticale est augmentée ou moins retardée, le chemin de la sphere s'approche de la perpendiculaire au plan.

Il est donc démontré que le milieu dans lequel un rayon de lumiere composé de petits globules, ainsi qu'il a été dit
* p. 118. en 1722*, se rompt en s'approchant de la perpendiculaire, est le milieu le plus aisé à pénétrer par le rayon, & au contraire. Et comme il est certain par l'expérience que la lumiere, en passant de l'air dans l'eau, se rompt en s'approchant de la perpendiculaire, & s'en approche encore plus dans le verre, il est sûr que la lumiere se meut plus aisément dans le verre que dans l'eau, & dans l'eau que dans l'air.

Quand on commença dans le siecle passé à examiner plus soigneusement la réfraction, certainement l'apparence n'étoit pas que des milieux transparens plus denses dussent donner un passage plus aisé à la lumiere, & plus aisé à proportion de leur densité, qui naturellement devoit être un obstacle. Aussi le célebre M. de Fermat, grand géometre, soûtint-il long-temps contre M. Descartes que l'air étoit un milieu plus favorable à la lumiere que l'eau, & l'eau plus que le verre. Poussé vivement par son redoutable adversaire, il se retrancha enfin dans un raisonnement dont nous donnerons ici quelque idée.

Il est de la simplicité & de la sagesse de la nature que la

lumiere aille d'un point à un autre, ou par un chemin direct, ou par le plus court, ou par celui qu'elle parcourt en moins de temps. Quand elle se rompt en passant d'un milieu dans un autre, elle ne va ni par un chemin direct, ni par le plus court, elle va donc par celui de la plus courte durée. M. le Marquis de l'Hopital a démontré dans ses *infin. petits* sous une espece d'allégorie, qu'afin que la lumiere, tombant obliquement, aille en moins de temps qu'il soit possible d'un point donné dans un milieu à un point donné dans un autre, il faut qu'elle se rompe de sorte que le sinus de l'angle que fait son incidence avec la perpendiculaire au plan, & le sinus de son angle de réfraction soient entr'eux comme les différentes facilités des deux milieux à se laisser pénétrer. Or quand le chemin de la lumiere qui se rompt s'approche de la perpendiculaire au plan, le sinus de son angle de réfraction est moindre que n'étoit celui de l'angle d'incidence. Donc alors la facilité du 2^d^ milieu est aussi moindre que n'étoit celle du 1er. Donc le milieu dans lequel la lumiere se rompt en s'approchant de la perpendiculaire est celui qu'elle pénetre le moins facilement.

Cette conséquence est vraie, s'il est bien vrai que le chemin de la lumiere, qui se rompt, doive être de la moindre durée possible : mais une cause finale, un principe moral, pour ainsi dire, ce plus court tems, plus convenable à la sagesse de la nature, ne peut pas tenir contre un principe géométrique & physique, tel que celui de la composition des mouvemens. En effet, comme nous l'avons dit en parlant de M. Leibnitz *, qui admettoit en physique les causes finales, & en particulier ce principe de M. de Fermat sur la réfraction, *ce qui appartient à la sagesse du Créateur semble être encore plus au dessus de notre foible portée, que ce qui appartient à sa puissance.* Quand nous aurons découvert ce qui est, ne craignons pas de n'y pas trouver assez d'ordre & de dessein : mais ne jugeons pas de ce qui est par un ordre & des desseins tirés de notre imagination.

* V. l'Hist. de 1716. p. 108.

Les causes finales étant donc aussi peu décisives en phy-

ſique, M. de Mairan ne fait pas difficulté d'admettre que les deux chemins du rayon rompu ſont parcourus en un temps plus long, que ne feroit le chemin direct & unique compris entre les deux mêmes points, & il le démontre, & même à l'égard de la réflexion, tant qu'elle eſt imparfaite. La néceſſité méchanique doit prévaloir ſur-tout.

Quant à la denſité des milieux, qui cependant réſiſtent moins à la lumiere, il fait voir que cette plus grande denſité de leurs parties ſenſibles peut fort bien s'accorder avec une moindre denſité de fluide ſubtil qui remplit leurs pores inſenſibles, & qui fera la réfraction. La contexture des pores avec les parties ſolides des corps diaphanes plus denſes peut auſſi être plus favorable au paſſage de la lumiere. Enfin c'eſt à la phyſique à éclaircir ce point, qui ne l'eſt pas encore aſſez : mais ce qu'il y a de Méchanique eſt inébranlable.

L'hiſtoire que fait M. de Mairan, non-ſeulement de la conteſtation de M. Deſcartes & de M. de Fermat, mais des différens ſentimens des plus grands philoſophes ſur toute cette matiere, prouve aſſez combien elle étoit épineuſe, & combien il étoit néceſſaire qu'il y eût enfin quelque choſe de bien ſûrement arrêté. Cette hiſtoire, curieuſe & agréable par elle-même, a été recherchée avec ſoin, & recueillie de beaucoup d'endroits, dont quelques-uns ſont déja peu connus.

Comme la réfraction de la lumiere a pour cauſe la différente réſiſtance de deux milieux, & que l'on conçoit la réſiſtance de chacun toûjours la même, la force verticale de la lumiere, lorſqu'elle paſſe d'un des deux milieux dans l'autre, eſt toûjours également augmentée ou diminuée par rapport à l'horiſontale, quelle qu'ait été l'incidence du rayon, & de-là vient le rapport conſtant des ſinus des angles d'incidence & de réfraction pour deux milieux déterminés.

Si la lumiere paſſe d'un milieu dans un moins réſiſtant, elle ſe rompt toûjours, car il eſt impoſſible que ſa force verticale ou ſa force de pénétrer étant augmentée, elle ne pénétre. Mais quand elle paſſe dans un milieu plus réſiſtant, elle ne pénétrera pas, ſi ſa force verticale n'eſt qu'égale à la ré-

ſiſtance de ce milieu. Cela viendra d'une incidence trop oblique, où le côté vertical aura un trop petit rapport à l'horiſontal. Alors la lumiere ſe réfléchira.

C'eſt donc une erreur que de penſer, comme quelques phyſiciens, qu'une des cauſes du froid de l'hyver eſt l'incidence trop oblique des rayons ſur l'atmoſphere, qui fait qu'il s'en réfléchit une plus grande quantité, perdue pour le climat où eſt l'hyver. L'atmoſphere eſt plus denſe, & réſiſte moins à la lumiere que l'éther d'où elle vient, & par conſéquent ſous quelque angle qu'elle vienne, il s'y en rompt toûjours autant qu'il s'en peut rompre.

Je dis, *autant qu'il s'en peut rompre*, car il eſt certain par des expériences modernes, que la lumiere ne ſe rompt point ſans ſe réfléchir auſſi en partie. Un rayon phyſique, qui, quelque petit qu'il ſoit, eſt toûjours un faiſceau de rayons linéaires, ſi l'on veut, trouve toûjours dans un corps diaphane des parties ſolides qui cauſent des réflexions en même temps que les pores admettent les réfractions.

Juſqu'ici nous n'avons regardé que comme un point ce qui paſſe d'un milieu dans un autre : mais ce n'eſt pas réellement un point, c'eſt une ſphere, quoique très-petite, & ce paſſage eſt à conſidérer. Le chemin d'un point, ce ſeront deux lignes droites différentes, l'une d'incidence, l'autre de réfraction, le chemin de la ſphere ſera compoſé de la ligne droite d'incidence, juſqu'à ce que la ſphere touche le 2d fluide, enſuite d'une courbe qui durera juſqu'à ce que la ſphére y ſoit entierement plongée, enfin d'une droite qui eſt la ligne de réfraction. Cette courbe eſt analogue à celle dont nous avons parlé en 1722, par laquelle dans la réflexion le centre d'une ſphere eſt tranſporté de la ligne d'incidence ſur celle de réflexion. Nous allons prendre le cas où une ſphere paſſe d'un milieu plus aiſé dans un plus difficile. Nous en ſuppoſons toûjours la ſurface horiſontale.

Ce 2d milieu ou fluide réſiſte également à ſa diviſion en tous ſens, c'eſt-à-dire, que ſi une ſphere qui y eſt plongée s'y meut horiſontalement, il lui réſiſte autant que ſi elle étoit

mue verticalement : mais dans le temps qu'elle s'y plonge ; il faut diſtinguer les différentes réſiſtances qu'il lui fait. Elle ne peut le diviſer ou s'y plonger que par ſon mouvement vertical, & ſi ce mouvement n'eſt que vertical, le fluide lui réſiſte d'autant plus que la ſphere depuis le premier point de contact s'enfonce toûjours ſucceſſivement par un plus grand ſegment, juſqu'à ce qu'étant plongée préciſément à moitié, elle n'éprouve plus cette augmentation de réſiſtance, parce que les ſegmens ſuivans ſont toûjours plus petits, & n'ont aucune peine à ſuivre le chemin frayé par celui du milieu.

Cette réſiſtance du fluide qui eſt toûjours plus grande à cauſe de la grandeur croiſſante des ſegmens de la demi-ſphére, eſt toûjours plus grande d'une moindre quantité à cauſe de la poſition des parties de la demi-ſphere, toûjours plus propre à la diviſion du fluide. Car dans le 1[er] inſtant la demi-ſphere préſente au fluide un ſegment infiniment petit horiſontal, infiniment peu propre par ſa poſition à le diviſer, & dans le dernier inſtant, le ſegment qu'elle préſente au fluide eſt vertical, ou lui eſt perpendiculaire. Tous les ſegmens entre le premier & le dernier vont toûjours en s'approchant de la poſition du dernier.

Le mouvement de la ſphere qui n'eſt ſuppoſé que vertical, eſt donc toûjours retardé ; mais toûjours moins retardé depuis l'inſtant où elle touche le fluide, juſqu'à celui où elle a ſon centre ſur ſa ſurface, le chemin de la ſphere n'eſt alors qu'une droite dont les eſpaces égaux ſont parcourus en des temps plus longs, & toûjours plus longs d'une moindre quantité. Mais ſi l'incidence de la ſphere a été oblique, comme ſon mouvement a une direction verticale, & une horiſontale, tout ce qui a été dit ſur la verticale ſubſiſte, à cela près qu'il y faut faire entrer l'horiſontale, qui profite, pour ainſi dire, des pertes de la verticale. C'eſt la même choſe que ſi le mouvement horiſontal étoit toûjours croiſſant, mais croiſſant d'une moindre quantité.

De-là il ſuit que ſi du centre de la ſphere, lorſqu'elle touche le fluide, on mene ſur ce fluide une perpendiculaire, &

ſur cette perpendiculaire des ordonnées qui repréſentent le mouvement horiſontal croiſſant d'inſtant en inſtant, ces Ordonnées ſeront celles d'une courbe, qui aura ſa convexité tournée vers la perpendiculaire au fluide, ou axe. Cette poſition de la courbe à l'égard de ſon axe eſt une ſuite naturelle de ce que le 2[d] fluide eſt ſuppoſé plus difficile à pénétrer que le 1[er]. Le chemin de la ſphere doit s'éloigner de ce 2[d], autant qu'il eſt poſſible.

A cauſe de l'incidence oblique de la ſphere ou de ſon mouvement horiſontal, la courbe n'eſt pas terminée lorſque le centre de la ſphere eſt arrivé ſur la ſurface du 2[d] fluide. Ce fluide réſiſte à ſa diviſion dans le ſens horiſontal, & la demi-ſphere qui n'eſt pas encore plongée, trouve cette réſiſtance à eſſuyer, réſiſtance encore croiſſante, parce que de plus grands ſegmens de la ſphere entiere ſe plongeront toûjours, mais toûjours moins croiſſante, parce que la poſition des nouveaux ſegmens qui viendront après la demi-ſphere, ſera toûjours plus horiſontale. Ainſi le chemin de la ſphere continuera à être courbe, juſqu'à ce qu'elle ſoit entierement plongée, après quoi elle ne ſuivra plus que la droite de la réfraction, derniere tangente de la courbe totale, comme la droite de l'incidence en étoit la premiere.

Le chemin total de la ſphere eſt donc une droite qui devient courbe, & enſuite une courbe qui redevient droite, il paroît que la courbure de cette courbe diminue depuis ſon origine juſqu'à l'extrémité, & que ſa 2[de] portion eſt moins courbe que la 1[re]. Elle n'eſt donc pas compoſée de deux moitiés égales & ſemblables, comme celle de la réflexion. D'ailleurs elle eſt toûjours déſcendante ou montante, au lieu que celle de la reflexion a une moitié deſcendante & une montante.

En donnant pour origine à cette courbe de la réfraction ce qui a été ici ſon extrémité, elle devient celle d'une ſphere qui paſſe d'un milieu plus difficile dans un plus aiſé. Alors ſa concavité eſt tournée vers celui-ci.

Nous nous bornons à cette expoſition très-abrégée de la

théorie de M. de Mairan. Il a donné sur la réfraction comme sur la réflexion des formules algébriques générales, qui comprennent non-seulement tout ce qui est, mais tout ce qu'on peut feindre ou imaginer sans contradiction. Nous avons réduit à ce qui étoit le plus physique & le plus important l'usage de ces formules, qui ont une si grande surabondance de vérité.

MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE EN M. DCCXXIII.

I.

UNE maniere inventée par M. Deschamps entrepreneur des armes du Roi, pour mesurer la force de différens ressorts. Elle consiste à les charger successivement de différens poids au moyen d'une espece de Romaine, & elle a paru bien imaginée, utile, & fort simple. Cette idée a été employée par l'Auteur à perfectionner celle qu'il avoit donnée en 1718 *, de faire sur un même modele toutes les pieces des platines & des batteries des fusils, afin que quelqu'une étant rompue ou perdue, on pût aisément la remplacer, & que le fusil entier ne devînt pas inutile. Il avoit fait réflexion que cela ne suffisoit pas par rapport aux ressorts, qui quoiqu'égaux & semblables, pouvoient avoir différens degrés de force, selon la qualité de l'acier, ou le degré de trempe. En connoissant leur différente force, il pouvoit ajoûter par la trempe à celui qui étoit trop foible, ou ôter par le recuit à celui qui étoit trop roide.

* V. l'Hist. de 1718. p. 74. & 75.

II.

Un porte-vent de cuir proposé par M. des Barrieres pour donner de nouvel air aux ouvriers qui travaillent aux mines, soit à celles de charbon de terre, soit à celles qu'on fait dans les siéges de places. On sçait qu'ils courent risque d'être étouffés

étouffés par la mauvaise qualité de l'air qu'ils respirent dans ces lieux soûterrains, surtout en certaines saisons. Agricola, dans son Traité de *Re Metallica*, a déja donné le même expédient, à cela près qu'il n'a songé qu'à des porte-vents de bois. Ceux de cuir paroissent préférables en plusieurs circonstances.

III.

Des instrumens d'or, tels que des ciseaux, couteaux, poinçons, qui par l'alliage que M. Louis Siriés joint à ce métal, mou de lui-même & flexible, & par la maniere dont il le travaille, sont assez durs pour couper & pour servir dans toutes les occasions où l'on n'a pas besoin de la dureté de l'acier, & de la finesse de son tranchant. Ils ne seront pas sujets à la rouille, & auront encore l'avantage de la propreté, de l'agrément & de la magnificence.

IV.

Trois machines de M. Meynier, qui ont rapport à l'Astronomie.

La 1re est une sphere de carton dans laquelle la terre est placée au centre, suivant le systême de Ptolomée.

Il a disposé autour de la Terre, la Lune, le Soleil, Mars, Jupiter & Saturne; & autour du Soleil, Mercure & Vénus, conformément au sentiment de quelques Anciens.

Les planetes supérieures y ont chacune leur épicycle, par le moyen duquel il représente leurs directions, stations & rétrogradations.

Il a placé vers le bas de cette sphere des cartons diversement inclinés les uns aux autres & au plan de l'écliptique sur lesquels les planetes sont supportées.

Par le moyen de ces cartons où sont marquées les périodes des révolutions de chaque planete, il représente leur mouvement, tant en longitude qu'en latitude, en les faisant tourner avec la main.

On y trouve aussi les jours de la lune & ses phases, le lever & le coucher du soleil pour tous les climats, & l'heure qu'il est à tous les endroits de la terre.

La 2de eſt une horloge dans laquelle eſt repréſentée la révolution du premier mobile, celle du ſoleil de l'orient vers l'occident, & ſon mouvement propre d'occident en orient. Cette horloge, outre les heures ſolaires, marque l'heure du paſſage du point du bélier par le méridien pour toute l'année, le lieu du ſoleil dans le zodiaque, & l'heure de ſon lever & de ſon coucher. Le lieu de la lune y eſt auſſi marqué par une aiguille diſtincte.

La 3me eſt un planiſphere de carton où ſont repréſentées les étoiles autour du pole ſeptentrional, par le moyen duquel la hauteur de l'étoile polaire étant donnée, il détermine la hauteur du pole, & de combien cette étoile eſt éloignée du méridien vers l'eſt ou vers l'oueſt, ce qui peut ſervir à faire connoître la variation de la bouſſole pendant la nuit.

On y trouve auſſi l'heure en mer pendant toutes les heures de la nuit.

Toutes ces machines, qui ont été exécutées par l'inventeur, ont paru fort ingénieuſes, & ont fait connoître également ſon génie dans l'invention, & ſon adreſſe dans l'exécution.

AVERTISSEMENT.

ON a oublié à dire dans l'Hiſtoire, page 32, *ligne* 11, *que la découverte de M. Ruyſch avoit été confirmée par M. Littre, Mem. de* 1700, *p.* 300, *& ſuiv.* 2de *Edit. & par M. Mery, Mem. de* 1701, *p.* 273 *&* 274, 2de *Edit.*

MÉMOIRES



MEMOIRES DE MATHEMATIQUE ET DE PHYSIQUE; TIRÉS DES REGISTRES de l'Academie Royale des Sciences.

Année M. DCCXXIII.

OBSERVATIONS METEOROLOGIQUES faites en 1722.

Par M. MARALDI.

ON a observé encore plusieurs fois l'aurore boréale pendant l'année 1722. Le 7 Janvier le ciel étant couvert, on voyoit du côté du nord les nuages proche de l'ho- 13 Janv. 1723.

rison fort éclairés. Nous avons remarqué la même chose le 8, le 9 & le 12 du même mois.

Cette clarté des nuages étoit fort grande, fort étendue depuis le nord-est jusqu'au nord-ouest, & s'élevoit à la hauteur de 25 degrés, ayant duré depuis 6 à 7^h du soir jusqu'à 11. A toutes ces marques on a conjecturé que la clarté des nuages étoit causée par la lumiere boreale. On a vû les mêmes apparences le 20 Février, le Ciel étant couvert. Le 5 Septembre la lumiere parut fort claire entre les ouvertures des nuages. Nous la vîmes encore le jour suivant 6, le ciel étant fort serein. C'étoit une lumiere fort claire, constante, formée en arc vers sa partie supérieure sans aucune de ces colonnes qui ont coûtume de s'élever perpendiculairement à l'horison, & de se mêler avec la lumiere constante.

Elle parut de nouveau le 10 Septembre fort claire, accompagnée de colonnes. Elle fut encore visible le 16, mais sans colonnes. Enfin on en a vû une foible trace pour la derniere fois de cette année le 14 d'Octobre. C'est la septieme année que ce phenomene paroît depuis sa premiere apparition qui arriva en 1716.

Observations sur la quantité de pluye de 1722.

	lignes		lignes
En Janvier	$4\frac{2}{3}$	En Juillet	$11\frac{1}{3}$
Février	$16\frac{1}{6}$	Août	26
Mars	16	Septembre . . .	23
Avril	4	Octobre	0
Mai	32	Novembre . . .	$10\frac{1}{2}$
Juin	19	Decembre . . .	$12\frac{1}{6}$

La hauteur de la pluie totale de l'année 1722 est de 14 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$. Pendant les six premiers mois de l'année il a plû 7 pouces & 6 lignes, & dans les six derniers mois 7 pouces 0 ligne $\frac{1}{3}$. La pluie de l'année 1722 est donc beaucoup au-dessous de celle des années communes qui est de 19 pouces. Cela n'est pas seulement pour cette année : mais il y

en a huit de ſuite qu'il arrive la même choſe; car depuis 1713 la quantité de pluie a toûjours été beaucoup au-deſſous de la commune : ainſi il ne faut pas s'étonner ſi les ſources ont fort diminué depuis quelques années à l'égard de ce qu'elles étoient les années précédentes.

Quoique la quantité de pluie de l'an 1722 ait été plus grande que celle des années précédentes, il n'y a pas eu cependant une ſi grande abondance de blés; ce qui peut venir en partie de ce que la pluie n'eſt pas tombée dans des intervalles de tems les plus propres pour la fécondité de la terre, & qu'elle a été diſtribuée aſſez inégalement. En effet durant le mois d'Avril il n'a tombé que 4 lignes de pluie, au lieu qu'il y en a eu 32 lignes dans le mois de Mai. Il eſt peut-être ſans exemple dans ce climat qu'il ſe ſoit paſſé un mois entier ſans pleuvoir, comme il eſt arrivé en Octobre, ce mois ayant preſque toûjours été ſerein, ce qui a rendu l'automne agréable.

M. Guillin, Ingénieur à Bergue-St-Vinox, a fait dans la même Ville les obſervations de la quantité de pluie qui eſt tombée depuis le mois de Février 1719, juſqu'au mois d'Avril de 1722 avec la même méthode que l'on pratique à l'Obſervatoire, & il a envoyé ces obſervations à M. l'Abbé Bignon. Depuis le commencement de Février 1719 juſqu'à la fin de l'année, la hauteur de la pluie tombée à Bergue eſt de 17 pouces 10 lignes. Celle de toute l'année 1720 eſt de 22 pouces 8 lignes $\frac{1}{6}$, & celle de 1721 eſt de 29 pouces 10 lignes.

Par les obſervations faites à Paris, la hauteur de la pluie en 1719 ne fut que de 9 pouces 4 lignes. La différence entre l'une & l'autre eſt au moins de 8 pouces. En 1720 à Paris la pluie fut de 17 pouces, & par conſéquent 5 pouces moins qu'à Bergue; & en 1721 elle a été de 14 pouces, plus de 15 pouces moins qu'à Bergue. D'où il paroît qu'il pleut beaucoup plus à Bergue qu'à Paris. On avoit déja remarqué par les obſervations faites à Pont-briant, comparées avec celles qu'on avoit faites en même

tems à Paris, que proche de la mer il pleut en plus grande abondance qu'au milieu des terres, peut-être à cause que proche de la mer les nuages doivent être plus chargés d'humidité. On a remarqué aussi que dans les pays de montagnes il en tombe une plus grande quantité que dans les plaines; ce qui vient de ce que les nuages qui sont chassés par les vents, sont arrêtés par les montagnes, lorsqu'ils les rencontrent, & s'y convertissent en pluie, qui par cette raison y doit être en plus grande abondance que dans les plaines, où il n'y a rien qui arrête ces nuages qui sont chassés par les vents.

Observations sur le Barometre.

La plus grande hauteur du barometre simple a été à 28 pouces 7 lignes $\frac{1}{4}$: il s'est trouvé dans cet état en Janvier pendant quatre jours, c'est-à-dire, depuis le 2 jusqu'au 5 inclusivement. Le ciel étoit alors couvert avec un grand brouillard & l'air tranquille. Cette hauteur est peut-être la plus grande où le mercure soit arrivé dans ce climat depuis que l'on fait ces observations.

M. Cassini dans son Traité de la comete, remarque que le premier de Janvier 1681 le barometre étant à 28 pouces 4 lignes $\frac{1}{2}$, c'étoit la plus grande hauteur où il l'avoit vû depuis plusieurs années. M. de la Hire ne l'a jamais observé plus haut que 28 pouces 5 lignes. Par les observations de l'année 1721 nous le trouvâmes le 18 & le 20 de Janvier à 28 pouces 6 lignes; ainsi en 1722 il a été une ligne & demie plus haut qu'il n'avoit été auparavant dans la plus grande hauteur. Dans cette grande élevation le ciel a été toûjours couvert, comme il a continué de faire durant les quinze premiers jours de Janvier. Le jour de la plus petite hauteur du barometre a été le 31 Decembre par un vent de sud-ouest violent: il se trouva ce jour-là à 27 pouces une ligne $\frac{1}{2}$.

Le plus grand froid de l'année marqué par le thermometre est arrivé le 24 Janvier, ayant descendu ce jour-là à 25

parties. Cette ſituation eſt à peu-près l'état moyen entre le temperé qui arrive à 48 degrés, & le plus grand froid qui eſt à zero.

Dans les plus grandes chaleurs de 1722 le même thermometre eſt monté à 72 degrés, ce qui eſt arrivé le 15, le 16 & le 27 Juin à 3 heures après midi, qui eſt l'heure de la plus grande chaleur du jour. Le vent étoit ces jours-là ſud ou ſud-eſt. C'eſt preſque toûjours avec ces vents que ſont accompagnées les grandes chaleurs de l'été, qui ont été fort modérées durant cette année, le thermometre n'étant monté qu'à 72, au lieu que dans les plus grandes chaleurs des années précédentes, il s'étoit élevé à 82 parties. Cette année les plus grandes chaleurs ſont arrivées au mois de Juin, au lieu que dans la plûpart des années elles arrivent au mois de Juillet & d'Août.

Déclinaiſon de l'aimant.

La déclinaiſon de l'aimant obſervée le 22 Novembre 1722 & le 4 Janvier 1723 avec une bouſſole de 4 pouces, a été trouvée de 13° 0′ nord-oueſt, préciſément telle qu'elle a été trouvée avec la même bouſſole en 1721 & en 1722. La déclinaiſon ne varie donc pas depuis trois ans, & par conſéquent elle eſt ſtationaire. En 1716 nous trouvâmes la déclinaiſon de 12° 30′: & comme elle varioit auparavant de 12 minutes par an, ſi depuis 1716 elle avoit fait le même progrès qu'elle faiſoit auparavant, elle auroit été cette année de 14 degrés. La différence entre l'obſervation & le progrès qu'elle auroit dû faire ſi elle avoit continué de décliner, eſt un degré, ce qui ſeroit ſenſible. Il eſt donc certain qu'elle ne continue pas de varier, & qu'elle eſt ſtationaire.

DE L'ORIGINE ET DES USAGES DE LA PIERRE DE FOUDRE.

Par M. DE JUSSIEU.

RIEN n'eſt ſi connu dans la république des Lettres que le mérite que les Anciens, & qu'une tradition qui depuis eux s'eſt même conſervée parmi nous, ont attribué à la *pierre de foudre*.

L'explication du nom de *ceraunia* qu'elle porte, nous apprend qu'ils la croyoient deſcendre du ciel dans le moment que le tonnerre éclatoit & tomboit ſur quelque endroit que ce fût de la terre.

Cette prétendue origine la faiſoit regarder avec une eſpece de reſpect qui avoit rapport à la majeſté du Dieu qu'ils s'imaginoient l'avoir lancée. Auſſi Pline la met-il dans le nombre des pierres précieuſes.

Mais il n'y a point eu de peuples qui en ayent fait plus de cas que ceux du nord, par la ſuperſtition qu'ils attachoient à ces pierres, qui étoit que comme ils avoient autrefois adoré une idole qu'ils croyoient préſider à la foudre, & qu'ils repréſentoient avec la foudre à la main ſous la figure d'une de ces pierres taillées en coin, ils conſervoient chez eux une de ces ſortes de pierre comme un préſervatif contre la foudre, qu'ils croyoient éloigner de leurs maiſons, lorſqu'au premier bruit du tonnerre qu'ils entendoient, ils avoient frappé de ces pierres trois fois les endroits par leſquels le tonnerre auroit pû entrer.

Helwing, celebre Miniſtre d'Angerbourg en Pruſſe, qui a fait un Traité particulier des pierres de ſon pays, dit qu'il lui a fallu recourir au bras ſéculier pour détruire cette ſuperſtition dans le lieu où il exerçoit ſon miniſtere; ſuperſti-

tion qui étoit d'autant plus enracinée, qu'elle étoit entretenue par les découvertes continuelles qui s'y faisoient de ces sortes de pierres, dont ces peuples ne pouvoient s'imaginer que la figure n'eût quelque chose de mystérieux.

Cette nation sembleroit s'être accordée en cela avec les Chinois, chez lesquels Rumphius, qui nous a donné des figures de ces sortes de pierres dans son Recueil de coquilles, nous assûre qu'une pareille idée a pour fondement l'observation qu'ils font sur la figure, sur la qualité & la couleur de ces sortes de pierres, & sur les endroits sur lesquels il s'en trouve qui sont souvent des troncs d'arbre qu'ils s'imaginent avoir été frappés de la foudre.

Quelque éloignés que nous soyons de semblables idées, nous n'avons pas laissé de croire jusqu'ici que le *ceraunia* est une pierre naturelle dont le caractere est d'être figurée ou en coin ou en fer de fleche de la même maniere que la figure ovale, la cylindrique, la prismatique & l'orbiculaire sont les caracteres des cailloux de Meudoc, de l'émeraude, de quelques crystaux, & des échinites.

Mercati, tout éclairé qu'il étoit dans l'histoire des fossiles, n'a pas voulu tellement adhérer à l'opinion que ces sortes de pierres ayent éte taillées de cette forme, qu'il ait renoncé au sentiment de ceux qui en admettent la possibilité naturelle sous le nom de *jeu de nature*.

Mais aujourd'hui un peu d'attention à deux ou trois especes de pierres qui nous viennent, les unes des Isles d'Amérique, & les autres de Canada, est capable de nous détromper de ce préjugé, du moment que nous apprenons, à n'en pas douter, que les sauvages de ces pays-là se servent à différens usages de pierres à peu-près semblables, qu'ils ont taillées avec une patience infinie par le frottement contre d'autres pierres, faute d'aucun instrument de fer, ni d'acier.

Les premiers besoins des Sauvages sont ou de couper & fendre du bois, ou de se faire des armes dont ils puissent tuer des animaux pour leur subsistance, ou de se défendre contre leurs ennemis.

La figure de hache & de celle de coin qu'ils ont donnée à quelques pierres que nous avons tirées d'eux, nous marque assez qu'ils les ont taillées pour les premiers de ces usages, & celle de pointe qu'ils ont données à quelques pierres à feu que nous voyons adroitement entées sur l'extrémité de certains bois menus & longs, nous font assez connoître qu'ils s'en servent comme de fleches.

J'en rapporte une piece originale de chacun de ces instrumens; l'une qui est en forme de hache, tirée des Caraïbes; la seconde qui ressemble à un coin, apportée du Canada; & la troisieme, qui sont trois fleches, chacune ayant pour armure, au lieu d'une pointe d'acier, un fragment triangulaire de pierre à feu, aiguisé par l'angle qui lui sert de pointe, & tranchant des deux côtés.

Lorsque nous voyons donc parmi les figures de ceux qui ont fait des recueils de pierres figurées, celles qui se rapportent à quelqu'une de ces trois formes, & sur-tout à celle de coin & à celle de fer de fleche qui ont toûjours passé jusqu'ici pour *pierres de foudre* & pour mystérieuses, nous ne devons point hésiter de les regarder comme instrumens répondans à ceux d'acier, auxquels ils ressemblent, & qui ont été taillés ou par les premiers habitans de ces pays où on les trouve, ou y avoient été apportés par des étrangers qui en faisoient une sorte de commerce. Ce qui donne lieu à cette conjecture est que dans la plûpart des pays où se trouvent ces sortes d'instrumens, on n'y voit point ni carriere ni caillou de la même nature qui ait pû servir pour les y fabriquer sur les lieux, & que par conséquent il y avoit beaucoup d'apparence que des habitans d'un pays où se rencontrent des cailloux d'un grain aussi fin & d'une espece aussi dure, venoient les échanger contre d'autres denrées: & ce qui acheve de confirmer cette conjecture, est que la même chose se pratique encore chez les Sauvages, parmi lesquels ceux qui ont plus d'adresse & de patience pour tailler ces sortes d'instrumens, les fournissent aux autres qui sçavent peut-être mieux s'en servir.

Les

Les peuples de France & d'Allemagne, & des autres pays du Nord, pour ce qui est de la découverte du fer, sont assez semblables à tous les sauvages d'aujourd'hui, & n'avoient pas moins besoin qu'eux, avant l'usage du fer, de couper du bois, de séparer des écorces, de fendre des branches, de tuer des bêtes sauvages, de chasser pour leur nourriture, & de se défendre de leurs ennemis, ce qu'ils ne pouvoient guere exécuter qu'avec de tels instrumens, qui n'étant pas comme le fer sujets à la rouille, se retrouvent aujourd'hui dans la terre en leur entier, & presque avec leur premier poli.

Comme il est assez ordinaire que des choses d'un genre très-différent portent quelquefois le même nom, & que celui de *pierre de foudre* qui ne devoit convenir qu'à celle que j'ai décrite, se donne encore en françois à une espece de marcassite vitriolique, de figure ou oblongue ou arrondie, tantôt hérissée de pointes, tantôt lisse & tantôt à facettes, je suis bien aise d'avertir qu'elle ne doit point être confondue avec cette premiere, non-seulement parce qu'elle ne lui ressemble en rien par rapport à la figure, & qu'au contraire elle en est très-différente par les proprietés qu'elle a de fuser & de se convertir en vitriol, lorsqu'elle est exposée à l'air, au lieu que celle dont je parle, est une vraie pierre très-dure, d'un grain si fin qu'elle sert de pierre de touche pour les métaux, & à polir différens ouvrages.



SUR LES FIGURES INSCRITES ET CIRCONSCRITES AU CERCLE.

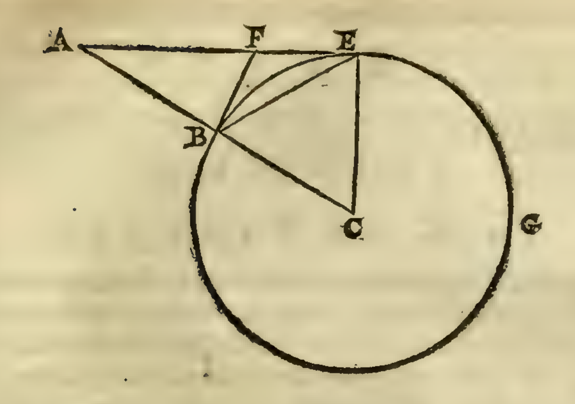
Par M. SAURIN.

3. Fevrier 1723.

C'EST une proprieté de ces figures, très-connue des géometres, que l'aire d'une figure inſcrite eſt moyenne proportionnelle géométrique entre l'aire de l'inſcrite & celle de la circonſcrite qui ont la moitié moins de côtés. Ainſi, par exemple, l'exagone inſcrit eſt moyen proportionnel géometrique entre le triangle équilatéral inſcrit & le triangle équilatéral circonſcrit; l'octogone entre le quarré inſcrit & le circonſcrit; le décagone entre le pentagone inſcrit & le circonſcrit, &c. Mais je ne ſçai ſi l'on a remarqué de même dans ces figures une autre proprieté qui a du rapport à celle-là, & qui ne mérite pas moins d'être remarquée; c'eſt que l'aire de toute figure réguliere circonſcrite au cercle, eſt moyenne proportionnelle harmonique entre l'aire de la même figure inſcrite & celle de la circonſcrite qui a la moitié moins de côtés; ainſi l'exagone circonſcrit eſt moyen proportionnel harmonique entre l'exagone inſcrit & le triangle équilateral circonſcrit; l'octogone circonſcrit entre l'octogone inſcrit & le quarré circonſcrit; le décagone circonſcrit entre le dodécagone inſcrit & le pentagone circonſcrit, &c.

Voici comme je démontre cette proprieté, qui s'eſt préſentée à moi par haſard, en examinant par ordre de l'Academie une prétendue quadrature du cercle.

Soit mené dans le cercle *BEG* le côté *BE* d'une figure réguliere le rayon *CE*; la tangente *EA* qui rencontre en *A*, *CB* prolongé & la tangente *BF*, rencontrant en *F* la tangente *EA*, il eſt évident que *BEC* étant une partie de la fi-



gure inſcrite, *BFE* une partie correſpondante de la même figure circonſcrite, & *ACE* une partie de la circonſcrite qui a la moitié moins de côtés : ce qu'on démontrera de la partie *ACE* par rapport aux parties *BFEC*, & *BEC* ſera démontré des figures entieres.

Les triangles *ACE* & *BEC* ayant même hauteur, ſont entr'eux comme leurs baſes *AC*, *BC*; il faut donc démontrer que *ABF* qui eſt l'excès dont *ACE* ſurpaſſe *BFEC* eſt à *BFE*, excès dont *BFEC* ſurpaſſe *BEC*, comme *AC* à *BC*.

Les triangles *ABF* & *BFE* ſont entr'eux comme *AF* à *FE*, ou (à cauſe que *FB* eſt égale à *FE*) comme *AF* à *FB*. Mais les triangles *ABF* & *ACE* étant rectangles & ayant l'angle *BAF* commun, ſont ſemblables. Donc *AF* eſt à *FB* comme *AC* à *CE*; ou *CE* étant égale à *CB*, comme *AC* à *CB*, donc les triangles *ABF*, *BFE*, ſont entr'eux comme *AC* à *CB*. Ce qu'il falloit démontrer.



EXAMEN

D'une MATIERE CUIVREUSE, *qui est une espece de verd-de-gris naturel.*

Par M. DE REAUMUR.

13 Fevr. 1713.

S'IL est des délassemens loüables, ce sont certainement ceux qui contribuent à étendre nos connoissances. Il est rare que les particuliers les choisissent, & au moins aussi rare qu'ils soient du goût des Princes. Il n'en est pourtant point de plus agreable pour S. A. S. Monseigneur le Duc de Chartres que ceux de cette espece. Dans les instans qu'il ne doit point aux plus importantes occupations, rien ne l'amuse davantage que ce qui peut lui donner de nouvelles connoissances, sur-tout par rapport à l'histoire naturelle & à la physique. Comme ce goût, si estimable, est très-connu, on s'empresse à lui offrir ce que ces sciences ont de nouveautés curieuses ou utiles. Il y a quelque temps qu'on lui présenta divers morceaux de la matiere minerale dont je vais parler, & ce sont les ordres que me fit l'honneur de me donner S. A. S. qui m'ont engagé à l'examiner.

Cette matiere a été apportée des Indes par morceaux de figures irrégulieres & de différentes grosseurs. Un de ceux qui m'a été remis avoit au moins six pouces & demi de diametre, dans le sens où il en avoit le plus, & environ quatre dans celui où il en avoit le moins. La couleur seule de cette matiere inviteroit à l'observer; elle est du plus beau verd & du plus vif, tirant sur celui des émeraudes. Mais ce verd est principalement remarquable par un œil soyeux & satiné, qu'on ne trouve point dans les verds des pierres & des plantes. Cet œil satiné est une suite de la structure de notre mineral. Quelque part où on le casse, il ne semble qu'un amas de végétations *; on voit par-tout des especes de bran-

* Fig. 1.

chages qui par leurs contours imitent ceux des arbrisseaux, ou au moins les plus belles de ces productions de la Chymie auxquelles on a crû devoir donner le nom de *végétations*. Plusieurs de ces branchages partent d'une même base, & forment ensemble une même touffe *. Chaque morceau de notre mineral est composé d'un grand nombre de pareilles touffes de différentes hauteurs; les unes n'ont qu'un pouce, d'autres en ont trois ou quatre; tantôt c'est du sommet de l'une, tantôt c'est du côté & vers le milieu d'une autre qu'une nouvelle touffe s'éleve. Les différens branchages sont assez serrés les uns contre les autres pour composer une masse compacte; ils ne laissent guere de vuides considérables, il y a pourtant des endroits où les vuides sont sensibles. * Fig. 2.

Ces branchages sont la premiere singularité de la structure de notre mineral; leur composition propre en est une autre. Ils sont faits chacun d'une infinité de filets * extrèmement déliés, appliqués les uns contre les autres; chaque branchage est un paquet de ces filets *. Delà vient que la couleur du minéral a un air soyeux & satiné; tel que l'auroient des paquets de fil de soie, s'ils pouvoient avoir tout l'éclat d'une matiere naturellement plus compacte & plus polie que la soie. En un mot, sa structure ressemble à celle de l'amiante & à celle de certains gyps singuliers formés par filets. Cette matiere est médiocrement dure, à peu-près comme le sont l'alun & le vitriol: mais elle est plus friable entre les doigts; si on l'y frotte, on la divise assez souvent en petits brins d'une finesse extrème. * Fig. 5. * Fig. 4.

Elle est pesante; elle est absolument insipide au goût, mais il est de la prudence de la goûter sobrement. Elle ne se dissout point, ou se dissout peu dans l'eau commune.

La pesanteur de cette matiere dispose naturellement à la regarder comme métallique, & sa couleur conduit à penser qu'elle n'est qu'un cuivre déguisé, un cuivre préparé par la nature, comme notre verd-de-gris est un cuivre préparé par l'art, en un mot qu'elle est une espece de verd-de-gris naturel. J'ai d'autant moins douté qu'elle ne fût de nature

cuivreuse, que j'en ai trouvé de semblable, mais en petite quantité, au milieu de quelques morceaux de mine de cuivre du Royaume.

Pour m'assûrer davantage de sa nature, j'en suis venu aux essais. J'ai commencé, comme on commence toûjours pour préparer les mines à être essayées, par la faire piler, & réduire en poudre très-fine. On sçait qu'avant d'en venir à séparer, par la fusion, la matiere métallique des autres matieres avec lesquelles elle peut être mêlée, on fait rôtir la mine, & que pour de simples essais en petit, cette opération se fait dans une cuillere de fer mise sur le feu; qu'on y chauffe à différentes reprises la poudre minérale jusques à rougir. Cette manipulation change ordinairement la couleur de la poudre minérale. Elle a aussi enlevé à la nôtre sa couleur verte; elle lui en a donné une noire, elle l'a rendue semblable à du charbon pilé.

Pour en venir à l'essai, j'ai mis de cette poudre dans un creuset, exposé d'abord à un feu médiocre que par la suite j'ai rendu plus vif, & bien-tôt j'ai eu une nouvelle preuve de sa nature cuivreuse. Il s'est bien-tôt échapé une flamme verdâtre entre les bords du creuset & ceux de son couvercle; une flamme toute pareille à celle qui paroit lorsqu'on brase quelque piece de fer avec du cuivre. Le feu étant poussé ensuite assez vigoureusement, la matiere a fondu. Quand j'ai cru le degré de fusion suffisant, j'ai retiré le creuset du feu, & l'ai laissé refroidir; l'ayant cassé ensuite, j'ai trouvé au fonds du creuset un culot assez semblable par sa couleur à du cuivre de rosette, mais d'une matiere cassante comme du verre.

Il est rare que les matieres minérales contiennent un metal assez peu déguisé pour qu'un essai aussi simple que celui dont je viens de parler le fasse paroitre sous sa forme metallique. Il y a même des mines, de toute espece, qui ne seroient pas mises en fusion par une opération si peu composée. Enfin les mines de cuivre fondues même avec les secours de différens fondans, ne donnent d'abord qu'une

matiere caſſante comme celle dont je viens de parler, mais qui n'a nullement la couleur du cuivre, qui eſt noire, & qu'on appelle auſſi du *cuivre noir*.

La couleur de la matiere venue de ces eſſais m'a fait conclurre que nôtre mine contenoit un cuivre qui pour être revivifié, ne demandoit qu'à être pénétré de parties ſulphureuſes, dont apparemment il avoit été dépouillé. J'ai donc cru que pour tout appareil il ſuffiroit de mettre notre poudre minérale dans un creuſet où elle ſeroit entourée de poudre de charbon. J'ai peſé dans les balances d'eſſai un quintal de cette poudre. On ſçait que le quintal d'eſſai eſt un très-petit poids, & n'eſt ordinairement qu'un gros. J'ai mis de la poudre de charbon dans le fonds d'un petit creuſet, j'ai mis au deſſus notre quintal ou gros de mine, & j'ai achevé de remplir le creuſet avec de la poudre de charbon, je l'ai enſuite expoſé à la forge au feu du ſoufflet; dans moins d'une demi-heure la matiere a été fondue. Quand le creuſet a été refroidi, j'ai trouvé au fond un bouton ou culot de cuivre malléable qui peſoit ſoixante-dix de nos petites livres, c'eſt-à-dire, ſoixante-dix parties de la maſſe que j'avois peſée. Probablement elle en eût peſé davantage, ſi le creuſet eût été plûtôt tiré du feu; mais je cherchois plus à m'aſſûrer de la qualité de la matiere que de ſa quantité.

Le culot de matiere caſſante que j'avois eu par mon premier eſſai, ayant été remis au feu au milieu de la poudre de charbon, y a été auſſi revivifiée en véritable cuivre: il eſt devenu une matiere malleable.

J'ai voulu eſſayer la même matiere par des procedés plus compoſés qu'on ſuit, & qu'il eſt néceſſaire de ſuivre pour d'autres matieres minerales, c'eſt-à-dire, en répétant les fuſions, comme il eſt enſeigné dans Erker, & ailleurs, & y ajoûtant différens ſels. Par le moyen de ces eſſais, j'ai auſſi tiré du cuivre de notre minéral, mais bien moins que par le moyen de la ſeule poudre de charbon.

Nous pouvons donc regarder cette matiere minérale comme un cuivre qui a été diſſous, & à qui ſa matiere huileuſe

a été enlevée. C'eſt un verdet naturel, différent pourtant de l'ordinaire, non-ſeulement par ſa couleur, mais encore par ſa compoſition. J'ai mis notre verd-de-gris commun dans un creuſet au milieu de la poudre de charbon, il ne s'y eſt point fondu, il n'y eſt point redevenu cuivre. Pourquoi cela? C'eſt que notre verdet eſt du cuivre diſſous par les acides du vin, du cuivre pénétré par ces acides; mais pendant cette diſſolution la partie huileuſe de ce cuivre n'a point été enlevée. Le verdet artificiel ſemble donc différer de notre verdet naturel, en ce que le dernier eſt dépouillé de ſa partie huileuſe, au lieu que l'autre a conſervé la ſienne; peut-être different-ils encore par la quantité & la qualité des acides dont ils ſont pénétrés.

Qu'on tire au moins de ce que nous venons de dire, une remarque pour ſe conduire dans les eſſais des mines de cuivre, c'eſt qu'il y en a qu'il faut eſſayer avec la poudre de charbon ſeule, & qu'on eſſayeroit avec moins de ſuccès avec les ſels: tels ſont celles qui ont été dépouillées de leur matiere ſulphureuſe.

Nous pouvons donc regarder notre minéral comme une diſſolution de cuivre qui s'eſt enſuite cryſtalliſée en formant différens branchages. Auſſi avons-nous fait remarquer que les fragmens des branches ſemblent de vrais cryſtaux, des eſpeces d'émeraudes moins tranſparentes que les véritables. Mais la beauté de la couleur des cryſtaux de nôtre mine fait voir que le cuivre préparé par la nature d'une matiere ſemblable, peut donner aux pierres tranſparentes avec leſquelles il ſera mêlé la plus belle couleur verte, qu'il en peut faire de véritables émeraudes.

Si on nous demandoit ſi ces cryſtaux ont été formés par un ſuc chargé de matiere cuivreuſe, qui par ſon propre poids perçoit des terres, dans les cavités deſquelles il dépoſoit des parties qui s'arrangeoient en branchages; ou ſi ces touffes ont été formées comme les végétations chymiques, par un liquide qui s'élevoit, & ne pouvoit porter les parties métalliques que juſques à une certaine hauteur: ſi, dis-je, on nous

le

le demandoit, nous répondrions que nous n'avons pas assez de faits pour décider de laquelle des deux manieres s'est faite cette production. Il faudroit même pousser les expériences plus loin que nous ne l'avons fait, pour décider quel est précisément le sel qui a dissous le cuivre, quoique, selon les apparences, il soit de la nature de l'acide vitriolique.

Les filets, qui rendent la structure de ce minéral remarquable, ne sont point un phénomene particulier qui ait besoin d'être expliqué, dès qu'il n'est qu'une matiere métallique dissoute par beaucoup de sels; il est ordinaire à bien des sels de se disposer par aiguilles. On sçait que les pyrites ne sont qu'un composé de soufres & de sels; quand on les garde plusieurs années, & surtout si elles sont exposées à l'humidité de l'air, elles s'y dissolvent, leur surface se couvre d'aiguilles de sel; souvent ces sels s'y arrangent par touffes composées de filets blancs, qui semblent autant de petites touffes de soie.

Nous n'avons rien dit d'un autre phénomene, que nous avons observé pendant que nous faisions rôtir notre matiere, qui peut-être ne doit pas être oublié, quoiqu'il ne lui soit pas particulier. Pendant qu'on rôtit la poudre fine de ce minéral, pendant que la couleur verte se change en une couleur noire, il s'y fait des bouillonnemens assez singuliers, & ils le sont d'autant plus que la poudre a été mise dans un vase plus étroit. On voit, par exemple, mieux ce bouillonnement dans un creuset conique que dans une cuilliere de fer. Ces bouillonnemens se font en différens endroits, & continuent pendant quelque temps dans les mêmes endroits où ils ont commencé. La poudre s'éleve sur chacun de ces endroits à la hauteur d'un pouce & d'avantage; au-dessous de l'endroit où elle a commencé à saillir, il se forme un petit trou en maniere de tremie, & c'est par ce même trou que de nouvelle poudre sort continuellement. Le bouillonnement qui a commencé, continue, quoiqu'on retire le creuset du feu. Si ce bouillonnement cesse quelque part, dans le temps que la poudre a encore un degré de chaleur considé-

rable, on n'a qu'à percer la ſurface en un autre endroit pour déterminer un nouveau jet de poudre à s'y former.

La cauſe de ce bouillonnement ne peut être attribuée qu'aux parties volatiles qui ſe dégagent de notre poudre, quand elle a pris un certain degré de chaleur; on les ſuppoſera ſulphureuſes, ſalines, ou ſi l'on veut, ſimplement aqueuſes, il n'importe pour l'explication de ce fait. Il ſuffit qu'on imagine qu'une vapeur cherche à s'élever de tous les petits grains, qu'une partie de la vapeur a la force de percer la ſurface, qu'elle s'échape, & qu'elle forme une route où de nouvelle vapeur va ſe rendre. Les petits trous en tremie qui paroiſſent enſuite ſont tout autant de cheminées vers où cette vapeur ſe dirige; cette eſpece de fumée emporte les grains qu'elle rencontre en ſon chemin, elle les enleve même aſſez haut.

Une vraie preuve que c'eſt l'évaporation d'une matiere très-volatile qui produit cet effet, c'eſt que ſi la poudre eſt rotie à un certain point, on a beau la chauffer, il ne s'y formera plus de jets, plus de bouillonnemens. Cet effet doit être d'autant plus conſidérable que la poudre ſera plus légere, & qu'elle fournira plus de vapeurs.

J'ai voulu eſſayer ſi la poudre de charbon ne produiroit pas le même effet; elle ne bout point d'elle-même comme la nôtre, mais on peut la déterminer à boüillir, à donner de petits jets, il n'y a qu'à la percer quand elle eſt très-échauffée: les jets feront moins conſidérables que ceux de notre matiere, mais ils ſeront ſemblables.

La poudre de charbon peut encore ſervir à nous faire voir la vraie cauſe du bouillonnement de notre poudre; je l'ai fait extrèmement chauffer dans un creuſet, & j'ai ſubitement plongé le creuſet chaud dans l'eau froide, auſſi-tôt le charbon s'eſt élevé en jets, il s'y eſt formé grand nombre de bouillonnemens & beaucoup plus conſidérables que ceux dont j'ai parlé ci-deſſus; l'eau imbiboit le creuſet; après l'avoir traverſé, elle s'élevoit en vapeurs, aſſez fortes pour porter haut la poudre qui s'oppoſoit à leur paſſage. La preuve

qu'une pareille vapeur s'élevoit du creuſet, c'eſt que quand il a été refroidi, ſes parois intérieures ont paru très-humides.

On ſçait auſſi que le plâtre, chauffé ſur le feu dans quelque vaſe, y bout : mais j'ignore ſi on a obſervé que la cauſe de ſon bouillonnement n'eſt dûe qu'à une vapeur aqueuſe qui cherche à s'élever. La preuve en eſt que l'expérience réuſſit d'autant mieux que le plâtre a été plus long-temps expoſé à l'humidité de l'air, & que lorſqu'il a été chauffé juſques à un certain point, ou pendant un certain temps, alors il ne bout plus.

Pour produire une eſpece de bouillonnement dans une poudre, il faut donc, comme nous l'avons déja remarqué, que deux circonſtances concourent; ſçavoir, que les parties de la poudre ſoient légeres & fines, & qu'elles ſoient propres à fournir quelques vapeurs, ou qu'elles ſoient humides. Voici la preuve de la néceſſité de l'une & de l'autre de ces circonſtances. J'ai tenté de faire bouillir de la poudre d'os brûlés, elle eſt très-péſante, auſſi n'a-t-elle donné aucun boüillonnement, quand elle a eu un degré de chaleur qui eût ſuffi à faire bouillir le plâtre. J'ai jetté deſſus une goutte d'eau, ou pour rapporter plus naïvement l'expérience, j'ai craché deſſus, aucun bouillonnement ne s'eſt fait encore dans cet inſtant : mais ayant mêlé la poudre avec un bâton, afin qu'elle recouvrît la ſalive que j'y avois jettée, alors les boüillonnemens ont commencé. Il s'en faiſoit de nouveaux partout où je conduiſois la poudre humectée au-deſſous de la poudre ſeche, les bouillonnements étoient très-conſidérables, la quantité de la vapeur forçoit la poudre, quoique péſante, à s'élever très-haut.

La glaiſe pilée & réduite en poudre très-fine, le marbre pilé, & en général toute matiere réduite en poudre fine, font voir de pareils bouillonnements, ſi ces matieres ſont un peu humides; & cela ſera commun, comme nous l'avons dit, à toute poudre fine & légere, tant qu'elle laiſſera évaporer ſur le feu une ſuffiſante quantité d'humidité. Des vapeurs d'une autre eſpece qui s'éleveroient en auſſi grande

quantité, ou avec autant de force, produiroient le même effet, car cet effet n'est point celui de l'eau, c'est celui de la vapeur en général.

EXPLICATION DES FIGURES.

La FIGURE I. représente un morceau de notre minéral cuivreux diminué de volume.

La FIG. II. représente une des touffes dont la masse précédente est formée.

La FIG. III. est une portion de touffe grossie à la loupe.

La FIG. IV. est un des branchages de la touffe, grossi au microscope, pour faire l'arrangement des filets dont il est composé.

La FIG. V. est celle des filets qui composent les branchages.

SECONDE PARTIE DU CALCUL DES DIFFERENCES FINIES.

Par M. NICOLE.

18 Avril 1723.

JE me propose dans ce Mémoire, de donner des méthodes pour sommer des suites de grandeurs, dont chaque terme est composé des produits de tant de facteurs qu'on voudra, augmentant selon une loi quelconque, mais uniforme, soit que ces suites soient formées par des nombres entiers, ou des fractions, & qu'elles soient composées d'un nombre fini de termes pour les grandeurs entieres, & d'un nombre fini ou infini de termes pour les grandeurs rompues.

Toutes les suites qui peuvent être sommées par la méthode que l'on explique dans ce Mémoire, ne peuvent l'être par celles que j'ai données sur cette matiere dans un Mémoire imprimé en 1717, dans lequel cette seconde Partie a été annoncée.


fig. 2.
fig. 4.


Mem de l'Acad. 1723. Pl. 1. pag. 20
fig. 1.
fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.

On divise cette seconde Partie en deux sections, dont la premiere regardera les suites composées de nombres entiers, & la seconde celles composées de fractions.

SECTION I.

Des suites composées de nombres entiers.

Soit cette suite $x . \overline{x+n} . \overline{x+2n} . \overline{x+3n} + \overline{x+m} . \overline{x+m+n} . \overline{x+m+2n} . \overline{x+m+3n} + \overline{x+2m} + \overline{x+2m+n} . \overline{x+2m+2n} . \overline{x+2m+3n} +$ &c. dans laquelle les facteurs d'un même terme augmentent de la grandeur constante n, & pour devenir les facteurs du terme suivant, ils augmentent de la grandeur constante m.

Lorsque ces deux grandeurs m & n sont égales, la suite devient $x . \overline{x+n} . \overline{x+2n} + \overline{x+n} . \overline{x+2n} \; \overline{x+3n} +$ &c. où l'on voit que le premier facteur du second terme est le second facteur du premier terme, & ainsi des autres. Ce qui est le cas du Mémoire imprimé en 1717, où l'on a donné une méthode pour prendre la différence de telles suites, & la maniere de les intégrer. Cette méthode ne peut satisfaire qu'à un petit nombre de cas, puisque le premier facteur du second terme peut être à telle distance indéterminée qu'on voudra du premier facteur, & ainsi des autres.

PROPOSITION I.

Soit cette expression algébrique $x . \overline{x+n}$ composée de deux facteurs dont on demande la différence, en supposant que l'augmentation faite à x soit m, cette expression devient par cette augmentation $\overline{x+m} . \overline{x+m+n}$; la différence de l'une à l'autre est donc $\overline{x+m} . \overline{x+m+n} - x . \overline{x+n}$, & en mettant pour $\overline{x+m}$, $\overline{x+n+m-n}$, on aura

$\overline{\overline{x+n}+\overline{m-n}}\times\overline{\overline{x+2n}+\overline{m-n}}-x.\overline{x+n}$, la multiplication étant faite, il vient $\overline{x+n}.\overline{x+2n}+\overline{x+n}.\overline{m-n}+\overline{x+2n}.\overline{m-n}+\overline{m-n}^2-x.\overline{x+n}=\overline{x+n}.\overline{x+2n}+\overline{x+n}.\overline{m-n}\times\overline{2+n}.\overline{m-n}+\overline{m-n}^2-x.\overline{x+n}$ qui se réduit à (A) $\overline{x+n}.\overline{x+2n}+\overline{2m-2n}.\overline{x+n}+m\times\overline{m-n}-x.\overline{x+n}$, & effaçant les termes qui se détruisent, il vient $2m.\overline{x+n}+m.\overline{m-n}$ pour la différence cherchée.

Soit maintenant cette expression algébrique $x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}$ composée de trois facteurs, dont on demande la différence, en supposant que la quantité dont x croît est m.

Il est clair que cette expression deviendra par l'accroissement $\overline{x+m}.\overline{x+n+m}.\overline{x+2n+m}$, ou $\overline{x+n+m-n}.\overline{x+2n+m-n}.\overline{x+3n+m-n}$ dont il faut retrancher $x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}$. Le produit de deux premiers facteurs est en A. Si donc on multiplie ce produit par $\overline{x+3n+m-n}$, on aura $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+2.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+3n+m}.\overline{m-n}.\overline{x+3n}+\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+2.\overline{m-n}^2.\overline{x+n}+m.\overline{m-n}^2-x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}$, cette quantité se réduit, en observant que chaque terme ait des facteurs consécutifs, à $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+2.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+2.\overline{m-n}.n\times\overline{x+n}+m.\overline{m-n}.\overline{x-n}+m.\overline{m-n}.\overline{2n+m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+2.\overline{m-n}^2.\overline{x+n+m}.\overline{m-n}^2-x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}$, ou ($B$) $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$

$\overline{x+3n}+3.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+3.m.\overline{m-n}.$
$\overline{x+n}+m.\overline{m-n}.\overline{m+n}-x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}$ qui se réduit, en effaçant les termes qui détruisent, à cette expression

$$3m.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+3m.\overline{m-n}.\overline{x+n}+m.\overline{m-n}.\overline{m+n}$$

la différence cherchée.

Pour la différence de cette expression composée de quatre facteurs $x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$, la quantité m étant toûjours l'accroissement des facteurs, on trouvera

$\overline{x+n+m-n}\times\overline{x+2n+m-n}\times\overline{x+3n+m-n}$
$\times\overline{x+4n+m-n}-x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$, le produit des trois premiers facteurs a été trouvé en B. Si donc on multiplie B par $\overline{x+4n+m-n}$, il viendra

$\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}+3.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$
$\overline{x+4n}+3m.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+4n}+m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.$
$\overline{x+4n}+\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+3.\overline{m-n}^2.$
$\overline{x+n}.\overline{x+2n}+3m.\overline{m-n}^2.\overline{x+n}+m.\overline{m-n}^2.\overline{m+n}.$
$-x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$, & en réduisant tous les termes à avoir des facteurs consécutifs, on aura

$\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}+3.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$
$\overline{x+3n}+3n.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+3m.\overline{m-n}.\overline{x+n}.$
$\overline{x+2n}+3m.\overline{m-n}.2n.\overline{x+n}+m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.$
$\overline{x+n}+m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.3n+\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$
$\overline{x+3n}+3.\overline{m-n}^2.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+3m.\overline{m-n}^2.\overline{x+n}$
$+m.\overline{m-n}^2.\overline{m+n}-x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$, qui se réduit à $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}+4.\overline{m-n}.$
$\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+6m.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$

$+ 4m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n} + m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}$ $- x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}\,\overline{x+3n}$, & en effaçant les termes qui se détruisent, il vient $4m.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n} + 6m$ $\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n} + 4m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n}. + m.$ $\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}$, pour la différence cherchée.

Enfin si l'on cherche la différence de cette quantité composée de cinq facteurs $x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}$, m étant l'augmentation, on trouvera $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$ $\overline{x+3n}.\overline{x+4n}.\overline{x+5n} + 5.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$ $\overline{x+3n}.\overline{x+4n} + 10m.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$ $+ 10m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n} + 5m.\overline{m-n}.$ $\overline{m+n}.\overline{m+2n}.\overline{x+n} + m.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.$ $\overline{m+3n} - x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}$. qui se réduit à $5m.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n} + 10.\overline{m+n}.$ $m.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n} + 10.\overline{m-n}.m.\overline{m+n}.$ $\overline{x+n}.\overline{x+2n} + 5.\overline{m-n}.m.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.\overline{x+n}$ $+ \overline{m-n}.m.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.\overline{m+3n}$. D'où il suit cette regle générale.

REGLE GENERALE.

Pour prendre la différence finie d'une grandeur composée de tant de facteurs qu'on voudra, lesquels augmentent selon une loi arithmétique quelconque ; & la quantité qui exprime l'augmentation que l'indéterminée doit recevoir, étant aussi telle qu'on voudra.

1°. La différence cherchée contiendra autant de termes que la grandeur, dont on cherchoit la différence, contenoit de facteurs.

2°.

2°. Pour avoir le premier terme, il faut d'abord multiplier par le nombre des facteurs, enſuite par la différence ou l'augmentation que l'indéterminée doit recevoir, qui eſt m, & enfin retrancher le premier facteur.

3°. Pour avoir le ſecond terme, il faut multiplier le coëfficient du premier par le nombre de ſes facteurs, & diviſer par 2, enſuite multiplier par $\overline{m - n}$, & retrancher le dernier facteur.

4°. Pour avoir le troiſieme terme, il faut multiplier le coëfficient du ſecond par le nombre de ſes facteurs, & diviſer par 3, enſuite multiplier par $\overline{m + n}$, & retrancher encore le dernier facteur de ce terme.

5°. Pour avoir le quatrieme terme, il faut multiplier le coëfficient du troiſieme par le nombre de ſes facteurs, & diviſer par 4, puis multiplier par $\overline{m + 2n}$, & retrancher le dernier facteur, & ainſi de ſuite.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de ce qui vient d'être dit, que la différence d'une grandeur compoſée de pluſieurs facteurs, contient autant de termes moins un que la puiſſance d'un binôme qui ſeroit égale au nombre de ces facteurs, & que les coëfficiens ſont auſſi ceux du binôme dont on auroit retranché le premier terme.

COROLLAIRE II.

Si l'on ſuppoſe $m = n$, tous les termes où $m - n$ ſe trouve, s'évanoüiſſent, alors les différences qui ont été trouvées ſe réduiſent à

$$2n. \overline{x+n}.$$
$$3n. \overline{x+n}. \overline{x+2n}.$$
$$4n. \overline{x+n}. \overline{x+2n}. \overline{x+3n}.$$
$$5n. \overline{x+n}. \overline{x+2n}. \overline{x+3n}. \overline{x+4n}. \text{\&c.}$$

qui eſt le cas du premier Mémoire imprimé en 1717.

COROLLAIRE III.

Si l'on ſuppoſe $n = o$, les quantités compoſées de pluſieurs facteurs deviendront des quarrés, des cubes, des 3mes, 4mes ou 5mes puiſſances, &c. Et en effaçant dans les différences trouvées les quantités où n ſe trouve, on aura

$2mx + mm$ pour la différence des quarrés.

$3mxx + 3m^2x + m^3$ pour celle des cubes.

$4mx^3 + 6mmxx + 4m^3x + m^4$ pour celle des 4mes puiſſances.

$5mx^4 + 10mmx^3 + 10m^3xx + 5m^4x + m^5$ pour celle des 5mes puiſſances.

REMARQUE.

Si l'on examine la maniere dont ces différences ont été trouvées, & les différentes parties dont elles ſont compoſées, on verra de quelle maniere il faut décompoſer, pour retrouver l'expreſſion algébrique dont elles ſont la différence. Cette expreſſion algébrique s'appellera l'*intégrale de la différence donnée.*

Mais comme à la différence donnée il peut manquer pluſieurs parties, pour qu'elle puiſſe être intégrée, voici la méthode de découvrir ces parties manquantes, & de trouver l'intégrale d'une différence quelconque.

PROPOSITION II.

Une expreſſion algébrique compoſée de tant de facteurs qu'on voudra, augmentant ſelon une proportion arithmétique, trouver ſon intégrale.

I. Soit la quantité $x + n$, dont on demande l'intégrale (on ſuppoſe que la grandeur, dont x croît, eſt m). Pour la trouver, ſoit ſuppoſé $Ax.\overline{x + n} + Bx$ être l'intégrale qu'on cherche, les coëfficiens A & B ſont indéterminés & conſtants. Si l'on prend la différence de cette formule, on trouvera $2Am.\overline{x + n} + A.m.\overline{m - n}$, laquelle doit être égale
$+ B.m.$

à la différence donnée. On aura donc cette équation

$$2\,Am.\,x+n + Am.\,m-n = \overline{x+n}.$$
$$+ Bm.$$

Si l'on compare les termes de cette équation qui ont les mêmes facteurs, il résultera ces deux nouvelles équations $2\,Am.\,\overline{x+n} = \overline{x+n}$, & $A.\,\overline{m-n} + B = 0$, la premiere donne $A = \frac{1}{2\,m}$, & la seconde donne $B = -\times\frac{\overline{m-n}}{2\,m}$. Si donc on substitue dans l'intégrale supposée les valeurs de A & de B, on aura $\frac{x.\,\overline{x+n}}{2\,m} - \times\frac{\overline{m-n}.\,x}{2\,m}$ pour l'intégrale cherchée, ce qui est évident; car si l'on prend la différence de cette quantité, on trouvera $x+n+\frac{\overline{m-n}}{2}-\frac{\overline{m-n}}{2}$ $= \overline{x+n}$, qui étoit la différence proposée.

II. Soit la quantité proposée $\overline{x+n}.\,\overline{x+2\,n}$ dont on demande l'intégrale, on supposera que cette intégrale est

$$A.\,x.\,\overline{x+n}.\,\overline{x+2\,n}. + B.\,x.\,\overline{x+n} + C.\,x,$$ dont la différence est

$$3\,Am.\,\overline{x+n}.\,\overline{x+2\,n}. + 3\,Am.\,\overline{m-n}.\,\overline{x+n} + Am.\,\overline{m-n}.\,\overline{m+n}$$
$$+ 2\,Bm.\,\overline{x+n} \qquad + Bm.\,\overline{m-n}$$
$$+ Cm$$

laquelle différence doit être égale à la différence donnée $\overline{x+n}.\,\overline{x+2\,n}$.

Si l'on compare les termes homologues de cette équation, on aura $3\,Am = 1$, $3\,Am.\,\overline{m-n} = -2\,Bm$, & $Am.\,\overline{m-n}.\,\overline{m+n} + Bm.\,\overline{m-n} = -Cm$, d'où résulte $A = \frac{1}{3\,m}$, $B = -\frac{\overline{m-n}}{2\,m}$, $C = -\frac{\overline{m-n}.\,\overline{m+n}}{3\,m}+\frac{\overline{m-n}^2}{2\,m}$ $= \frac{\overline{m-n}.\,\overline{m-5\,n}}{6\,m}$, & si l'on substitue dans l'intégrale supposée pour A, B, C, les valeurs que l'on vient de trouver, on aura $\frac{x.\,\overline{x+n}.\,\overline{x+2\,n}}{3\,m} - \frac{\overline{m-n}.\,x.\,\overline{x+n}}{2\,m} + \frac{\overline{m-n}.\,\overline{m-5\,n}\times x}{6\,m}$ pour

l'intégrale cherchée, ce qui eſt viſible; car ſi l'on en prend la différence, on aura $\overline{x+n}.\overline{x+2n}+\overline{m-n}.\overline{x+n}$

$+\frac{\overline{m-n}.\overline{m+n}}{3}-\times\overline{m-n}.\overline{x+n}-\times\frac{\overline{m-n}^2}{2}+\frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}}{6}$

$=\overline{x+n}.\overline{x+2n}+\overline{m-n}\times\frac{\overline{m+n}}{3}-\frac{\overline{m+n}}{2}+\frac{\overline{m-5n}}{6}$

$=\overline{x+n}.\overline{x+2n}.$

III. Soit la quantité $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$, dont on demande l'intégrale.

On ſuppoſera que cette intégrale eſt

$Ax.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+B.x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+C.x.\overline{x+n}+D.x.$

Dont la différence eſt

$4Am.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+6Am.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+4Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n}+Am\times\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+}$
$\qquad +3Bm.\overline{x+n}.\overline{x+2n} \qquad +3Bm.\overline{m-n}.\overline{x+n} \qquad +Bm.\overline{m-n}.\overline{m+n}$
$\qquad\qquad +2Cm.\overline{x+n} \qquad +Cm.\overline{m-n}$
$\qquad\qquad\qquad +D.m$

Cette différence eſt égale à la différence propoſée $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$. Si donc on compare les termes homologues de cette équation, on aura $4Am=1$, $3B=-6A.\overline{m-n}$, $2C=-4A.\overline{m-n}.\overline{m+n}-3B.\overline{m-n}$, $D=-A.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.-B.\overline{m-n}.\overline{m+n}-C.\overline{m-n}$, d'où réſulte $A=\frac{1}{4m}$;

$B=-.\frac{\overline{m-n}}{2m}$, $C=-.\frac{\overline{m-n}.\overline{m+n}}{2m}+3.\frac{\overline{m-n}^2}{4m}$, &

$D=-.\frac{\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}}{4m}+\frac{\overline{m-n}^2.\overline{m+n}}{2m}+\frac{\overline{m-n}^2.\overline{m+n}}{2m}$

$-3.\frac{\overline{m-n}^3}{4m}$, ces valeurs ſe réduiſent à $A=\frac{1}{4m}$,

$B=-\times\frac{\overline{m-n}}{2m}$, $C=\frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}}{4m}$, $D=\frac{\overline{m-n}.3n.\overline{m-3n}}{4m}$.

Si l'on ſubſtitue dans l'intégrale ſuppoſée les valeurs de A,

B, C, D, que l'on vient de déterminer, on aura pour l'intégrale cherchée $\frac{x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}}{4m} - \frac{\overline{m-n}.x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}}{2m} + \frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}.x.\overline{x+n}}{4m} + \frac{\overline{m-n}.3n.\overline{m-3n}.x}{4m}$, ce qui est évident; car la différence de cette quantité est $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n} + \frac{6.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}}{4} + \overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n} + \frac{\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}}{4} - \frac{3.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}}{2} - \frac{3.\overline{m-n}^2.\overline{x+n}}{2} - \frac{\overline{m-n}^2.\overline{m+n}}{2} + \frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}.\overline{x+n}}{2} + \frac{\overline{m-n}^2.\overline{m-5n}}{4} + \frac{3n.\overline{m-n}.\overline{m-3n}}{4}$. Le premier terme reste, le second s'évanoüit, le troisieme est $\overline{m-n}\times\overline{m+n-\frac{3m+3m}{2}+\frac{m-5n}{2}} = \frac{\overline{m-n}}{2}\times o$ qui s'évanoüit encore, le quatrieme est $\overline{m-n} \times \frac{mm+3mm+2nn}{4} - \frac{mm+nn}{2} + \frac{3mn-9nn}{4} + \frac{m^2-6mn+5n^2}{4} = \overline{m-n}\times o = o$. Il ne reste donc que $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$; ce qui doit être. Le premier, second & troisieme terme, &c. sont distingués par la quantité des facteurs.

Application à la recherche des sommes des suites.

EXEMPLE I.

Soit la suite $3.5 + 6.8 + 9.11 + 12.14 + 15.17 +$ &c. dont on demande la somme de tant de termes que l'on voudra.

Si l'on examine cette suite, on verra que $n = 2$, $m = 3$, & qu'un terme quelconque de cette suite peut être exprimé par $\overline{x+2}\times\overline{x+4}$, c'est donc l'intégrale de cette quantité que l'on cherche; car il est évident que cette intégrale sera la somme de toutes les grandeurs représentées par $\overline{x+2}$

$\times \overline{x+4}$, lesquelles précedent ce terme; c'est-à-dire que si $\overline{x+2}.\overline{x+4}$ est le quatrieme terme, son intégrale sera la somme des trois premiers, & ainsi de suite, car la somme des trois premiers differe de celle des quatre premiers, de la quantité du quatrieme terme, qui est donc la différence de la somme des trois premiers.

L'intégrale de $\overline{x+n}.\overline{x+2n}$ a été trouvée (*article* 2.) $\frac{x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}}{3m} - \times \frac{\overline{m-n}.x.\overline{x+n}}{2m} + \frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}.x}{6m}$. Si donc on substitue pour m & n leurs valeurs 3 & 2, on aura $\frac{x.\overline{x+2}.\overline{x+4}}{9} - \frac{x.\overline{x+2}}{6} - \frac{7x}{18} \pm q$, la quantité q exprime ce qui manque, ou ce qu'il y a de trop à l'expression trouvée, pour qu'elle soit l'intégrale de la suite proposée. Pour trouver la valeur de q, il faut supposer que $\overline{x+2}.\overline{x+4}$ représente le premier terme de la suite, auquel cas la somme de la suite doit être nulle. Cette supposition donne $x=1$, & l'intégrale trouvée devient par-là la substitution de $x=1$, $\frac{1.3.5}{9} - \frac{1.3}{6} - \frac{7}{18} = \frac{14}{18}$ ou $\frac{7}{9}$, ce qui fait voir que $q = \frac{7}{9}$ doit être retranché de la grandeur trouvée.

On aura donc pour l'intégrale cherchée $\frac{x.\overline{x+2}.\overline{x+4}}{9} - \frac{x.\overline{x+2}}{6} - \frac{7x}{18} - \frac{7}{9}$. Si l'on veut avoir les cinq premiers termes de la suite proposée, $x+2$, dont le sixieme terme vaut 18, x est donc 16, en substituant 16 pour x, on trouve $\frac{16.18.20}{9} - \frac{16.18}{6} - \frac{7.16}{18} - \frac{7}{9} = 585$ qui est la somme des cinq premiers termes. Si l'on demande les 1000 premiers termes, on aura le 1001me terme, ou $\overline{x+2}.\overline{x+4} = 3003.3005$ qui donne $x=3001$, les 1000 termes demandés sont donc $\frac{3001.3003.3005}{9} - \frac{3001.3003}{6} - \frac{7.3001}{18} - \frac{7}{9} = 3007504500$.

COROLLAIRE.

Si la suite proposée avoit été celle des quarrés des nom-

bres naturels pris à une diſtance quelconque, mais toûjours égale, la différence $\overline{x+n}.\ \overline{x+2n}$ feroit devenue xx, puiſque dans cette ſuppoſition $n = 0$, & ſon intégrale $\frac{x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}}{3m} - \frac{x.\overline{x+n} \times \overline{m-n}}{2m} + \frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}.x}{6m}$ deviendra $\frac{x^3}{3m} - \frac{xx}{2} + \frac{1}{6}mx$, qui exprimera la ſomme de tant de quarrés de nombres naturels qu'on voudra, éloignés entre eux de la quantité m, à quoi il faut ajoûter $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}m - \frac{1}{3m}$, parce que quand $x = 1$, l'intégrale qui doit être nulle, devient $\frac{1}{3m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}m$. On aura donc $\frac{x^3}{3m} - \frac{xx}{2} + \frac{1}{6}mx + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}m - \frac{1}{3m}$ pour l'intégrale exacte.

Si donc on demande la ſomme des quarrés 1. 16. 49. 100. 169. 256. 361. 484. + &c. ou $m = 3$, on aura $\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}$ pour la ſomme cherchée depuis le premier terme juſqu'au terme exprimé par xx.

Si l'on demande les quatre premiers, xx dans le cinquieme terme vaut $\overline{13}^2$, donc $x = 13$. Si donc l'on ſubſtitue cette valeur d'x, on aura $\frac{2197}{9} - \frac{169}{2} + \frac{13}{2} - \frac{1}{9} = 166$, ce qui doit être.

Si $m = 1$, la formule deviendra $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x$, qui exprimera la ſomme des quarrés des nombres naturels pris de ſuite, qui ſont 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. &c. de maniere que ſi l'on demande la ſomme des ſept premiers, le huitiéme ſera 64, ou $x = 8$. Si donc on ſubſtitue cette valeur, il viendra $\frac{512}{3} - \frac{64}{2} + \frac{8}{6} = 140$.

EXEMPLE II.

Soit la ſuite 2. 5. 8 + 7. 10. 13 + 12. 15. 18 + 17. 20. 23 + &c. dont on demande la ſomme de tant de termes que l'on voudra.

Il eſt clair que dans cet exemple $n = 3$, $m = 5$, & qu'un terme quelconque de cette ſuite, peut être exprimé par $\overline{x+3}.\overline{x+6}.\overline{x+9}$, x ayant ſucceſſivement les valeurs $=$ 1. 4. 9. 14. 19. 24.

$x+3.x+6.x+9$ eſt donc la différence de la ſomme que l'on cherche.

L'intégrale de $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}$, a été trouvée (*art.* 3.) $\frac{x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}}{4m} - \times \frac{\overline{m-n}.x.\overline{x+n}.\overline{x+2n}}{2m} + \frac{\overline{m-n}.\overline{m-5n}.x.\overline{x+n}}{4m} + \frac{\overline{m-n}.3n.\overline{m-3n}.x}{4m}$. Si donc on ſubſtitue dans cette formule pour m, 5, & pour n, 3, elle deviendra $\frac{x.\overline{x+3}.\overline{x+6}.\overline{x+9}}{20} - \times \frac{2.x.\overline{x+3}.\overline{x+6}}{10} - \frac{2.10.x.\overline{x+3}}{20} - \frac{2.9.4x}{20}$ qui eſt l'intégrale cherchée.

Pour ſçavoir s'il ne manque rien à cette intégrale, il faut ſuppoſer que $x+3.x+6.x+9$, repréſente le premier terme de la ſuite, auquel cas l'intégrale trouvée doit être nulle. Or lorſque $x+3=2$, l'on a $x=-1$, mettant -1 pour x dans l'intégrale, elle deviendra $-\frac{1.2.5.8.}{20} + \frac{2.1.2.5}{10} + \frac{2.10.1.2}{20} + \frac{2.9.4.1}{20} = \frac{72}{20} = \frac{18}{5}$, ce qui marque que cette quantité eſt de trop. On aura donc pour l'intégrale exacte $\frac{x.\overline{x+3}.\overline{x+6}.\overline{x+9}}{20} - \frac{2.x.\overline{x+3}.\overline{x+6}}{10} - \frac{2.10.x.\overline{x+3}}{20} - \frac{2.9.4.x}{20} - \frac{18}{5}$, qui ſe réduit à $\frac{x.\overline{x+3}.\overline{x+6}.\overline{x+9}}{20} - \frac{x.\overline{x+3}.\overline{x+6}}{5} - x.\overline{x+3} - \frac{18x}{5} - \frac{18}{5}$.

Si l'on veut la ſomme des trois premiers termes, il faut examiner ce que vaut $\overline{x+3}$, dans le quatrieme terme on trouve 17, donc $x=14$, en ſubſtituant 14 pour x, il vient $\frac{14.17.20.23}{20} - \frac{14.17.20}{5} - 14.17 - \frac{18.14}{5} - \frac{18}{5} = 4230$.

Si l'on demande les cent premiers termes, il viendra pour cette ſomme $\frac{499.502.505.508}{20} - \frac{499.502.505}{5} - 499.502 - \frac{18.409}{5} - \frac{18}{5} = 12, 981, 051, 346, 244$.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

Si la ſuite propoſée avoit été celle des cubes des nombres naturels pris à la diſtance m, on auroit eu dans ce cas $n = 0$, & l'intégrale ſeroit $\frac{x^4}{4m} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}mxx$; à quoi il faut ajoûter $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}m - \frac{1}{4m}$, parce que quand $x = 1$, l'intégrale doit être nulle : or la ſuppoſition de $x = 1$ donne pour l'intégrale $\frac{1}{4m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}m$, qui doit par conſéquent être ajoûté avec des ſignes contraires ; on aura donc pour l'intégrale exacte $\frac{x^4}{4m} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}mxx + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}m - \frac{1}{4m}$.

Si l'on demande la ſomme des cubes pris de trois en trois, qui ſont 1. 64. 343. 1000, &c. auquel cas $m = 3$, ce qui donne $\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}xx - \frac{1}{3}$ pour la ſomme de tant de termes que l'on voudra de cette ſuite. Si l'on veut la ſomme des quatre premiers, on aura $\overline{13}^3$ pour le cinquieme terme. Donc $x = 13$, cette valeur étant ſubſtituée, il vient $\frac{28561}{12} - \frac{2197}{2} + \frac{3}{4} \times 169 - \frac{1}{3} = 1408$.

Si l'on demande les cubes des nombres naturels pris de ſuite, on aura alors $m = 1$, & l'intégrale deviendra pour ce cas $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}xx$, de ſorte que ſi l'on veut les dix premiers cubes des nombres naturels, qui ſont 1. 8. 27. 64. 125. 343. 512. 729. 1000, $= 3025$, le onzieme terme ſera $\overline{11}^3$, donc $x = 11$. Si l'on ſubſtitue 11 à la place de x, on aura $\frac{14641}{4} - \frac{1331}{2} + \frac{121}{4} = 3025$ pour la ſomme cherchée.

EXEMPLE III.

Soit la ſuite 1. 4. 7. 10 + 5. 8. 11. 14 + 9. 12. 15. 18 + &c. dans laquelle $n = 3$ & $m = 4$, l'expreſſion générale d'un terme quelconque d'une ſuite compoſée de quatre facteurs ſera $x + n. x + 2n. x + 3n. x + 4n$, dont l'intégrale ſera ſuppoſée être, $A. x. \overline{x + n}. \overline{x + 2n}. \overline{x + 3n}$.

$\overline{x+4n}+B x.\ \overline{x+n}.\ \overline{x+2n}.\ \overline{x+3n}+C x.\ \overline{x+n}.\ \overline{x+2n}+D.x.\ \overline{x+n}+E.x.$

La différence de cette formule est $5Am.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}+10Am.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+10Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+5Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.\overline{x+n}+Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.\overline{m+3n}+4Bm.\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}+6Bm.\overline{m-n}.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+4Bm.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{x+n}+Bm.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}+3Cm.\overline{x+n}.\overline{x+2n}+3Cm.\overline{m-n}.\overline{x+n}+Cm.\overline{m-n}.\overline{m+n}+2Dm.\overline{x+n}+Dm.\overline{m-n}+Em$, qui doit être égale à $\overline{x+n}.\overline{x+2n}.\overline{x+3n}.\overline{x+4n}$.

Si donc on compare les termes homologues de cette équation, on aura ces nouvelles équations; $5Am=1$. $10.Am.\overline{m-n}+4Bm=0$. $10Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}+6Bm.\overline{m-n}+3Cm=0$. $5Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}+4Bm.\overline{m-n}.\overline{m+n}+3Cm.\overline{m-n}+2Dm=0$. $Am.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}.\overline{m+3n}+Bm.\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}+Cm.\overline{m-n}.\overline{m+n}+Dm.\overline{m-n}+Em=0$.

D'où l'on tire, $A=\frac{1}{5m}$. $B=-\times\frac{\overline{m-n}}{2m}$. $C=-\times\frac{\overline{2m-2n}\times\overline{m+n}}{3m}+\frac{\overline{m-n}^{2}}{m}$. $D=-\times\frac{\overline{m-n}.\overline{m+n}.\overline{m+2n}}{2m}+\frac{\overline{m-n}^{2}.m+n}{m}+\times\frac{\overline{m-n}^{2}.m+n}{m}-3\times\frac{\overline{m-n}^{3}}{2m}$.

$$E = - \times \frac{m-n \,.\, m+n \,.\, m+2n \,.\, m+3n}{5m} + \frac{\overline{m-n}^{2} \,.\, m+n \,.\, m+2n}{2m}$$

$$+ 2 \times \frac{\overline{m-n}^{2} \,.\, \overline{m+n}^{2}}{3m} - \frac{\overline{m-n}^{3} \,.\, m+n}{m} + \frac{\overline{m-n}^{2} \,.\, m+n \,.\, m+2n}{2m}$$

$$- \frac{\overline{m-n}^{3} \,.\, \overline{m+n}}{m} - \frac{\overline{m-n}^{3} \,.\, m+n}{m} + \frac{3 \,.\, \overline{m-n}^{4}}{2m}$$, qui se réduit à

$$A = \frac{1}{5m} \,.\, B = - \times \frac{\overline{m-n}}{2m} \,.\, C = - \frac{2mm+2nn+3mm-6mn+3nn}{3m}$$

$$= \frac{mm-6mn+5nn}{3m} = \overline{m-n} \times \frac{\overline{m-5n}}{3m} \,.\, D = \overline{m-n} \,.$$

$$\overline{m+n} \times \frac{\overline{m-4n}}{2m} - \times \frac{\overline{m-n}^{2} \,.\, \overline{m-5n}}{2m} \,.\, E = m-n \,.$$

$$m+n \,.\, m+2n \times \frac{\overline{m-2n \times A}}{5m} + \frac{\overline{m-n}^{2} \,.\, \overline{m+n} \times \overline{-7m+11n}}{3m}$$

$$+ \frac{\overline{m-n}^{2}\, 3 \,.\, \overline{m-n}}{2m} \,.$$

Si maintenant on ſubſtitue dans ces valeurs de A, B, C, D & E, pour m & n, leurs valeurs 3 & 2, elles ſe réduiront à $A = \frac{1}{20}$, $B = - \frac{1}{8}$, $C = - \frac{11}{12}$, $D = - \frac{45}{8}$, $E = - \frac{503}{24}$.

Si donc on ſubſtitue ces valeurs dans l'intégrale ſuppoſée, on aura $\frac{1}{20} \times x \,.\, \overline{x+3} \,.\, \overline{x+6} \,.\, \overline{x+9} \,.\, \overline{x+12} - \frac{1}{8} \times x \,.\, \overline{x+3} \,.\, \overline{x+6} \,.\, \overline{x+9} - \frac{11}{12} \,.\, x \,.\, \overline{x+3} \,.\, \overline{x+6} - \frac{45}{8} \times x \,.\, \overline{x+3} - \frac{593}{24}\, x + q$.

Pour déterminer la valeur de q, on ſuppoſera $x+3=1$, donc $x=-2$; cette valeur d'x doit donc rendre l'intégrale nulle, c'eſt-à-dire, que $\frac{1}{20} \times -2 \,.\, 1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 10 - \frac{1}{8} \,.\, -2 \,.\, 1 \,.\, 4 \,.\, 7 - \frac{11}{12} \,.\, -2 \,.\, 1 \,.\, 4 - \frac{45}{8} \,.\, -2 \,.\, 1 - \frac{508}{24} \,.\, -2 + q = 0$; d'où il ſuit $-28 + 7 + \frac{22}{3} + \frac{45}{4} + \frac{503}{12} = -q$, qui donne $q = -47$. L'intégrale demandée eſt donc $\frac{1}{20}\, x \,.\, \overline{x+3} \,.\, \overline{x+6} \,.\, \overline{x+9} \,.\, \overline{x+12} - \frac{1}{8} \,.\, x \,.\, \overline{x+3} \,.\, \overline{x+6} \,.\, \overline{x+9} - \frac{11}{12} \,.\, x \,.\, \overline{x+3} \,.\, \overline{x+6} - \frac{45}{8} \,.\, x \,.\, \overline{x+3} - \frac{503}{24} \,.\, x - 47$.

Si l'on veut avoir les deux premiers termes, on aura dans ce cas $x + 3 = 9$; donc $x = 6$, & la ſomme cherchée ſera $\frac{1}{20} \times 6 . 9 . 12 . 15 . 18 - \frac{1}{8} . 6 . 9 . 12 . 15 - \frac{11}{12} . 6 . 9 . 12 - \frac{45}{8} . 6 . 9 . - \frac{503}{24} . 6 - 47 = 6440$.

EXEMPLE IV.

Si la ſuite qu'on ſe propoſe de ſommer, étoit compoſée de pluſieurs ſuites multipliées les unes par les autres, il faudroit la réduire à des ſuites uniformes, avant d'en trouver la ſomme par la méthode générale.

Soit la ſuite $1 . 3 + 2 . 5 + 3 . 7 + 4 . 9 + 5 . 11 + 6 . 13 +$ &c. dont on demande la ſomme.

Cette ſuite eſt le produit des deux ſuites $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 +$ &c. Et $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 +$ &c. en ſuppoſant que chaque terme de la premiere eſt multiplié par le correſpondant de la ſeconde. Ces deux ſuites n'ayant pas la même différence, il eſt évident que dans la ſuite compoſée il ſe trouvera deux différences. Si l'on veut qu'il n'y ait que la même différence, la ſuite compoſée ſe réduira en deux autres, de cette maniere :

$$\left.\begin{array}{l} 1 . 3 + 2 . 4 + 3 . 5 + 4 , 6 + 5 . 7 + \text{\&c.} \\ \text{Et } 1 . 0 + 2 . 1 + 3 . 2 + 4 . 3 + 5 . 4 + \text{\&c.} \end{array}\right\} = 1 . 3 + 2 . 5 + 3 . 7 + 6 . 9 + \text{\&c.}$$

La ſomme de la ſuite propoſée ſera donc égale aux deux autres ſuites, dont la premiere a pour formule $\overline{x + 2} \times \overline{x + 4}$, & la ſeconde $\overline{x - 1} \times \overline{x - 2}$, l'intégrale de la premiere eſt $\frac{x . \overline{x + 2} . \overline{x + 4}}{3} + \frac{x . \overline{x + 2}}{2} + \frac{0 . x}{6} + q$, & celle de la ſeconde eſt $\frac{x . \overline{x - 1} . \overline{x - 2}}{3} - \times \frac{x . \overline{x - 1}}{1} + 2 x + p$. Il ne reſte plus qu'à trouver les valeurs de q & p, pour avoir l'intégrale exacte de la ſuite propoſée. Or pour avoir ces valeurs, il faut ſuppoſer que $\overline{x - 2} \times \overline{x + 4}$ repréſente 1×3, & que $\overline{x - 1} \times \overline{x - 2}$ repréſente 1×0, auquel cas les deux ſuites doivent être nulles. Donc alors $x = -1$ pour la premiere ſuite, & $x = 2$ pour la ſeconde. Si donc on

ſubſtitue dans les intégrales pour x ces valeurs, on aura $\frac{-1.1.3}{3} + \frac{-1.1}{2} + \frac{9.-1}{6} + q = 0$, & $\frac{2.1.0}{3} - \frac{2.1}{1} + 2.2 + p = 0$, de la premiere équation, on tire $q = 3$, & de la ſeconde $p = -2$. L'intégrale exacte eſt donc $\frac{x.x+.2.x+4}{3} + \frac{x.+2}{2} + \frac{3}{2}x + 3$ pour la premiere ſuite, & $\frac{x.x.-1.x-2}{3} - x.\overline{x-1} + 2x - 2$ pour la ſeconde, dont la ſomme vaut la ſuite propoſée.

Si l'on veut avoir les deux premiers termes de chaque ſuite, dont la ſomme vaut les deux premiers termes de la ſuite propoſée, il faut ſuppoſer que les formules $\overline{x+2} \times \overline{x+4}$ & $\overline{x-1} \times \overline{x-2}$ de chacune de ces ſuites repréſentent chacune le troiſieme terme de ſa ſuite, & alors on aura $x + 2 = 3$ pour la premiere ſuite, & $x - 1 = 3$ pour la ſeconde, ce qui donne $x = 1$ & $x = 4$. Si donc on ſubſtitue dans les intégrales trouvées pour x ces valeurs, on aura $\frac{1.3.5}{3} + \frac{1.3}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 11$ pour la premiere, & $\frac{4.3.2}{3} - \frac{4.3}{1} + 8 - 2 = 2$ pour la ſeconde, les deux enſemble valent donc 13; ce qui doit être, puiſque $1.3 + 2.5 = 13$.



MEMOIRE SUR LES YEUX GELE'S;

Dans lequel on détermine la grandeur des chambres qui renferment l'humeur aqueuse.

Par M. PETIT, Medecin.

30 Avril 1723.

M. BRISSEAU, Medecin des Hôpitaux du Roi, & Professeur dans l'Université à Doüay, est, je croi, le premier qui a donné le nom de *chambre* à l'espace compris entre le crystallin & la cornée qui contient l'humeur aqueuse; & comme cet espace est divisé en deux parties par l'uvée, il a donné le nom de *premiere chambre* à la partie antérieure, que nous appellerons, avec le Sçavant Heister *, *chambre antérieure*, comprise entre l'iris & la cornée, & il a nommé *seconde chambre*, l'espace compris entre le crystallin & l'uvée, & que nous appellerons *chambre postérieure*.

* *Compend. anatomic.* p. 210.

Quoique M. Brisseau, M. Antoine & M. Heister ayent suffisamment prouvés que la cataracte n'a d'autres causes que l'endurcissement joint à l'opacité du crystallin, il se trouve néantmoins encore des personnes qui tiennent pour la membrane. Ils ont eu beau démontrer qu'il est tout-à-fait impossible d'abbattre cette prétendue membrane, sans traverser le crystallin[a], en perçant l'œil à deux ou trois lignes de la cornée, comme on le fait pour l'ordinaire; leur démonstration s'est trouvée infructueuse à l'égard de leurs adversaires qui ont crû éluder la difficulté, en supposant que la chambre postérieure de l'humeur aqueuse est plus grande que la chambre antérieure, trompés peut-être par les figures de Vesale, de Brigs & d'autres Auteurs.

[a] Fabricius ab Aquapendente l'a crû de même il y a plus de 100 ans. *Voyez sa Chirurgie imprimée en 1618. p. 58.*

Galien a crû que le crystallin touche à l'uvée : *De usu partium, cap.* 4. & 6. *De Oculis, cap.* 4.

J'avois bien remarqué dans les différentes diſſections des yeux d'hommes, de chiens, de bœuf, & d'autres animaux, qu'il y avoit une eſpace rempli d'humeur aqueuſe entre le cryſtallin & l'uvée : mais cet eſpace eſt ſi petit dans les yeux gelés, qu'un de nos plus habiles Anatomiſtes s'y eſt (en quelque maniere) laiſſé tromper [a]; je dis, *en quelque maniere*, ce que j'expliquerai plus amplement dans un autre Mémoire. Si cette opinion ſe fût trouvée véritable, c'en étoit fait du ſyſtème de la cataracte par la membrane, ſes ſectateurs n'avoient plus de faux-fuyans. Il me paroît pourtant qu'ils ne peuvent tirer aucun avantage d'un ſi petit eſpace, & s'il n'eſt pas plus grand dans l'état naturel que celui que l'on reconnoît par l'épaiſſeur de la glace dans les yeux gelés, il ne s'en trouve pas aſſez pour loger & faire agir l'aiguille dont on ſe ſert pour l'opération de la cataracte, ſans courir le riſque de bleſſer l'uvée ou le cryſtallin, quand on perce l'œil à une ligne ou une ligne & demie de la cornée.

[a] *V. Mem. de l'Acad.* 1721. *pag.* 318. & 319.

La facilité que l'on a trouvée de faire geler les humeurs des yeux [b], a fourni l'occaſion de reconnoître la grandeur de l'eſpace occupé par l'humeur aqueuſe; M[rs] Heiſter & Morgagni ont fait voir par ce moyen ſur les yeux d'hommes & ſur les yeux de cochon, que la chambre poſtérieure de l'humeur aqueuſe eſt de beaucoup plus petite que la chambre antérieure. C'eſt ce que j'ai auſſi démontré, mais avec beaucoup plus de préciſion, à la Compagnie, le 16 Janvier de cette année, non-ſeulement ſur les yeux d'hommes, mais encore ſur les yeux de chiens, de moutons, de bœufs, de chevaux. J'avois déja fourni ſur cette matiere, le 8 Mars 1721, un petit Mémoire, en attendant que je pûſſe en donner un plus ample & plus circonſtancié, tel que je le donne aujourd'hui. Mais avant d'entrer dans le détail de mes obſervations, il faut expliquer ce que j'entends par grand & petit diametre de l'œil & par ſon axe.

[b] *On avoit déja trouvé cette facilité en* 1678.

J'appelle grand diametre de l'œil, une ligne droite horiſontale qui traverſe l'œil en paſſant par ſon centre, qui eſt parallele au grand diametre de la cornée dans le bœuf, le

mouton. La ligne *C D* de la premiere figure est le grand diametre.

Le petit diametre est une ligne droite, verticale, qui traverse l'œil en passant par son centre, & qui est perpendiculaire au grand diametre. La ligne *A B* de la premiere & de la seconde figure est le petit diametre; je l'ai nommé ainsi, parce qu'il est le plus souvent plus court que le grand dans le mouton, le bœuf, le cheval, mais on les trouve quelquefois égaux. Ils sont toûjours l'un & l'autre plus longs que l'axe, parce que dans ces animaux l'œil est applati dans sa partie postérieure.

L'axe de l'œil est une ligne droite qui le traverse, en passant par le centre de la cornée & le centre du crystallin. La ligne *A B* dans la seconde figure, & la ligne *C D* dans la 3me, la 4me, la 5me, la 6me, la 7me figure est l'axe qui, dans l'homme, dans le singe, dans le chien, le loup, le chat, est pour l'ordinaire égal aux diametres, & quelquefois plus long dans l'homme & dans le singe, mais qui, dans le chien, le loup & le chat, se trouve quelquefois plus court d'un quart de ligne.

Tous les yeux que j'ai fait geler ont été auparavant dépouillés de leurs muscles, de leur graisse, & de toutes les parties membraneuses qui enveloppent la sclérotique, & dans cet état ils ont été pésés & mesurés avant d'être exposés à la gelée. Les uns ont été posés sur le nerf optique, la cornée en haut, & les autres suspendus avec un fil par le nerf optique, la cornée embas.

Pour rendre ces expériences plus exactes, il faut qu'il fasse un froid considérable, afin que les yeux puissent se geler de maniere que les humeurs deviennent une glace assez dure. Les yeux que j'ai exposés aux premieres gelées du mois de Février, mon Thermometre étant au 18me degré, n'ont gelé qu'imparfaitement, l'humeur aqueuse étoit gelée dans les deux chambres: mais la glace ne faisoit pas assez de corps pour en mesurer l'épaisseur, n'étant gelée que par parcelles entremêlées d'humidité. Dans quelques-uns le crystallin étoit gelé

gelé dans sa circonférence ; dans d'autres il n'étoit point du tout gelé, il paroissoit même plus mol qu'il n'est dans son état naturel ; & dans quelques yeux d'hommes, de moutons, de bœufs, l'humeur vitrée étoit gelée par plans de glace qui étoient dans les uns paralleles au diametre de l'œil, & dans d'autres aux différens plans de leur axe ; dans les uns situés horisontalement, & dans d'autres situés verticalement ; j'en ai vû aussi qui ressembloient à des crystaux pyramidaux à quatre ou cinq faces. L'eau se gele quelquefois dans des fioles de ces différentes manieres, lorsque la gelée n'est pas forte.

Les yeux n'ont commencé à se geler assez bien que lorsque mon thermometre s'est trouvé au 15me ou au 16me degré, & pour lors il m'a été facile de bien démontrer la glace de la chambre postérieure : mais ils se sont gelés bien plus fort, lorsque mon thermometre s'est baissé sur le 13me degré, qui est le plus bas où il se soit trouvé en 1721, & c'est dans ce temps-là que j'ai fait la plus grande partie des observations que je rapporte dans ce Mémoire.

Ce n'est pas sans dessein que je parle de ces différens degrés de gelés : c'est de-là que dépend le plus ou le moins de justesse & de précision de ces observations.

Les yeux d'homme qui ont été bien gelés, étant coupés suivant la longueur de leur axe en deux parties, la glace de l'humeur aqueuse s'est trouvée épaisse dans la chambre anterieure, près du trou de l'uvée où elle a le plus d'épaisseur, à cause de la convexité de la cornée, d'une demi-ligne dans les unes, de deux tiers de ligne dans les autres ; & dans quelques-uns elle avoit une ligne entiere. Elle diminue peu-à-peu d'épaisseur à mesure qu'elle s'éloigne du centre de la cornée, & qu'elle s'approche de la sclérotique, où elle s'engage sous le biseau de la cornée, & y finit en vive arrête.

M. Brisseau est encore le premier, si je ne me trompe, qui a remarqué que la sclérotique & la cornée sont unies ensemble par une surface inclinée que l'on appelle *biseau* ou *chamfrain*. Le biseau de la cornée est dessous, celui de la sclérotique est appliqué dessus & à la partie externe du biseau

de la cornée. C'eſt à l'extrémité du biſeau de la cornée que l'uvée eſt attachée ; c'eſt-là auſſi où finit la glace de la chambre antérieure.

La glace de la chambre poſtérieure étoit épaiſſe d'un demi-quart de ligne dans les uns, dans les autres d'un demi-tiers, juſqu'à un quart de ligne ; & cette épaiſſeur s'augmentoit peu-à-peu juſqu'à la circonference du cryſtallin, où elle ſe trouvoit épaiſſe d'un demi-tiers de ligne dans les uns, d'un quart de ligne dans les autres, juſqu'à trois demi-quarts.

La glace de cette chambre poſtérieure ſe trouve aſſez ſouvent continue avec celle de l'humeur vitrée, principalement ſi l'œil a été expoſé à une forte gelée ; car lorſque l'humeur vitrée vient à ſe geler, elle ſe rarefie d'autant plus que la gelée eſt forte, comme je le prouverai dans la ſuite de ce Memoire : elle s'avance au-delà & vers les côtés du cryſtallin, pouſſe les proceſſus ciliaires du côté de l'uvée, en les détachant du cryſtallin, & pour lors la glace qui ſe forme entre l'uvée & les proceſſus ciliaires ſe trouve très-mince, & quelquefois il ne s'en trouve point du tout ; ce qui arrive de même dans le chien, le mouton, le bœuf & le cheval : il eſt facile de diſtinguer la glace de l'humeur aqueuſe, d'avec celle de la vitrée ; il y a dans celle-ci quantité de petites fibres blanches.

La glace de la chambre antérieure dans les yeux du chien-dogue, près du trou de l'uvée, étoit épaiſſe d'une ligne dans les uns, d'une ligne & demie dans les autres ; & diminuant peu-à-peu d'épaiſſeur, elle alloit finir, comme dans l'homme, en vive arréte à la circonference de la cornée.

Elle étoit épaiſſe dans la chambre poſtérieure d'un quart de ligne juſqu'à un tiers près du trou de l'uvée ; mais elle l'étoit d'une demi ligne à la circonference du cryſtallin.

J'ai trouvé dans les yeux d'un loup, qui a l'œil de la même forme que celui du chien-dogue, la glace de la chambre antérieure épaiſſe de cinq quarts de ligne, & celle de la

chambre postérieure d'une demi-ligne près du trou de l'uvée.

Dans les yeux de mouton la glace de la chambre antérieure s'est trouvée épaisse près du trou de l'uvée de cinq quarts de ligne dans les uns ; dans d'autres elle étoit de sept quarts, & j'en ai trouvé un où elle étoit épaisse de deux lignes ; & diminuant peu-à-peu, elle alloit finir à la circonference de la cornée, comme dans l'homme, & tous les animaux à quatre pieds. La cornée est elliptique à sa partie externe dans ces animaux : mais elle est ronde à sa partie interne.

La glace de la chambre postérieure étoit épaisse dans les uns d'un quart de ligne, & d'un tiers dans les autres près du trou de l'uvée : mais elle avoit deux tiers de ligne à la circonférence du cryſtallin.

Dans les yeux de bœuf j'ai trouvé la glace de la chambre antérieure épaisse dans les uns de cinq quarts de ligne, dans les autres de sept quarts : j'en ai démontré à la compagnie qui étoit épaisse de deux lignes & demie dans son milieu, & diminuoit peu-à-peu jusqu'à la circonférence de la cornée où elle finissoit.

Dans la chambre postérieure la glace étoit épaisse d'un tiers de ligne dans les uns, & d'une demi-ligne dans les autres, près du trou de l'uvée ; elle se trouvoit épaisse de trois quarts de ligne à la circonférence du cryſtallin.

Dans les yeux de chevaux la glace étoit épaisse dans la chambre antérieure, près du trou de l'uvée, de trois lignes dans les uns, & dans d'autres de trois lignes & demie ; & diminuant peu-à-peu, comme dans les yeux précédens, s'alloit engager sous le biseau de la cornée.

La glace de la chambre postérieure étoit épaisse d'un tiers de ligne, jusqu'à une demi-ligne près du trou de l'uvée, mais de deux tiers de ligne à la circonference de la cornée : ainsi la chambre postérieure dans le cheval est plus petite à proportion que dans les yeux précédens.

Le cryſtallin dans tous les yeux bien gelés étoit dur & blanc. Lorsqu'on le dégageoit de son chaton, étant coupé par

la moitié, on voyoit la capsule qui l'enveloppoit qui restoi presque dans sa situation naturelle, & qui ne s'éloignoit que peu de la glace de l'humeur aqueuse. Elle étoit transparente & ferme, & ressembloit à de la corne très fine & très-transparente, à laquelle Vesale [a] la compare. La partie postérieure de cette membrane crystalline étoit plus fine & plus molle; on ne voyoit point sa partie antérieure si tendue ni si ferme dans les yeux qui n'étoient pas bien gelés; elle étoit molle & ridée après avoir retiré le crystallin, & pour lors elle ressembloit mieux à une pellicule d'oignon, à laquelle Vesale la compare dans le même chapitre, de même que Galien [b]. Ce qui fait assez connoître que quelque fine que soit cette membrane, elle ne laisse pas de se geler en conservant sa transparence.

[a] *Lib.* 7. *cap.* 14.

[b] De Ocul. l. 5. *cap.* 3.

On comprendra assez facilement qu'elle se trouve d'autant plus épaisse, qu'elle enveloppe de plus gros crystallins; elle est pourtant quelquefois plus épaisse dans des yeux, que dans d'autres de même espece.

Je remarquerai encore une chose particuliere, & que l'on ne peut bien voir que dans des yeux gelés: c'est que l'uvée dans l'homme fait une surface plane, ainsi qu'elle est représentée dans la 3[me] figure [c]. Vesale [d] lui donne la même surface. Mais dans les animaux à quatre pieds cette surface est convexe à sa partie antérieure; & cette convexité est d'autant plus grande, que les yeux sont plus gros, comme on le voit dans la 4[me], 5[me], 6[me], & 7[me] figure.

[c] *Mem. de l'Academie 1721. pag. 217. où M. Vinslow n'est pas de ce sentiment.*

[d] *Lib.* 7. *cap.* 14.

Après ce que je viens de dire de la glace de la chambre postérieure, il semble qu'il n'y a qu'à couper des yeux bien gelés pour la démontrer: mais j'ai fait voir à la compagnie qu'il faut apporter beaucoup de soin & d'exactitude pour la découvrir, même dans les yeux les mieux gelés & les mieux remplis d'humeur aqueuse. L'enduit noir de la partie postérieure de l'uvée & des processus ciliaires se communique à la glace, lui cause une ombre qui l'empêche de paroître. Mais une des choses qui contribue encore à la cacher, c'est que la glace est un corps dur qui ne peut être

coupé net par un ſcalpel, quelque tranchant qu'il puiſſe avoir, & plus il eſt tranchant, plus facilement il eſt émouſſé par la dureté de la glace, & pour lors il arrive deux choſes. La premiere eſt que la glace ſe briſe par petites parcelles: la ſeconde eſt que le ſcalpel émouſſé entraîne avec lui des parties noires de l'uvée & des proceſſus ciliaires qu'il mêle & qu'il confond avec les parcelles de la glace, & fait, pour ainſi dire, une eſpece de voile qui couvre la glace de la chambre poſtérieure; l'uvée & les proceſſus ciliaires paroiſſent confondus avec elle; l'on ne voit qu'un corps brun aſſez épais, quoique l'uvée ait tout au plus un douzieme de ligne d'épaiſſeur dans l'homme avec ſon enduit noir: mais ôtez le maſque qui la cache, on la découvre facilement. Il n'y a pour cela qu'à prendre un œil bien gelé, le couper par ſon axe en deux parties, & avec la pointe d'un inſtrument enlever la glace de la chambre antérieure, puis détacher l'uvée le plus délicatement que l'on peut de la glace de la chambre poſtérieure; après quoi cette glace qui paroiſſoit un corps noir ſe manifeſte, & l'on peut en meſurer l'épaiſſeur, quoiqu'elle ait encore un peu de noirceur que l'uvée lui a laiſſé.

L'on peut encore s'en aſſûrer d'une autre maniere; car ſans couper l'œil par ſon axe, il n'y a qu'à enlever la cornée toute entiere; on ôte la glace de la chambre antérieure, puis on emporte l'uvée, & l'on trouve la glace de la chambre poſtérieure.

La noirceur de l'uvée n'eſt pas la ſeule cauſe qui empêche qu'on ne trouve avec facilité la glace de la chambre poſtérieure, principalement dans l'homme: il ſe rencontre encore des difficultés par rapport à la quantité de l'humeur aqueuſe qui ſe trouve plus ou moins grande, non ſeulement à proportion de la grandeur des yeux, mais encore dans les yeux de même grandeur.

On trouve pour l'ordinaire dans les yeux de l'homme la peſanteur de 3 grains & demi, juſqu'à 4 grains & demi d'humeur aqueuſe: s'il n'y en a que trois grains & demi, cela doit

diminuer la quantité de la glace de près du quart. L'on trouve encore bien moins de glace dans les yeux qui ont été gardés quelques jours après la mort. Si l'on ne prend les yeux d'homme, de chien, & d'autres animaux tout nouvellement morts, on les trouve toûjours flétris, après en avoir ôté la graiſſe, les muſcles, & tout ce qui enveloppe le globe de l'œil. Si l'on poſe ces yeux du côté du nerf optique, la cornée s'enfonce vers le cryſtallin, plus ou moins, ſelon le temps que l'animal eſt mort, & que la diſſipation qui s'eſt faite des humeurs, eſt plus ou moins grande. Si au contraire on ſuſpend ces yeux flétris par le nerf optique, les humeurs s'appeſantiſſent du côté de la cornée, la rendent convexe, & la partie poſtérieure de la ſclérotique ſe trouve gaudronnée & froncée. Mais lorſque ces yeux ſont gelés, ils ne paroiſſent plus flétris; ils ſont au contraire fort tendus; l'on ne trouve plus d'affaiſſement à la cornée des yeux poſés du côté du nerf optique, & la ſclérotique des yeux ſuſpendus par le nerf optique, a perdu ſon froncis. Malgré ce gonflement, on ne doit pas s'attendre de trouver dans la chambre poſtérieure de ces yeux, la même épaiſſeur de glace que l'on trouve dans les yeux qui n'ont point été flétris: car, comme les yeux ne ſe flétriſſent que par l'évaporation des humeurs qu'ils contiennent, que l'humeur aqueuſe eſt la premiere à ſe diſſiper, comme l'expérience le confirme, & que plus la gelée eſt forte, plus il ſe diſſipe d'humeur aqueuſe, comme nous le verrons ci-après, lorſque l'humeur vitrée vient à ſe geler, elle ſe raréfie avec d'autant plus de facilité vers la partie antérieure qu'elle y trouve moins de réſiſtance; elle pouſſe le cryſtallin du côté de l'uvée, & diminue la chambre poſtérieure, de maniere que j'ai eu bien de la peine à y trouver de la glace, & quelquefois je n'en ai point trouvé du tout. On ne doit donc pas s'étonner ſi quelques perſonnes n'ont point trouvé de chambre poſtérieure.

Ce ne ſont pas ſeulement les yeux flétris qui ſe gonflent & ſe dilatent en gelant: cela arrive auſſi à ceux qui n'ont pas eu le temps de ſe flétrir; car comme les membranes prêtent

& peuvent s'étendre, les yeux grossissent à proportion de la raréfaction de la glace. Je me suis convaincu de cette vérité par un grand nombre d'expériences : il suffira d'en rapporter trois, faites sur des yeux de bœuf.

Dans la premiere expérience l'œil que j'ai pris étoit fort peu flétri ; il pesoit une once 36 grains ; il avoit 18 lignes trois quarts de grand diametre, 18 lignes & demie de petit diametre, & 16 lignes & un quart d'axe. Je l'ai posé sur une assiette de fayence du côté du nerf optique, à huit heures du matin, mon thermometre étant au 14me degré. Je l'ai laissé sur une fenêtre jusqu'au lendemain huit heures du matin. Lorsque je l'ai retiré, le thermometre étoit resté au 14me degré ; il étoit bien gelé, dur & fort tendu, la sclérotique noire, la cornée opaque & blanchâtre : il pesoit 7 dragmes 65 grains ; ainsi il avoit diminué de 43 grains ; il avoit 19 lignes de grand diametre, 18 lignes trois quarts de petit diametre, & 17 lignes d'axe. Il étoit donc augmenté d'un quart de ligne dans son grand diametre, autant dans son petit diametre, & de trois quarts de ligne dans son axe. J'ai coupé cet œil en deux parties par son axe. J'ai trouvé les humeurs fort bien gelées, la glace de la chambre antérieure étoit épaisse de deux lignes, & la glace de la chambre postérieure étoit épaisse d'une demi-ligne près du trou de l'uvée, le crystallin opaque, blanc & fort dur, ayant huit lignes de diametre, & six lignes d'axe ou d'épaisseur.

Dans la seconde expérience l'œil de bœuf pesoit 7 dragmes 67 grains ; il n'étoit point flétri ; il avoit 18 lignes de grand & de petit diametre, 15 lignes & deux tiers d'axe. Je l'ai suspendu avec un fil par le nerf optique, mon thermometre étant au 14me degré & demi à neuf heures & demie du matin. Je l'ai retiré le lendemain à neuf heures du matin ; il étoit bien gelé, dur comme une pierre, la sclérotique toute noire, la cornée opaque & blanchâtre : le froid avoit augmenté d'un demi degré pendant la nuit, mon thermometre étoit au 14me degré.

Cet œil gelé pesoit 7 dragmes 20 grains ; il étoit donc

diminué de 47 grains. Il avoit 18 lignes & demie de grand & de petit diametre, & 16 lignes & demie d'axe: il étoit augmenté de demi ligne dans chacun de ses diametres, & de près d'une ligne dans son axe.

La glace de la chambre antérieure étoit épaisse de sept quarts de ligne, & la glace de la chambre postérieure seulement d'un tiers de ligne près du trou de l'uvée; le crystallin avoit sept lignes & demie de diametre, & cinq lignes deux tiers d'axe ou d'épaisseur.

Dans la troisieme experience l'œil de bœuf n'étoit point flétri; il pesoit 7 dragmes 24 grains; il avoit 17 lignes & un quart de grand & petit diametre, 15 lignes d'axe. Je l'ai exposé à la gelée, suspendu avec un fil par le nerf optique, à onze heures du matin, mon thermometre au 13me degré. Je l'ai retiré le lendemain à sept heures du matin, la sclérotique étoit toute noire, la cornée blanche opaque, tout l'œil arrondi, dur comme une pierre: il pesoit 6 dragmes 40 grains. Il étoit donc diminué de 56 grains en vingt heures. Il avoit 18 lignes de grand & petit diametre, & 16 lignes trois quarts d'axe: il étoit donc augmenté de trois quarts de ligne dans chacun de ses diametres, & d'une ligne trois quarts dans son axe.

La glace de la chambre antérieure avoit deux lignes d'épaisseur, & avoit été poussée au-delà du biseau de la cornée en quelques endroits où l'uvée s'est trouvée détachée de la cornée & de la sclérotique.

La glace de la chambre postérieure n'avoit qu'un quart de ligne près du trou de l'uvée.

Le crystallin étoit blanc, dur, opaque; il avoit des fosses & des cannelures irrégulieres qui étoient en plus grande quantité, & plus profondes à sa partie postérieure qu'à sa partie antérieure; marque certaine qu'il avoit été violemment comprimé. C'est ce qui arrive toûjours dans les fortes gelées, & même dans les yeux bien gelés avec la glace & le salpetre.

Ce crystallin avoit sept lignes trois quarts de diametre, &

& cinq lignes un quart d'épaiſſeur : il peſoit 42 grains. Je l'ai laiſſé dégeler par lui-même dans mon cabinet, où il s'eſt dégelé en trois quarts d'heure. Il eſt devenu plus mol qu'il n'eſt pour l'ordinaire, tranſparent, plein de petites bulles d'air renfermées ſous la membrane cryſtalline ; il n'a ni diminué ni augmenté de poids en dégelant.

Il y a pluſieurs choſes à remarquer dans les trois exemples que je viens de rapporter. La premiere eſt qu'ils ont tous trois diminué de poids, & ils ont d'autant plus diminué de poids, que la gelée a été plus forte, ce qui eſt conforme aux expériences de M. Gauteron, de la Societé de Montpellier *a*, & de M. de Mairan de cette Academie *b* : ce dernier en a donné d'excellentes raiſons. La ſeconde, qu'ils ont augmenté de volume, & qu'ils ont d'autant plus augmenté de volume que la gelée a été plus forte. Le premier a moins augmenté que le ſecond, & celui-ci moins que le troiſieme. Il ſemble néantmoins que le premier auroit dû augmenter plus que le ſecond, puiſque mon thermometre marquoit d'abord moins de froid au ſecond œil qu'au premier : mais j'ai aſſez ſouvent obſervé, en expoſant des yeux & des liqueurs à la gelée, qu'ils ont mieux gelé, lorſque mon thermometre étoit au 16 ou au 17me degré, que d'autres yeux & d'autres liqueurs que j'avois expoſés au 14 ou au 15me degré. J'ai recherché d'où pouvoit provenir une choſe ſi particuliere, & voici ce que j'ai remarqué.

a *Mem. de l'Acad. des Sc. 1709. p. 451.*

b *Diſſert. ſur la glace, p. 146.*

Si mon thermometre ſe baiſſoit du 17 au 16me degré, le vent étant au nord ou au nord-eſt ou à l'eſt, pour lors la gelée ſe trouvoit plus forte que lorſque mon thermometre paſſoit du 14 au 15me degré, le vent ſe changeant du nord à l'oüeſt ou au ſud-oüeſt ou au ſud, & c'eſt à peu-près ce qui eſt arrivé aux deux yeux dont je viens de parler ; car le premier a été expoſé, lorſque le froid commençoit à diminuer, mon thermometre avoit monté du 13 au 14me degré, le vent étant au nord-oüeſt. Le ſecond au contraire a été expoſé, lorſque le froid augmentoit, mon thermometre étant deſcendu du 15 au 14me degré & $\frac{1}{2}$, & de-là au 14me, le vent étant paſſé au nord.

La troisieme chose que nous avons à observer sur nos trois yeux gelés, c'est que leur volume s'est plus augmenté par leur partie postérieure que dans tout le reste de leur circonférence, & que l'augmentation a été à proportion plus grande dans le troisieme que dans le second, & dans le second que dans le premier, & je l'ai toûjours remarqué dans tous les yeux de bœufs, de moutons & de chevaux, que j'ai fait geler; ce que je n'ai point observé dans les yeux d'hommes & de chiens, qui ont pour l'ordinaire l'axe aussi long que les diametres. J'ai vû au contraire que lorsque l'axe s'est trouvé plus long que les diametres, comme il arrive quelquefois dans l'homme, ces yeux grossissoient plus par leur côté que par leur partie posterieure, & que lorsque les yeux d'hommes se trouvoient quarrés ou applatis par leur côté (ce qui est pour l'ordinaire produit par la compression des muscles droits) ils s'arrondissoient en gelant. Enfin tous les yeux que j'ai fait geler ont affecté de prendre une figure plus arrondie.

Cet effet ne se remarque pas seulement dans les yeux des animaux à quatre pieds que l'on fait geler, on le voit encore dans ceux que l'on met tremper dans l'eau, dans le vin, & dans d'autres liqueurs; à mesure qu'ils deviennent plus tendus, ils s'arrondissent par leur partie postérieure plus à proportion que par leur côté, car si les diametres deviennent plus longs d'un quart de ligne, l'axe s'allonge d'une demi-ligne ou trois quarts de ligne.

J'en ai recherché la cause dans l'épaisseur & la force de la sclérotique, j'ai trouvé qu'elle est plus épaisse dans sa partie postérieure que vers ses côtés: mais il n'est pas aisé de se persuader que cette épaisseur lui donne plus de facilité de s'étendre, vû que dans les yeux d'hommes elle est aussi plus épaisse à sa partie postérieure que vers les côtés, & ces yeux d'hommes se gonflent par les côtés où elle est plus mince plûtôt que par sa partie postérieure. Voilà ce qui rend ce phénomene difficile: car quoique l'on puisse dire en général que les yeux grossissent & se gonflent par les endroits où les membranes s'étendent le plus facilement, néantmoins il

n'eſt pas facile de concilier ce qui arrive aux yeux d'hommes, & d'animaux à quatre pieds ; ainſi ce fait demande encore beaucoup d'obſervations & d'expériences pour pouvoir en donner une explication plauſible, ce qui ſera le ſujet d'un autre Mémoire que je donnerai, lorſque j'aurai fait toutes les obſervations & les expériences dont j'ai beſoin. Je parlerai dans ce Mémoire des yeux gelés par la glace & la neige, mêlés avec différens ſels & différentes liqueurs ; des différentes évaporations des humeurs des yeux à différentes temperatures de l'air, & des yeux trempés pendant quelque temps dans différentes liqueurs.

La quatrieme choſe que nous avons à obſerver, c'eſt que la glace de la chambre poſtérieure eſt moins épaiſſe dans le troiſieme exemple que dans le ſecond, & dans le ſecond que dans le premier, ainſi la glace de la chambre poſtérieure a été d'autant moins épaiſſe que la gelée a été plus forte. L'on ſçait que la raréfaction des liqueurs dans la gelée dépend de l'air qu'elles contiennent, qu'elles ont d'autant plus de force à ſe raréfier, que la quantité de ces liqueurs eſt plus grande, puiſqu'il y a plus d'air. Cela étant, il faut que l'humeur aqueuſe cede à la force de l'humeur vitrée. Il y a dans l'homme vingt fois autant d'humeur vitrée que d'humeur aqueuſe ; dans le bœuf il y en a dix fois, & neuf fois autant dans le mouton. L'on verra dans mon Mémoire des découvertes ſur les yeux, les proportions des humeurs bien déterminées dans toutes les eſpeces d'animaux dont je parlerai.

Lorſque l'on fait geler un œil de bœuf, je ſuppoſe que l'humeur vitrée ſe dilate avec ſeulement quatre fois autant de force que l'humeur aqueuſe, elle pouſſe & fait avancer le cryſtallin en devant, la flexibilité des proceſſus ciliaires les fait avancer en devant encore plus que le cryſtallin ; c'eſt pour cette raiſon qu'on les trouve preſque toûjours détachés du cryſtallin, l'humeur aqueuſe eſt obligée de leur céder la place, elle eſt chaſſée de la chambre poſtérieure dans la chambre antérieure avec d'autant plus de force & en plus

grande quantité que la gelée est plus grande ; elle est souvent contrainte de s'échaper jusques sous la sclérotique, en détachant l'uvée de la cornée, & dans cette occasion le cryſtallin souffre d'étranges compressions, comme on le remarque dans le troisieme exemple.

De-là on doit inférer qu'il est difficile de déterminer avec précision, par les yeux gelés, la véritable grandeur de la chambre postérieure, d'autant plus qu'il s'évapore, en gelant, une portion de l'humeur aqueuse. Néantmoins pour peu qu'on soit attentif à ce qui se passe dans un grand nombre d'yeux gelés à différens degrés de froid, on peut, en quelque maniere, la déterminer sans beaucoup s'éloigner de la précision. C'est sur ce fondement que je crois pouvoir assûrer que la chambre postérieure, dans les yeux d'homme & de mouton, contient à peu-près le tiers de toute l'humeur aqueuse. Dans le chien il y en a le quart ; il s'en trouve autant dans le bœuf, mais dans le cheval il n'y en a environ que la cinquieme partie. Je rapporte pourtant ceci sans répondre de la précision, & seulement afin qu'on puisse voir en quelque maniere à quoi l'on doit s'en tenir sur la grandeur respective de ces chambres, qui peut varier comme toutes les autres parties du corps dans les animaux de même espece, & cela est d'autant plus probable, que j'ai trouvé dans les yeux des cornées plus convexes les unes que les autres, quoique la corde de l'arc qu'elles forment fût de la même longueur. Je ferai voir dans un autre Mémoire la grandeur des chambres de l'humeur aqueuse sans le secours de la gelée, & je démontrerai que le cryſtallin est rarement éloigné de l'uvée plus d'un quart de ligne.

La derniere chose que nous avons à observer, est que les cryſtallins n'ont point augmenté de volume, l'air ne leur a pourtant point manqué. La premiere pensée qui m'est venue là-dessus, est que le cryſtallin se trouve si fort comprimé entre l'humeur vitrée & l'humeur aqueuse, que l'air qu'il contient n'a pû se dilater avec facilité, d'autant plus qu'il est le dernier à ressentir la force de la gelée, & cette raison

paroît suffire, & n'avoir pas besoin d'autre démonstration. J'ai pourtant voulu voir ce qui arrive aux cryſtallins gelés à part. J'ai trouvé qu'ils ont diminué de volume plûtôt qu'augmenté, & l'on ne doit pas s'en étonner ; car comme les liquides n'augmentent leur volume en gelant, qu'à proportion de la dilatation de l'air qu'ils contiennent, tant que les parties du liquide conservent leur mouvement, les particules d'air ne se dilatent point par le froid, ce qui est prouvé par les liquides qui ne se gelent point. Quelque grand froid qu'il fasse, on ne les voit point augmenter de volume, ils diminuent au contraire d'autant plus que la gelée est plus forte : mais lorsque les parties d'un liquide viennent à perdre leur mouvement, les particules d'air s'unissent les unes avec les autres, forment des molécules qui se dilatent d'autant plus à proportion de la quantité des particules d'air qui les composent, & augmentent par ce moyen le volume du liquide.

De ce que je viens de dire, il est facile de déduire la raison pour quoi nos cryſtallins n'augmentent point de volume en gelant: la matiere dont ils sont formés est trop visqueuse, elle empêche que les particules d'air ne puissent facilement se communiquer, & s'unir les unes avec les autres, ce qui est nécessaire pour en augmenter le volume.

J'ai pourtant remarqué que lorsque les cryſtallins se sont dégelés, il s'est trouvé des bulles d'air très-petites sous la membrane cryſtalline, & qu'il y en avoit encore de plus petites dispersées dans la substance des cryſtallins : mais il y a apparence que ces bulles se sont formées, lorsque les cryſtallins se sont dégelés; effectivement ils étoient d'une très-grande mollesse après être dégelés, ce qui marque un peu de desunion dans les parties. C'est ce qui arrive pour l'ordinaire dans le dégel des corps mols, & dans ce dérangement il y a une petite quantité de particules d'air qui peuvent s'unir les unes avec les autres, & former des bulles, mais qui ne sont pas assez de volume pour produire une augmentation sensible dans les cryſtallins, car je n'en ai point trouvé qui ayent augmenté de volume en dégelant.

EXPLICATION DES FIGURES qui repréſentent les yeux gelés de différens animaux.

La premiere Figure repréſente un œil de bœuf, vû par ſa partie antérieure.

A B, le petit diametre de l'œil.
C D, le grand diametre.
E, la cornée.

La ſeconde Figure repréſente un œil de bœuf vû de côté.

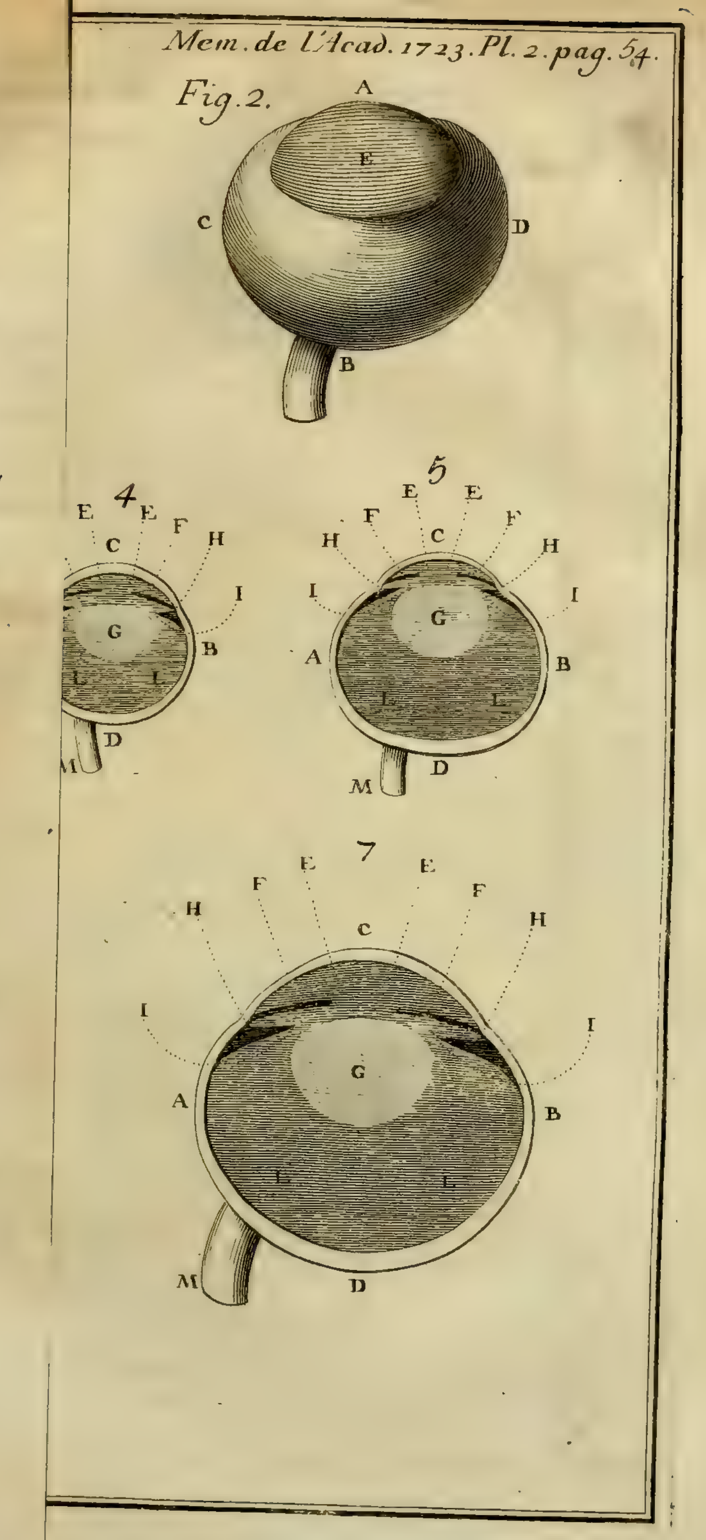
A B, l'axe de l'œil.
C D, le grand diametre.
E, la cornée.

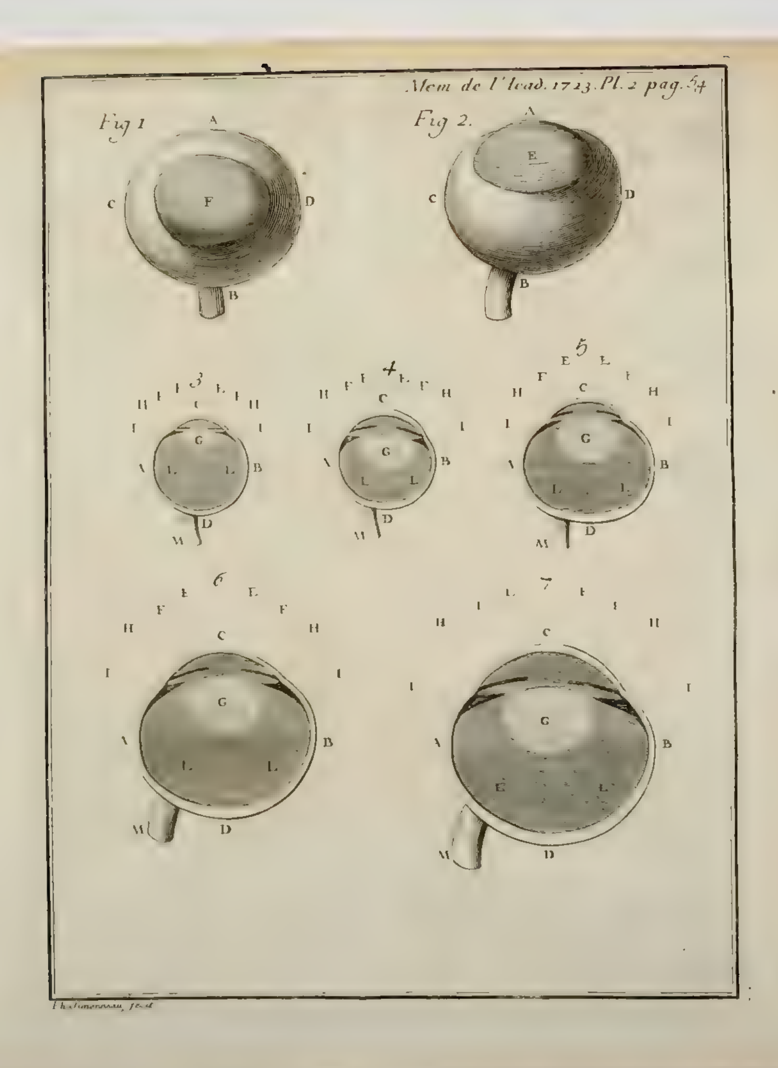
Toutes les autres Figures repréſentent des yeux gelés, coupés par leur axe.

La troiſieme Figure eſt l'œil d'un homme.
La quatrieme eſt l'œil d'un chien.
La cinquieme eſt l'œil d'un mouton.
La ſixieme eſt l'œil d'un bœuf.
La ſeptieme eſt l'œil d'un cheval.

Les lettres de chacune de ces Figures repréſentent les mêmes parties.

A B, le grand diametre de l'œil.
C D, ſon axe.
C, la cornée.
E E, la glace de l'humeur aqueuſe dans la chambre antérieure.
F F, l'uvée qui fait une ſurface plane dans l'œil de l'homme, & convexe dans les autres animaux.
G, le cryſtallin.
H H, la glace de l'humeur aqueuſe dans la chambre poſtérieure.
I, *I*, l'extrémité des proceſſus ciliaires qui ont été détachés du cryſtallin par la gelée.


Mem. de l'Acad. 1723. Pl. 2. pag. 54.
Fig. 2.
A
E
C
D
B
4
E
E
C
F
H
I
G
B
L
L
D
M
5
E
E
F
C
F
H
H
I
I
G
A
B
L
L
M
D
7
E
E
F
F
C
H
H
I
I
G
A
B
L
L
M
D


Mem de l'Acad. 1723. Pl. 2 pag. 54
Fig 1
Fig 2.
3
4
5
6
7

L, *L*, la glace de l'humeur vitrée.

M, le nerf optique repréſenté dans ſa ſituation naturelle dans tous les yeux.

METHODE GENERALE

Pour transformer les nombres irrationnaux en ſéries de fractions rationnelles les plus ſimples & les plus approchantes qu'il ſoit poſſible.

L'on explique à cette occaſion un endroit important d'Archimede, qui paroît n'avoir pas été entendu par ſes Commentateurs.

Par M. DE LAGNY.

LORSQUE le rapport de deux grandeurs eſt exprimé ou en tout, ou ſeulement en partie par des nombres irrationnaux, l'on ne doit regarder cette expreſſion que comme une eſpece de formule exemplaire, au moyen de laquelle on peut approcher indéfiniment du rapport cherché en nombres entiers; l'eſprit n'apperçoit clairement & ne connoît parfaitement en ce genre que cette derniere expreſſion. Auſſi l'exacte & peut-être trop ſcrupuleuſe antiquité rejettoit entierement les nombres irrationnaux, non-ſeulement comme n'étant pas de véritables nombres, mais comme ne pouvant ſervir à former aucune idée préciſe du rapport cherché, ni même dans une infinité de cas une idée tant ſoit peu approchante, comme il arrive dans les polynomes irrationnaux liés de pluſieurs ſignes radicaux qui s'affectent les uns les autres, & qui ſont mêlés de ſignes + & —. Tel eſt, par exemple, le rapport du côté du pentagone au côté du quindécagone, inſcrits dans le même cercle, car le diametre étant 4, le côté du pentagone $=\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, & le quindécagone $= \sqrt{7 - \sqrt{5} - \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}}$, mais même

17 Mars 1723.

dans les irrationnaux les plus ſimples, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. il y a une obſcurité eſſentielle, ou, pour parler plus exactement, une inintelligibilité néceſſairement attachée à cette eſpece d'expreſſion.

Le Traité d'Archimede ſur la meſure du cercle, le dixiéme Livre des Élémens d'Euclide, & preſque tout l'ouvrage de Diophante fourniſſent des preuves évidentes de la maniere de penſer des Anciens ſur ce ſujet.

Le premier, au lieu d'opérer ſur $\sqrt{3}$, s'eſt ſervi de deux valeurs approchées $\frac{265}{153}$ & $\frac{1351}{780}$, dont la premiere donne la valeur de $\sqrt{3}$ par défaut, & l'autre par excès, l'une & l'autre à très peu-près, car le quarré de $\frac{265}{153}$ eſt $\frac{70.225}{23.409} = 3 - \frac{2}{23409}$, & le quarré de $\frac{1351}{780} = \frac{1.825.201}{608.400} = 3 + \frac{1}{608.400}$.

Quels détours n'a pas pris le ſecond dans ſon dixieme Livre, pour exprimer les rapports des grandeurs incommenſurables ? Il finit par celui du côté du quarré à ſa diagonale; rapport fameux chez les Anciens, & cité comme tel par de grands Philoſophes.

Le troiſieme donnant la regle pour réſoudre les équations du ſecond degré, ajoûte comme condition néceſſaire & eſſentielle, ce qui exclud les irrationnaux, & en effet tout le mérite de la méthode de Diophante conſiſte à éviter par certaines hypotheſes ingénieuſes les nombres irrationnaux qui ſe préſentent les premiers, & pour ainſi dire d'eux-mêmes & naturellement dans les queſtions numériques indéterminées.

Ce n'eſt que depuis environ deux ſiecles qu'on a inventé les expreſſions des nombres irrationnaux, avec la méthode d'opérer, qu'on a d'abord appellée l'*algorithme*, & qu'on auroit dû appeller la *logiſtique* de cette eſpece de nombres. Ces expreſſions & cette logiſtique ſont utiles & même néceſſaires pour abréger le calcul & les démonſtrations : mais, encore une fois, lorſqu'il s'agit d'exprimer les rapports de deux ou de pluſieurs grandeurs, il faut, ſi l'on veut ſe rendre intelligible, avoir recours aux nombres rationnaux, & même aux nombres entiers. Par exemple, le rapport de l'aire du

du quarré, à l'aire du quarré de la diagonale, eſt exactement exprimé par le rapport de 1 à 2 : mais le rapport du côté de ce même quarré à ſa diagonale eſt exprimé très-imparfaitement & inintelligiblement par le rapport de 1 à $\sqrt{2}$; & comme il eſt démontré qu'il eſt abſolument impoſſible de trouver deux nombres quarrés entiers & déterminés, tels que le plus grand ſoit préciſément double du plus petit, tout ce que peut faire de mieux une intelligence finie quelconque, c'eſt de trouver *régulierement*, *indéfiniment*, & *ſans aucun tâtonnement* (remarquez ces trois conditions, & ſurtout la derniere) c'eſt, dis-je, de trouver ainſi la ſérie de tous les nombres quarrés pris deux à deux, tels que la différence du plus grand au double du plus petit, ſoit par excès, ſoit par défaut, ſoit la plus petite qu'il ſoit poſſible; & il eſt évident que cette différence ne ſçauroit être plus petite que l'unité. Telle eſt la ſérie ſuivante $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, &c. dont les quarrés des numérateurs comparés aux quarrés des dénominateurs, ſont

$$1 = 2 \times 1 - 1.$$
$$9 = 2 \times 4 + 1.$$
$$49 = 2 \times 25 - 1.$$
$$289 = 2 \times 144 + 1.$$
$$1681 = 2 \times 841 - 1.$$

Et ainſi de ſuite à l'infini, ſuivant la formule générale & exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{1a + 2b}{1a + 1b}$. Et il eſt évident que pour continuer cette ſérie à l'infini, & par conſéquent pour approcher indéfiniment du rapport de $\sqrt{2}$ à 1, ou de la valeur de $\sqrt{2}$, il ne faut abſolument aucun tâtonnement, puiſque l'on n'emploie jamais dans l'opération que l'addition & la duplication ſans aucune diviſion ni extraction des racines, qui ſont les deux ſeules opérations où il entre en général eſſentiellement du tâtonnement, qui eſt ce qui fatigue & rebute le plus les calculateurs, comme étant une opération indigne des ſciences exactes.

On ajoûte ordinairement des tranches d'un certain nombre de zéro pour continuer l'approximation par extraction

de racines. Cette méthode suppose en général une expression *purement arbitraire* des nombres, suivant une progression géométrique continue quelconque. L'usage a introduit la progression *décuple*. Mais outre qu'il est évident qu'on devroit exclurre des méthodes mathématiques tout ce qui est purement arbitraire, pour ne suivre que la méthode démonstrativement la plus simple & la plus naturelle, ou plûtot la seule méthode naturelle & raisonnable; il y a deux défauts dans cette méthode d'addition de zéro. Le premier est le tatonnement qui est inséparable en général de l'extraction des racines. Le second & le plus essentiel, c'est que l'on ne peut, en la suivant, trouver absolument rien de réglé dans la suite des chiffres du numérateur. Il est aisé de démontrer cette impossibilité qui empêche la série d'etre *réguliere;* car si la suite des numérateurs étoit réglée ou géométriquement ou arithmétiquement, ou d'une maniere mixte quelconque de progressions connues l'on pourroit intégrer la série en nombres rationnaux, puisque la série des dénominateurs est réglée en progression géométrique continue de 10 à 1, & par conséquent le nombre irrationnel donné à transformer en série ne seroit pas irrationnel; ce qui est absurde & contre l'hypothese. Reprenons pour exemple $\sqrt{2}$. Si l'on continue l'extraction de la racine quarrée de 2, en ajoûtant à 2 tant de tranches qu'on voudra, par exemple huit tranches de deux zéro chacune, l'on trouvera pour racine $1 \frac{41.421.356 + \&c.}{100.000.000 + \&c.}$, c'est-à-dire, $1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{1}{100.000} + \frac{3}{1.000.000} + \frac{5}{10.000.000} + \frac{6}{100.000.000}$, &c.

Et dans toute autre extraction de racine irrationnelle d'une équation quelconque, l'on trouvera pour racine $a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \frac{e}{10.000}$, &c.

L'on épuiseroit inutilement non-seulement toutes les lettres de notre alphabet, mais celles de cent alphabets de cent langues toutes différentes, & tous les alphabets possibles,

sans pouvoir jamais trouver de suite réglée dans les numérateurs.

Si au contraire l'on substitue l'ordre simple & naturel à l'arrangement arbitraire, non-seulement la série sera parfaitement réglée, suivant la nature de l'équation qui a produit l'irrationnel donné : mais on la trouvera sans aucun tâtonnement, & l'on abrégera indéfiniment plus le calcul que par cette addition arbitraire & mécanique des tranches de zéro, & c'est une maxime constante & générale en matiere de méthodes arithmétiques & algébriques, *que la méthode fondée en raison démonstrative & nécessaire est en tout sens & à tous égards indéfiniment préférable aux méthodes fondées sur l'arbitraire.*

Si l'on suit la méthode ordinaire, l'on exprimera moins exactement par de plus grands nombres un rapport qui peut s'exprimer plus exactement par de plus petits. Ce qui est absurde & un vrai paralogisme de calcul, & il est surprenant qu'on ne s'en soit point apperçû.

Les nombres d'approximation ainsi trouvés par addition de tranches de zéro, & par la continuation de l'extraction des racines, ou même en général par toute autre méthode plus ou moins pratiquable, peuvent & doivent uniquement servir de matériaux pour trouver enfin la seule bonne & véritable série, en y appliquant la méthode du triangle des rapports que je donnai à l'Académie le 2 Décembre 1705. L'exemple que je vais donner tombe de lui-même & directement dans ce cas simple du triangle des rapports : mais c'est un cas particulier.

Archimede nous fournit le premier modele de transformation d'un nombre irrationnel $\sqrt{3}$ en fractions rationnelles. Il s'agissoit d'exprimer en nombres les rapports du diametre du cercle aux périmetres des polygones inscrits & circonscrits de 3, de 6, de 12, de 24, de 48 & de 96 côtés, afin de déterminer assez exactement, pour la pratique, le rapport du diametre à la circonférence.

On pourroit demander pourquoi Archimede a préféré

pour le nombre des côtés des polygones réguliers, cette progression géométrique continue 3, 6, 12, 24, 48, 96, à celle-ci qui paroît bien plus simple 4, 8, 16, 32, 64, 128. Je réponds que le rapport parfait d'égalité entre le côté de l'hexagone inscrit & le rayon est apparemment ce qui l'a déterminée au choix de la premiere progression. Mais le côté du triangle équilatéral inscrit au cercle étant au rayon comme $\sqrt{3}$ à 1, Archimede ne pouvoit exprimer ce rapport qu'en substituant, comme il a fait, deux fractions rationnelles qui exprimassent cette valeur $\sqrt{3}$ à très peu près & en très-petits nombres, l'une par défaut, & l'autre par excès, afin d'avoir des limites suffisantes. Il choisit $\frac{265+}{153}$ & $\frac{1351-}{780}$. Ce choix est fait avec beaucoup d'art, & aucun des Commentateurs, que je sçache, ne s'est apperçû de la méthode qui peut l'y avoir conduit.

Il est pourtant, ce me semble, plus important, plus utile & plus satisfaisant pour le Lecteur, de trouver le chemin qu'ont suivi les grands Géometres pour parvenir à leurs nouvelles découvertes, que de se laisser simplement convaincre par la démonstration. On devient en quelque maniere soi-même inventeur; l'on apprend du moins à le devenir.

Voici donc les différens pas qu'Archimede fit apparemment dans cette recherche.

1°. Il est évident que s'il étoit possible d'exprimer exactement la valeur de $\sqrt{3}$, ce seroit par une fraction dont la valeur seroit plus grande que 1, & plus petite que 2, & dont le quarré du numérateur contiendroit exactement trois fois le quarré du dénominateur: mais cela étant absolument impossible, Archimede ne pouvoit rien faire de mieux que de trouver méthodiquement & régulierement *la suite de chaque deux nombres quarrés; tels que le quarré du plus grand ne surpassât ou ne fût surpassé par le triple du quarré du plus petit que le moins qu'il soit possible.*

Lorsque cet excès & ce défaut ne sont chacun que d'une unité, il est évident que c'est la plus petite différence possi-

ble, & c'est ce qui arrive dans la transformation de $\sqrt{2}$ en la série ci-dessus $\frac{1+}{1}$, $\frac{3-}{2}$, $\frac{7+}{5}$, $\frac{17-}{12}$, $\frac{41+}{29}$, &c.

La même chose arrive dans $\sqrt{5}$, qui se transforme dans la série $\frac{2+}{1}$, $\frac{9+}{4}$, $\frac{38+}{17}$, $\frac{161-}{72}$, $\frac{682+}{305}$, &c. & dans $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, &c. & en géuéral dans $\sqrt{aa+1}$.

Le second cas est lorsque l'une des deux différences est seulement d'une unité dans le quarré multiple, & que l'autre différence est plus grande, comme il arrive dans $\sqrt{3}$, où l'excès dans le quarré triple n'est que d'une unité; mais le défaut est de 2.

Enfin le troisieme cas est lorsque ces différences sont en général toutes deux plus grandes que l'unité, mais pourtant les plus petites qu'il soit possible.

La derniere perfection de la méthode dans la résolution des équations qui ont des racines irrationnelles, est de trouver ces racines si approchées, que la différence de l'homogene de comparaison qui en résulte soit toûjours moindre que l'unité & par excès & par défaut. Il n'y a point d'autre limitation qui ne soit arbitraire. Celle-ci est fondée sur la nature même des nombres.

Il y a apparence qu'Archimede reconnut d'abord simplement par induction & en tâtonnant, que la premiere espece de fraction qui se présente pour $\sqrt{3}$, c'est $\frac{2}{1}$, car le quarré 4 du numérateur 2 excede d'une unité le triple du quarré 1 du dénominateur 1: en effet $4 = 3 \times 1 + 1$.

La seconde fraction qui se présente ensuite est $\frac{5}{3}$, car le quarré 25 du numérateur 5 est surpassé de 2 par le triple du quarré 9 du dénominateur 3; en effet $25 = 3 \times 9 - 2 = 27 - 2$.

La troisieme fraction est $\frac{7}{4}$, qui donne $\frac{49}{16}$ & $49 = 3 \times 16 + 1$.

On trouvera de même la quatrieme fraction $\frac{19}{11}$ qui donne $\frac{361}{121}$ & $361 = 3 \times 121 - 2$.

Et la cinquieme $\frac{26}{15}$, qui donne $\frac{676}{225}$ & $676 = 3 \times 225 + 1$.

Et la sixieme $\frac{71}{41}$, qui donne $\frac{5041}{1681}$ — & $5041 = 3 \times 1681 - 2$.

Voilà donc déja un commencement de série alternative par excès & par défaut, trouvée simplement par induction.

$$\frac{2-}{1}, \frac{5+}{3}, \frac{7-}{4}, \frac{19+}{11}, \frac{26-}{15}, \frac{71+}{41}.$$

Or suivant l'excellente remarque de M. Descartes dans sa Géométrie : *dès qu'en matiere de séries ou progressions l'on a un certain nombre de termes connus, l'on a bien-tôt toute la suite, c'est-à-dire, la méthode de continuer la série à l'infini ;* il ne s'agit plus que d'un peu de sagacité pour découvrir l'ordre, la liaison, l'analogie dans ces premiers termes de la série.

On voit ici une série de six termes alternativement excédans & défaillans. J'en forme deux séries de trois termes chacune, l'une toute d'excédans, & l'autre toute de défaillans.

Excédans $\frac{2-}{3}$, $\frac{7-}{4}$, $\frac{26-}{15}$, &c.

Défaillans $\frac{5+}{3}$, $\frac{10+}{11}$, $\frac{71+}{41}$, &c.

Et c'est le second pas qu'il falloit faire.

Le troisieme est donc d'examiner l'ordre, la liaison, l'analogie qui regnent dans chacune de ces deux séries. C'est en général ce qu'il y a de plus difficile : mais il est aisé ici de s'appercevoir que chaque numérateur suivant est égal au double du numérateur précédent plus le triple du dénominateur aussi précédent, & que chaque dénominateur suivant est égal au double du dénominateur précédent plus le numérateur aussi précédent.

Ainsi dans la premiere série, en considérant les numérateurs de la série $\frac{2}{1}, \frac{7}{4}, \frac{26}{15}$,

Je vois que $7 = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4 + 3 = 7$.

& $26 = 2 \times 7 + 3 \times 4 = 14 + 12 = 26$.

Et en considérant les dénominateurs de la même série,

Je vois que $4 = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4$.

que $15 = 2 \times 4 + 7 = 8 + 7 = 15$.

Dans la seconde série $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$, &c. c'est précisément la même analogie ; car en considérant les numérateurs,

Je vois que $19 = 2 \times 5 + 3 \times 3 = 10 + 9 = 19$.
que $71 = 2 \times 19 + 3 \times 11 = 38 + 33 = 71$.

Et en confidérant les dénominateurs,

Je vois que $11 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$.
que $41 = 2 \times 11 + 19 = 22 + 19 = 41$.

Ce n'eft jufqu'ici qu'une induction ; & pour avoir une entiere & parfaite certitude, il y a un quatrieme pas à faire, c'eft de fuppofer en général la fraction génératrice $\frac{a}{b}$, telle que dans la premiere férie l'on ait $aa = 3bb + 1$, & que dans la feconde férie l'on ait la fraction génératrice $\frac{A}{B}$, telle que $AA = 3BB - 2$, afin d'examiner enfuite fi les deux fractions réfultantes en général $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$ & $\frac{2A + 3B}{1A + 2B}$ confervent *indéfiniment* la même propriété, enforte que la fraction $\frac{a}{b}$ repréfentant un terme quelconque de la premiere férie, on foit affûré que la fraction $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$ doivent infailliblement repréfenter le terme immédiatement fuivant de la même férie, & de même pour $\frac{A}{B}$ & $\frac{2A + 3B}{1A + 2B}$ dans la feconde férie. Or c'eft ce qui fe démontre aifément, car le quarré du numérateur $2a + 3b$ eft $4aa + 12ab + 9bb$. Le quarré du dénominateur $1a + 2a$ eft $1a + 4ab + 4bb$, dont le triple eft $3aa + 12ab + 12bb$.

La différence du quarré du numérateur au quarré du dénominateur eft $1aa - 3bb$.

Or par l'hypothefe $1aa = 3bb + 1$. Donc cette différence $1aa - 3bb = 1$. Ce qu'il falloit démontrer pour la premiere férie.

On démontrera de même dans la feconde férie que la différence fera $3BB - 1AA$, & comme par l'hypothefe $1AA = 3BB - 2$, cette différence fera $= 2$. Ce qu'il falloit démontrer pour la feconde férie.

Je puis donc continuer *indéfiniment* ces deux féries, en me fervant de la formule exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$, ou

$\frac{A}{B}$ & $\frac{2A+3B}{1A+2B}$, & je trouverai les deux séries suivantes.

Premiere série.	$\frac{3-}{1}$,	$\frac{7-}{4}$,	$\frac{26-}{15}$,	$\frac{97-}{56}$,	$\frac{362-}{209}$,	$\frac{1351-}{780}$,	&c.
Seconde série.	$\frac{5+}{3}$,	$\frac{19+}{11}$,	$\frac{71+}{41}$,	$\frac{265+}{153}$,	$\frac{989}{571}$,	$\frac{3691}{2131}$,	&c.
Ordre des termes.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	&c.

Et voilà les deux fractions d'Archimede trouvées $\frac{1351-}{780}$ qui est le sixieme terme dans la premiere série, & $\frac{265+}{153}$ qui est le quatrieme terme dans la seconde série. La question me paroît pleinement approfondie par rapport à Archimede. Il est aisé de trouver ensuite la méthode générale pour tous les nombres quarrés irrationnaux.

Le premier est $\sqrt{2}$, qui exprime le rapport de la diagonale du quarré à son côté $=1$.

Le second est $\sqrt{3}$, qui exprime le rapport du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle au rayon du même cercle $=1$, & c'est de ce rapport de $\sqrt{3}$ à 1 transformé en série de fractions rationnelles que dépend immédiatement la détermination très-prompte & très-simple du rapport du diametre à la circonférence, tel que je l'ai donné dans les Mémoires de l'Académie en 1719, page 135 & suivantes, par la tangente de 30 degrés, & qu'on pourroit encore abréger & perfectionner par la tangente de 15 degrés, qui se réduit à trouver la série de $2-\sqrt{3}$ aussi aisée & plus prompte que celle de $\sqrt{3}$.

Le troisieme est $\sqrt{5}$, qui entre nécessairement dans l'expression du rapport du coté du pentagone au rayon du cercle, & de même pour les polygones de 10, de 20, de 40, de 80, &c. côtés.

Le quatrieme est $\sqrt{6}$, qu'on peut transformer ou *médiatement* par $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$, ou *immédiatement* par la formule exemplaire qui lui est propre.

Le cinquieme est $\sqrt{7}$, qui entre nécessairement dans l'expression du rapport du côté de l'heptagone au rayon, & des polygones

polygones de 14, 28, 56, 112, &c. côtés, comme je pourrai le démontrer dans un Mémoire particulier sur l'heptagone; & ainsi des autres irrationnaux du second degré, où l'on peut remarquer l'analogie du nombre des côtés du polygone régulier dans l'expression de son rapport au rayon avec le nombre quarré irrationnel correspondant, &c.

Voici ces formules exemplaires dans une parfaite analogie.

Pour $\sqrt{1}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{1a + 1b}{1a + 1b}$ rationnel.

Pour $\sqrt{2}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{1a + 2b}{1a + 1b}$

Pour $\sqrt{3}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a + 3b}{1a + 2b}$

Pour $\sqrt{4}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a + 4b}{1a + 2b}$ rationnel.

Pour $\sqrt{5}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a + 5b}{1a + 2b}$

Pour $\sqrt{6}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a + 6b}{1a + 2b}$

Pour $\sqrt{7}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a + 7b}{1a + 2b}$, ou $\frac{2a + 7b}{1a + 3b}$.

Pour $\sqrt{8}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{2a + 8b}{1a + 2b}$, ou $\frac{3a + 8b}{1a + 3b}$.

Pour $\sqrt{9}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{3a + 9b}{1a + 3b}$ rationnel.

&c. &c. &c.

Pour $\sqrt{13}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{3a + 13b}{1a + 3b}$, ou $\frac{4a + 13b}{1a + 4b}$.

&c. &c. &c.

Pour $\sqrt{41}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$, ou $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$.

&c. &c. &c.

Pour $\sqrt{46}$ . . . . $\frac{1a}{1b}$ & $\frac{6a + 46b}{a + 6b}$, ou $\frac{7a + 46b}{1a + 7b}$.

En général tout irrationnel du second degré peut s'exprimer par $\sqrt{aa + b}$, & par $\sqrt{AA - B}$. Dans le premier cas soit $aa + b = c$ & $a = d$, la formule sera $\frac{a}{b}$ & $\frac{ad + cb}{1a + ab}$;

puis supposant $ad + cb = e$ & $1a + ab = f$, on aura $\frac{ae + cf}{1e + af}$ pour second terme ; puis supposant $ae + ef = g$ & $1e + af = h$, on aura pour troisieme terme $\frac{ag + ch}{1g + ah}$, & ainsi de suite à l'infini.

Dans le second cas pour $\sqrt{AA - B}$, on supposera de même $AA - B = C$ & $A = D$, & l'on aura $\frac{A}{B}$ & $\frac{AD + CB}{1A + AB}$, &c. Universellement pour $\sqrt{aa \pm b} = \frac{1x}{1y}$ en supposant $aa \pm b = c$, l'on aura $\frac{ax + cy}{1x + ay}$.

Il est aisé d'observer l'analogie dans la série des formules ci-dessus : elle comprend également les nombres irrationnaux du second degré, & les nombres rationnaux. Ce qui est une propriété assez singuliere, & en même-temps une preuve de la bonté de la méthode.

REMARQUE I.

On peut d'abord former quatre séries d'approximation dans chaque cas particulier d'irrationnel du second degré, deux séries sur chacune des deux formules exemplaires, dont l'une est la formule par excès, & l'autre la formule par défaut. Par exemple, dans $\sqrt{41}$, l'on peut former les quatre séries suivantes ; car supposant $a = 6$ & $b = 1$, & se servant de la formule exemplaire $\frac{a}{b}$ & $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$, on formera la premiere série $\frac{6}{1}$, $\frac{77}{12}$, $\frac{954}{149}$, $\frac{11833}{1848}$, $\frac{146766}{22921}$, &c.

La même premiere formule $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$ & $\frac{1a}{1b}$, supposant $a = 7$, & $b = 1$ donne la seconde série $\frac{7}{1}$, $\frac{83}{13}$, $\frac{1031}{161}$, $\frac{12787}{1997}$, $\frac{158599}{24769}$, &c.

La seconde formule $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$ & $\frac{1a}{1b}$, en supposant $a = 7$ & $b = 1$ donne la troisieme série $\frac{7}{1}$ | $\frac{90}{14}$ ou $\frac{45}{7}$ | $\frac{1204}{188}$ ou $\frac{301}{47}$ | $\frac{16136}{2520}$ ou $\frac{2017}{315}$ | $\frac{216272}{33772}$ ou $\frac{13517}{2111}$ | &c.

Enfin la même seconde formule $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$, en supposant

$a = 6$, donne la quatrieme férie $\frac{6}{1} \mid \frac{83}{13} \mid \frac{1114}{174}$ ou $\frac{557}{87} \mid$
& $b = 1$
$\frac{14932}{2332}$ ou $\frac{1840}{289} \mid \frac{200136}{31256}$ ou $\frac{25017}{3907} \mid$ &c.

REMARQUE II.

Mais ce qui doit paroître ſurprenant, & qui eſt un vrai paradoxe, c'eſt que chacune de ces deux formules $\frac{6a + 41b}{1a + 6b}$ & $\frac{7a + 41b}{1a + 7b}$ fournira une infinité d'autres ſéries qui approcheront toutes & chacune indéfiniment de la valeur cherchée $\sqrt{41}$, en ſuppoſant a égal à un nombre quelconque, & b égal auſſi à un autre nombre quelconque, avec cette ſeule condition ou reſtriction que a ſoit plus grand que b; par exemple, on peut ſuppoſer $a = 100$, & $b = 7 = 13 = 91$, &c. $= 99$, & la force, ou, pour ainſi dire, la vertu de la formule eſt telle qu'on approchera toûjours indéfiniment, quelque extravagante que paroiſſe d'abord la ſuppoſition, ſoit par excès, comme de $\frac{100}{7} = \sqrt{41}$, ou par défaut, comme de $\frac{100}{97} = \sqrt{41}$.

REMARQUE III.

Il y a évidemment un choix à faire de la meilleure, non-ſeulement des quatre ſéries primitives, mais de l'infinité des autres ſéries poſſibles. Tout ſe réduit enfin à la ſérie formée par le triangle des rapports, qui eſt la plus ſimple & la meilleure de toutes.

$\frac{6}{1} \mid \frac{13}{2}, \frac{32}{5}, \frac{397}{67} \mid \frac{826}{129}, \frac{2049}{320}, \frac{25414}{3969} \mid$ &c.

Et qui ſe forme ainſi par la ſuite des quotiens générateurs $6 \mid 2, 2, 12 \mid 2, 2, 12 \mid$ à l'infini, en continuant par 2, 2, 12.

La ſérie des numérateurs, $6 \mid 13, 32; 397 \mid 826, 2049, 25414 \mid$ ſe forme ainſi :

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	
6.	13.	32.	397.	826.	2049.	25414.	&c.
	$2A + 1$.	$2B + 1A$.	$12C + 1B$.	$2D + 1C$.	$2E + 1D$.	$12F + 1E$.	

La férie des dénominateurs 1, 2, 5, 67, 129, 320, 3969, &c. fe forme ainfi & de même que celle des numérateurs.

a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	
1.	2.	5.	67.	129.	320.	3969.	&c.
	2 a + 0.	2 b + 1 a.	12 c + 1 b.	2 d + 1 c.	2 e + 1 d.	12 f + 1 e.	

REMARQUE IV.

La méthode d'*approximation* ne doit être employée que dans le cas où la méthode d'*exactitude* eft impoffible. Il eft vrai d'un côté que celle-ci eft infiniment plus parfaite que l'autre, quoique la différence ou l'erreur puiffe devenir indéfiniment petite; mais c'eft par rapport au temps qu'il faudroit employer dans l'approximation pour atteindre à l'exactitude. Ce temps eft infini. Il faudroit l'éternité toute entiere. En ce fens la méthode d'*exactitude* eft infiniment plus parfaite que celle d'approximation: mais d'un autre côté celle-ci eft d'un ufage indéfiniment plus fréquent & plus étendu que l'autre, parce que dans tout genre & toute efpece de problèmes ou d'équations au-deffus du premier degré, il y a une infinité plus de cas où les racines cherchées font irrationnelles, qu'il n'y en a où elles font rationnelles. Ainfi il y a une efpece de compenfation pour le prix de ces deux genres de méthode par rapport au calcul.

REMARQUE V.

1°. On étendra dans d'autres Mémoires cette méthode d'approximation à tous les membres irrationnaux fimples & compofés de tous les degrés à l'infini.

2°. On fixera dans chaque cas les limites d'approximation.

3°. On abregera indéfiniment l'opération & le calcul par de nouvelles féries dérivées de la férie fondamentale, qui donne tous les termes de fuite, en trouvant les termes, fuivant un nouvel ordre d'expofans en progreffion arithmétique ou géométrique quelconque ou compofé de ces deux

progreſſions. C'eſt précisément comme on abrége l'addition des ſimples unités une à une par l'addition ordinaire, & comme on abrége l'addition par la multiplication & la formation des puiſſances.

4°. Après avoir trouvé en nombres entiers les racines approchées de toutes les équations par ma méthode des progreſſions arithmétiques de tous les degrés à l'infini, on appliquera la méthode d'approximation à toutes ces mêmes équations, enſorte que *ſans aucun tâtonnement* on réduira à moins d'une unité la différence de l'homogene de comparaiſon réſultant de la racine approchée trouvée à l'homogene donné, quelque immenſe que pût être d'abord cette différence ; & c'eſt, ce me ſemble, à quoi ſe réduit tout ce qu'on peut ſouhaiter dans la ſcience du calcul.

OBSERVATIONS ANATOMIQUES
Sur quelques mouvemens extraordinaires des omoplates & des bras.
Et ſur une nouvelle eſpece de muſcles.

Par M. WINSLOW.

LA myologie des extrémités du corps humain eſt la partie de l'anatomie que l'on croit la plus facile & la plus connue. La diſſection de ces muſcles n'embarraſſe pas même les commençans. Leur démonſtration ſe fait communément d'une maniere à faire croire qu'un coup d'œil ſuffira pour en comprendre le mécanique & l'uſage. Et comme pluſieurs grands maîtres avoient travaillé là-deſſus, je croyois auſſi cette matiere preſque épuiſée, & par conſéquent aſſez ſtérile pour un Académicien, juſqu'à ce que *M. l'Abbé Bignon* me fit l'honneur de m'engager à un nouvel examen des articulations, comme il paroît par les Mémoires de l'Académie de l'année 1719.

7 Avril 1724.

Je commençai d'abord par quelques-uns des muſcles de l'omoplate. Enſuite je découvris dans pluſieurs autres des uſages dont perſonne n'avoit parlé, comme on peut voir dans les Mémoires imprimés depuis. Je ne peux m'enpêcher à cette occaſion de marquer ma douleur au ſujet de la perte que j'ai faite, auſſi-bien que toute l'Académie, par la mort de feu *M. Varignon*, qui m'avoit fort encouragé par le contentement qu'il me témoignoit de mon entrepriſe, & encore plus par une eſpece de convention de travailler avec moi ſur cette matiere, qu'il aimoit & qu'il avoit autrefois étudiée avec beaucoup de plaiſir.

Il ſe préſente aujourd'hui une occaſion très-particuliere d'admirer l'artifice de quelques mouvemens extraordinaires des omoplates & des bras, qu'il n'eſt pas ſi aiſé de comprendre que l'on pourroit s'imaginer. En voici l'hiſtoire.

Un Venitien nommé *Dominique Create*, âgé de 64 ans, un peu maigre & d'une taille médiocre, fait les tours ſuivans avec ſes omoplates & ſes bras.

1°. Il fait saillir très-conſidérablement les bouts ou les angles inférieurs de ſes omoplates, & les éloigne du dos, enſorte que les omoplates ſoulevent la peau, forment un creux conſidérable entre elles, & paroiſſent comme des ailerons ou des moignons d'ailes pointues. *Voyez la premiere Figure.*

Il remue les omoplates dans cette attitude avec une grande viteſſe en haut, en-bas, de côté & d'autre, & de pluſieurs autres mouvemens combinés de ceux-ci.

2°. Il approche les omoplates l'une de l'autre, de maniere que leurs baſes ſe touchent tout-à-fait & couvrent l'épine du dos. Il les approche avec tant de force, qu'en mettant une canne ou un bâton le long de l'épine du dos, il l'embraſſe entierement avec les omoplates, & les tient ſi fermement, qu'une autre perſonne ayant empoigné le bâton ou la canne ainſi embraſſés, ſouleve par-là tout le corps du Venitien de terre. *Voyez la ſeconde Figure.*

Par le même mouvement d'omoplates il embraſſe le bout d'une groſſe corde attachée au plancher, & en retirant ſes

jambes, il demeure suspendu en l'air, & se laisse balancer, ou pour ainsi dire voltiger sans quitter la corde. Par ce moyen il manie encore fort adroitement un fleuret au dessus de sa tête, en courbant le corps en devant. Il joue aussi très-aisément du drapeau avec ses omoplates. Tout ceci, comme encore de casser une noix avec les épaules, n'est que la suite d'un même mouvement.

3°. Il se donne une espece d'estrapade, & cela d'une maniere assez surprenante. Voici comme il s'y prend. Il se tient debout, & après s'être lié les mains par un mouchoir assez près l'une de l'autre, desorte qu'elles ne puissent pas se quitter, il leve un pied après l'autre pour passer ses mains par dessous, & les porter derriere le dos. Il fait ensuite plusieurs mouvemens & efforts pour les jetter plus en arriere & en haut; ce qu'ayant réitéré plusieurs fois, il les passe de derriere en haut par dessus la tête, & les fait revenir sur le devant où elles étoient quand il commençoit, & cela sans qu'elles se soient quittées. Ayant fait ces tours de bras plusieurs fois de suite, il les fait autant de fois à contre-sens, c'est-à-dire, il jette les bras de devant en haut par dessus la tête, & de-là en arriere, d'où il les fait revenir par dessous les pieds & en devant où il finit. *Voyez la troisieme & la quatrieme Figure.*

4°. Il tourne le bras droit en maniere de moulinet sur l'articulation de l'épaule, comme s'il étoit tout-à-fait disloqué, de maniere que le bras, qui est toûjours étendu, passe directement en arriere, & de-là en haut, de même qu'en devant & en bas. Il fait ces tours avec une grande vîtesse, & les ayant faits plusieurs fois dans un sens, il les repasse autant de fois à contre-sens.

M. de Reaumur, qui s'est toûjours signalé dans la compagnie par ses recherches infatigables & ses excellentes découvertes, mais sur-tout par sa maniere de travailler en vrai physicien, & conformément à l'intention de notre auguste Fondateur, de glorieuse mémoire, m'exhorta de donner une explication anatomique de ces tours, & me témoi-

gna ensuite que *M. l'Abbé Bignon* seroit bien-aise que j'en fisse un mémoire pour l'assemblée publique.

Sur cela je vis notre Venitien en particulier chez *M. Sauré*, très-habile Chirurgien-Juré à Paris, que j'avois prié de le faire venir chez lui, comme c'étoit lui qui me l'avoit indiqué par rapport à mon travail sur les muscles. J'examinai là à mon aise & de près par la vûe & par le maniement toutes les différences de mouvemens & d'attitudes qui se présentoient avant, pendant & après chaque tour qu'il faisoit. Je fis principalement les observations suivantes.

1°. La conformation des omoplates, des clavicules, des bras, du dos & de la poitrine paroît assez naturelle.

Je fais exprès cette remarque pour distinguer les tours de notre Venitien comme naturels, d'avec ceux qui se font par des os dérangés, des cartilages écornés & des ligamens forcés dès la jeunesse.

2°. Pour éloigner ses omoplates du dos en maniere d'aîlerons, il tournoit les bras en arriere, & joignoit derriere le le dos ses deux mains par un certain entrelacement de ses doigts. Il avoit en même-temps le dos vouté & la tete baissée. Dans cette attitude la partie supérieure du muscle trapeze paroissoit très-légerement bandée & le biceps gonflé.

3°. Pour joindre les omoplates & pour leur faire embrasser ou tenir un baton, une épée, une corde, &c. il tournoit aussi les bras en arriere, & joignoit les mains, mais avec cette différence, qu'il tenoit toûjours les bras exactement étendus & très-roides, soit qu'il fût debout pour embrasser la corde ou le baton, soit qu'il se baissât pour prendre & manier l'épée & le drapeau. Dans cette attitude des bras, le biceps de chacun étoit entierement gonflé, bandé & dur, & le moignon de chaque épaule étoit baissé.

4°. A l'égard du mouvement d'estrapade, il se faisoit si vîte, que l'on ne pouvoit pas bien fixer la vûe pour suivre distinctement les différentes attitudes qui se succédoient, & il étoit comme impossible à notre Venitien de tenir pendant tant soit peu de temps les bras en place ou en repos dans quelques-

quelques-uns des espaces qu'ils parcouroient entre leur attitude presque horisontale derriere le dos & leur attitude perpendiculaire sur la tête.

5°. Le mouvement de moulinet étoit encore plus prompt, & ne permettoit aucune inspection assez distincte pour faire des observations sur les attitudes successives des bras ainsi mûs. Tout ce que je pûs remarquer ici, est qu'il disoit avoir besoin de faire encore ce tour à contre-sens pour raccommoder son bras; & il le fit outre cela ensuite tirer & secoüer par une autre personne pour la même raison. Il observoit à peu-près la même chose après le mouvement d'estrapade. Il étoit plus long à se mettre en train pour ces deux sortes de mouvemens quand il avoit froid que quand il avoit chaud.

Après l'exposé historique des principaux tours du Venitien, & l'examen que j'en ai fait, il faut voir comment on les peut expliquer par l'anatomie, & quelle utilité on peut tirer de cette curiosité.

A l'égard de la saillie extraordinaire des omoplates en maniere d'aîlerons, on pourroit avec quelque raison croire qu'il n'y a que le plan supérieur du muscle trapeze qui puisse produire cet effet, en agissant sur l'omoplate comme sur un levier de la troisieme espece. Dans ce cas le point d'appui seroit à la partie supérieure de l'omoplate, qui seroit fixée à cet endroit en partie par le bras arrêté en arriere, & en partie par la portion supérieure du muscle grand-dentelé. Le plan supérieur du trapeze seroit la puissance qui, en tirant l'acromion en haut, souleveroit en même-temps comme une espece de poids ou de résistance l'angle inférieur de l'omoplate avec la peau. C'étoit ainsi que je croyois d'abord avoir trouvé l'explication de ce phénomene vû de loin : mais en l'examinant de près, je me sentis bien puni, pour avoir voulu aller à trop grand pas contre mon ordinaire; car je trouvai très-peu de résistance dans le muscle trapeze, & je vis avec étonnement une grande contraction dans le muscle biceps, dont on borne communément l'usage à la flexion de l'avant-bras. Cependant je fus très-ravi de trouver encore un nouvel em-

ploi de ce muſcle, outre ceux que j'avois déja découverts & publiés dans les Mémoires de l'Academie de 1720.

Ce nouveau phénomene du muſcle biceps me parut d'abord fort extraordinaire : mais après avoir bien confronté ſa ſituation naturelle avec l'attitude que le Venitien donne à ſes bras dans cette occaſion, je crois l'avoir compris dans la maniere ſuivante. Quand on tient les mains jointes derriere le dos, ayant les coudes fléchis, il faut néceſſairement que la partie antérieure de l'os du bras ſoit tournée vers les côtes, & les autres parties à proportion, comme il paroît aſſez évidemment par la ſituation forcée du coude & du pli de chaque bras dans cette attitude. On ſçait que le muſcle biceps eſt attaché par ſon extrémité inférieure à l'avant-bras, & par deux extrémités ſupérieures à l'omoplate, ſçavoir au-deſſus de ſa cavité glenoïde & à la pointe de ſon avance nommée *coracoïde ;* on ſçait auſſi que le corps de ce muſcle eſt placé le long de la partie preſque antérieure de l'os du bras. Ainſi dans l'attitude préſente, l'os du bras étant contourné de la maniere que je viens de dire, ce muſcle eſt auſſi tourné vers les côtes, & paroît même en arriere, comme on voit par la premiere figure. Il s'enſuit de-là qu'étant contracté ou raccourci dans cette ſituation, & ſon extrémité inférieure étant fixée par l'avant-bras qui eſt arrêté derriere le dos, il doit mouvoir l'omoplate ſur la tête de l'os du bras en maniere de levier de la premiere eſpece, c'eſt-à-dire, appliquer ſa partie ſupérieure aux côtes, & par le même mouvement en écarter ſa partie inférieure. Pour rendre cet écartement plus ſenſible, il faut pouſſer les mains fortement contre le dos. En obſervant cette derniere circonſtance, que j'expliquerai dans la ſuite, il eſt facile à chacun, principalement à ceux qui ſont maigres, de faire le même tour, mais non pas dans le même degré que le Venitien.

Le ſecond tour de cet homme ou ſon adreſſe d'approcher ſes omoplates, & de tenir fortement entre elles différentes choſes, me parut d'abord plus difficile à comprendre que le premier. On dit communément que les omoplates ſont

tirées vers l'épine du dos par les muſcles nommés *rhomboïdes*, & par une portion du trapeze : mais il eſt aſſez évident qu'ils ne peuvent pas ſe raccourcir juſqu'à joindre tout-à-fait les omoplates, & que s'ils le pouvoient, ils empêcheroient les omoplates d'embraſſer. Avant l'examen particulier de ce tour, je croyois en avoir trouvé tout l'artifice dans les ſeuls muſcles appellés *grands dorſaux*, & je penſois que les bras étant tirés en arriere par la portion ſupérieure de ces muſcles, pourroient pouſſer les omoplates vers l'épine du dos. Mais en regardant de près, je fus auſſi ſurpris que dans l'examen du premier tour, de n'y ſentir preſque aucun effort, & de voir encore le muſcle biceps employé & être extraordinairement gonflé. Je compris bien-tôt par-là que la mécanique de ce ſecond tour étoit preſque la même que celle du premier, & que le muſcle biceps étoit encore ici le principal acteur ou moteur, mais par une direction différente. Car l'os du bras étoit ici tourné de maniere que le biceps étoit ſitué dans un ſens preſque oppoſé à celui qu'il avoit dans le premier tour ; les coudes étoient preſque tournés l'un vers l'autre ; les bras étoient très-étendus & les mains jointes. Dans cette attitude les deux biceps ſe mettant en contraction, & étant fixés par leurs extrémités inférieures, meuvent encore les omoplates ſur leur articulation en maniere de levier de la premiere eſpece, mais autrement que dans le premier tour, car ils tirent l'apophyſe coracoïde & la partie ſupérieure du col de chaque omoplate directement en dehors, & par-là pouſſent leurs baſes vers l'épine du dos, & les approchent. Pour ſerrer fortement les omoplates ainſi jointes, il faut que les bras ſoient fermement étendus, les mains jointes & les coudes en même-temps contournés vers l'épine du dos avec effort, comme je l'expliquerai plus en détail dans la ſuite de ce Mémoire. Le muſcle coraco-brachial y contribue auſſi.

Le mouvement d'eſtrapade n'eſt pas ſi difficile à expliquer qu'il l'eſt à imiter. Le plus rude & le ſeul extraordinaire de ce tour eſt de lever les bras derriere le dos, & de les hauſſer

tout de ſuite pour les faire paſſer au-deſſus de la tête ſans dégager les mains liées. Tout le reſte eſt très ordinaire, & on comprend facilement que pour paſſer les mains liées par deſſous les pieds, il ne faut que pouvoir bien plier une jambe, & ſe tenir en même-temps ferme ſur l'autre. En faiſant cette eſpece d'eſtrapade à contre-ſens, la grande difficulté ſe rencontre au même point, ſçavoir quand il faut renverſer les bras de devant en arriere par deſſus la tête, les mains liées enſemble. Ainſi de tout le cercle que les bras décrivent par ce mouvement, c'eſt environ le tiers qui renferme toute la difficulté, & qui eſt compris en arriere entre le dos & la tête.

Avant que d'expliquer ce mouvement, il faut faire ſouvenir que l'articulation de l'os du bras avec l'omoplate eſt ſphéroïde & ſemblable à ce que les faiſeurs d'inſtrumens de mathématique appellent *genou*; que la tête hémiſphérique de l'os du bras eſt poſée obliquement, & qu'elle eſt tournée un peu de dedans en arriere, & non pas directement vers les côtes, comme les figures ordinaires du ſquélete le repréſentent. Elle eſt ainſi tournée pour répondre à la cavité articulaire de l'omoplate qui eſt ſituée à proportion. Il faut encore avant que d'expliquer ce tour, faire diſparoître une difficulté très-chimérique, qui néantmoins eſt ici la plus éblouïſſante, & cache, pour ainſi dire, celle qui mérite plus d'attention. Car en regardant ce tour, on eſt d'abord porté à croire que le mouvement des bras autour du centre de leur articulation avec les omoplates n'eſt que ſimple, uniforme & à peu-près ſemblable à celui des rayons de roue autour de l'eſſieu. Mais pour peu que l'on y faſſe attention, ſans même ſçavoir l'anatomie, on voit bien que l'on ne pourroit faire ce mouvement uniforme ſans tordre & déchirer les parties molles qui lient & ſoûtiennent l'articulation. De plus il n'y a point d'organe pour accomplir un tel mouvement, quand même il ſeroit poſſible. Ainſi il ne faut pas encore le confondre avec celui d'une eſtrapade réelle qui dérange l'articulation & bleſſe conſidérablement les parties qui l'environnent.

Une vraie connoiſſance de la ſtructure & de la mécanique de cette articulation & de ces parties diſſipe entierement la fauſſe apparence que la vîteſſe du mouvement favoriſe, & elle découvre ce qui s'y paſſe réellement, de la maniere ſuivante.

L'un & l'autre bras n'a qu'un ſimple mouvement de rayon dans les trois quarts plus ou moins du cercle de ce tournoyement autour du centre de l'articulation, comme il eſt facile à chacun de voir, en portant le bras directement, ſucceſſivement & lentement en haut, en devant, en bas & en arriere. Mais dans l'eſpace ou dans le tiers de cercle de la circonvolution qui reſte à faire de derriere en haut, ce mouvement devient compoſé & comme triple. La colonne de l'os du bras, en parcourant cet eſpace en ce tiers de cercle, fait en même-temps deux petits mouvemens différens autour de ſon axe; car étant parvenue de devant par enbas en arriere par un ſimple mouvement de rayon de roue, elle commence là à ſe tourner peu-à-peu en maniere de pivot autour de ſon axe juſqu'à un certain degré où elle fait encore un petit tour de pivot à contre-ſens pour revenir au ſimple mouvement de rayon. Ceux qui ſe laiſſent facilement emporter & éblouïr par une ſeule nouveauté vraie ou fauſſe, ne ſongeroient pas à ces deux petits tours eſſentiels que la vîteſſe du mouvement dérobe à la vûe, & ils forgeroient là-deſſus un ſyſtème très-ſpécieux, quoique faux.

Après avoir découvert cette difficulté apparente, celle qu'on peut regarder comme réelle eſt le grand renverſemenr des bras derriere les épaules & la tête. Un peu d'attention à ce que je vais dire, en facilitera l'explication. On ſçait que pluſieurs mouvemens du bras ne ſe font pas tant par ſon articulation avec l'omoplate que par les différentes attitudes changeantes de l'omoplate qui les favoriſent. Cela eſt aſſez évident par l'inſpection des épaules de ceux qui ſont maigres, pendant qu'ils font différens tours de bras. Une longue habitude rend les articulations plus aiſées, les ligamens plus ſouples & les muſcles plus agiſſans, comme quantité d'exem-

ples ordinaires le prouvent aſſez, ſans parler des habitudes forcées. Par deſſus tout cela, le Venitien ayant l'avantage de pouvoir reculer ſes omoplates très-conſidérablement, il a auſſi plus de facilité à renverſer ſes bras. Il paroît même qu'il ne recule pas les deux épaules dans le même-temps, mais l'une après l'autre, pour ne pas les froiſſer ou bleſſer par leur rencontre. Il faut encore obſerver qu'il fait pluſieurs mouvemens préparatifs avant que d'en venir à celui d'eſtrapade, pour rendre les muſcles & les ligamens ſouples, & pour exprimer une quantité ſuffiſante de la lymphe mucilagineuſe qui arroſe ces articulations, & les rend plus gliſſantes.

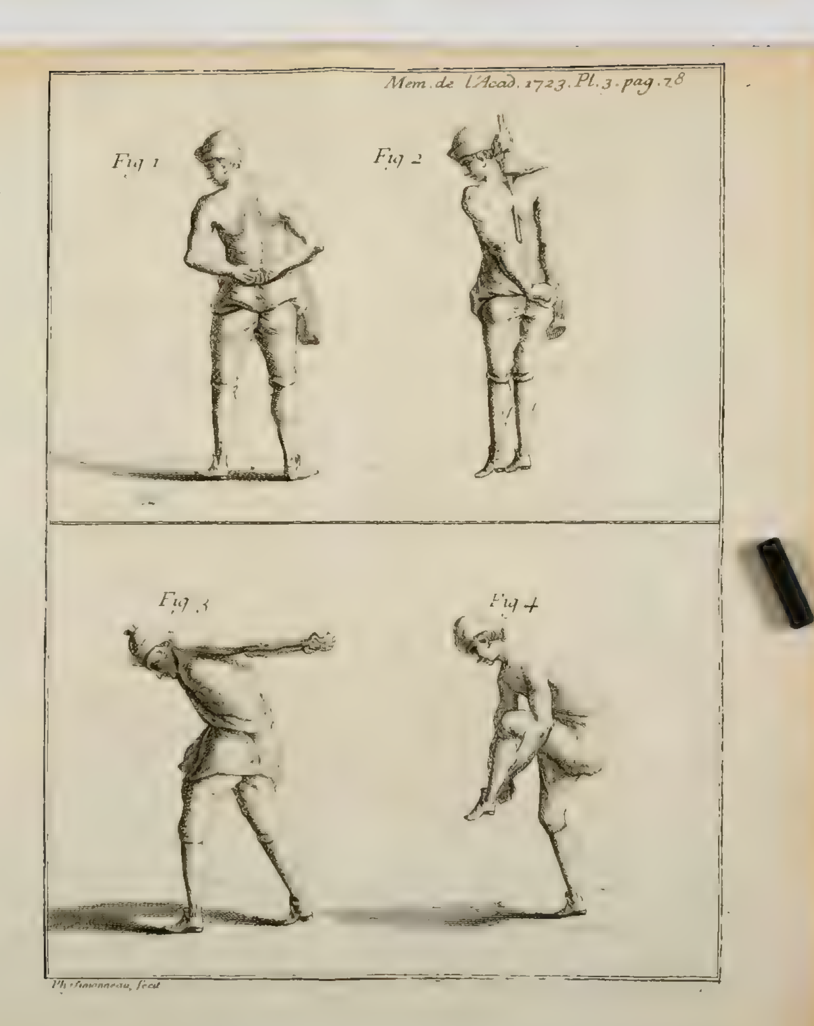
Le mouvement de moulinet dépend de la même mécanique que celui d'eſtrapade : mais il eſt plus aiſé quand il eſt une fois en train, parce qu'il ſe fait par un ſeul bras & tout de ſuite ſans obſtacle. Ce mouvement paroît auſſi en quelque maniere dans ceux qui tournent la fronde.

Je remets à la ſuite de ce Mémoire l'explication de pluſieurs autres phénomenes par rapport aux muſcles coadjuteurs des mouvemens qui ont paru dans ces tours du Venitien. J'y joindrai mes remarques ſur l'utilité qui en réſulte, avec la découverte de la nouvelle eſpece de muſcles que j'ai annoncée dans le titre.





Fig. 4.



Ph. Simonneau, fecit

PROPOSITION ELEMENTAIRE SUR LES TRIANGLES.

Par M. DE BEAUFORT.

THÉOREME.

En tout triangle la somme des quarrés de deux côtés est égale à deux fois la somme des quarrés de la moitié du troisieme côté, & de la ligne menée du milieu de ce côté à l'angle opposé. 24 Avril 1723.

DÉMONSTRATION.

SOIT le triangle *ABC*, dans lequel la ligne *AD* est menée de l'angle *A* au milieu *D* du côté *BC*: je dis que la somme des quarrés de *AB* & *AC* est double de la somme des quarrés de *AD* & *CD*. Fig. 1.

Je distingue dans cette proposition trois cas que je vais démontrer.

Le premier est, lorsque le côté *AB* est égal à la ligne *AD*. Fig. 2.

Le second, quand ce côté est plus grand. Fig. 3.

Le troisieme, quand il est plus petit. Fig. 4.

PRÉPARATION.

Ayant du centre *A* & du rayon *AD* décrit dans tous les cas le cercle *DEHG*, & prolongé *CA* en *G*, & *BA* en *H*.

On aura pour le premier cas $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{EC \times 2AE + EC} = \overline{2AD}^2 + EG \times CG = \overline{2AD}^2 + DC \times CB = \overline{2AD}^2 + \overline{2DC}^2$. Fig. 2.

On trouvera pour le second cas $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AF}$ Fig. 3.

$+ FB \times \overline{2AF + FB} + \overline{AE}^2 + EC \times \overline{2AE + EC} = 2\overline{AD}^2 + DB \times BK + DC \times CK = 2\overline{AD}^2 + DC \times CB = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2.$

Fig. 4. Dans le troisieme cas, on voit aussi que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + EC \times \overline{2AE + EC} + \overline{AF}^2 - BF \times \overline{2AF - FB} = 2\overline{AD}^2 + DC \times KC - DB \times KB = 2\overline{AD}^2 + DC \times CB = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

Fig. 5. Lorsque le côté AB est égal au côté AC, la ligne AD est perpendiculaire au coté BC, & la démonstration qui se trouve la même en devient plus aisée, & fournit un moyen facile de prouver la propriété du triangle rectangle, comme on le voit dans le Corollaire suivant.

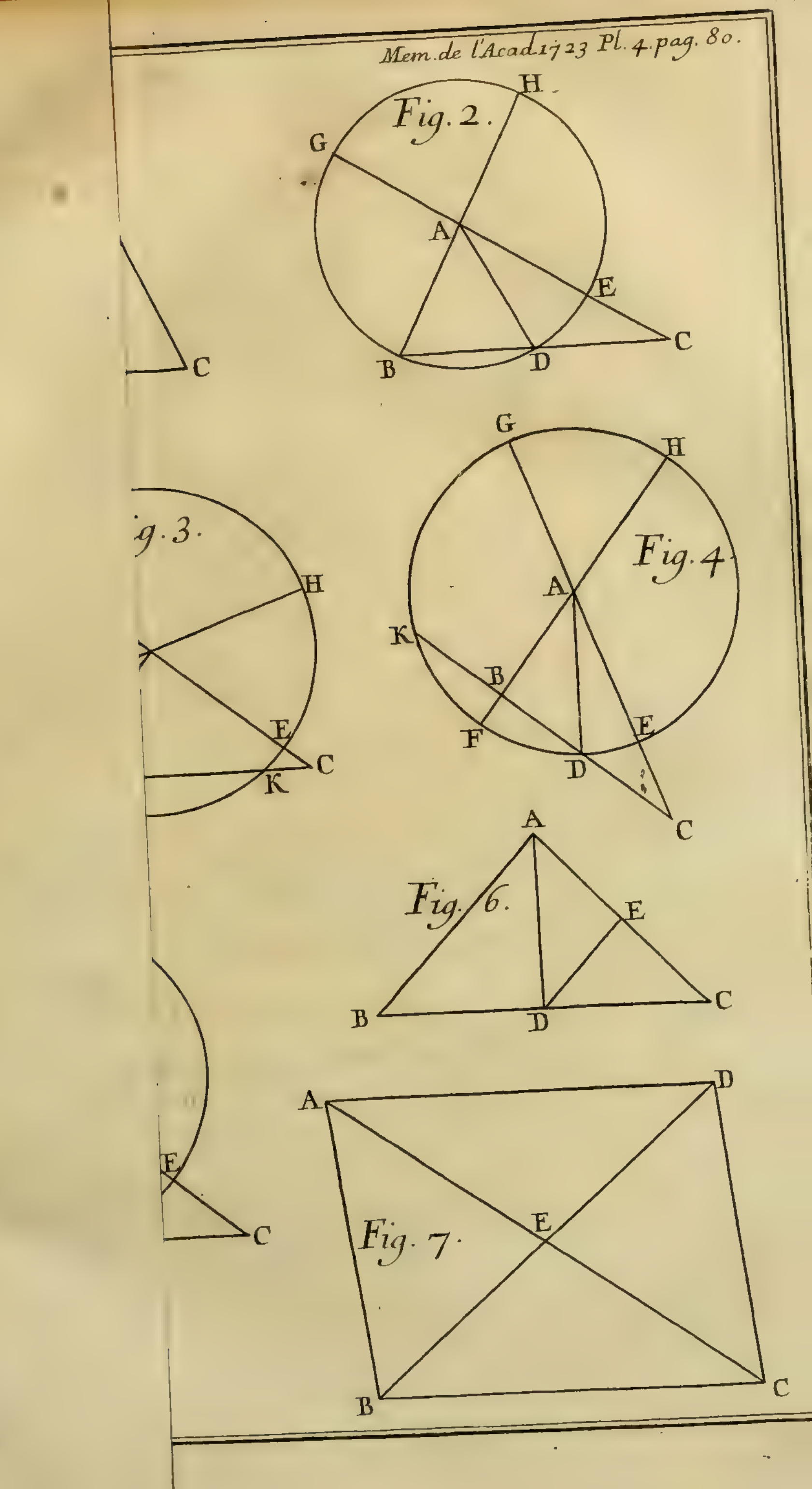
COROLLAIRE.

Fig. 6. Dans le triangle isoscele ABC on a $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2$, donc dans le triangle ADC rectangle $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2$. On prouvera la même chose en menant DE qui coupe AC en deux également, ce qui donnera selon le théorème $\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 2\overline{DE}^2 + 2\overline{CE}^2 = 4\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

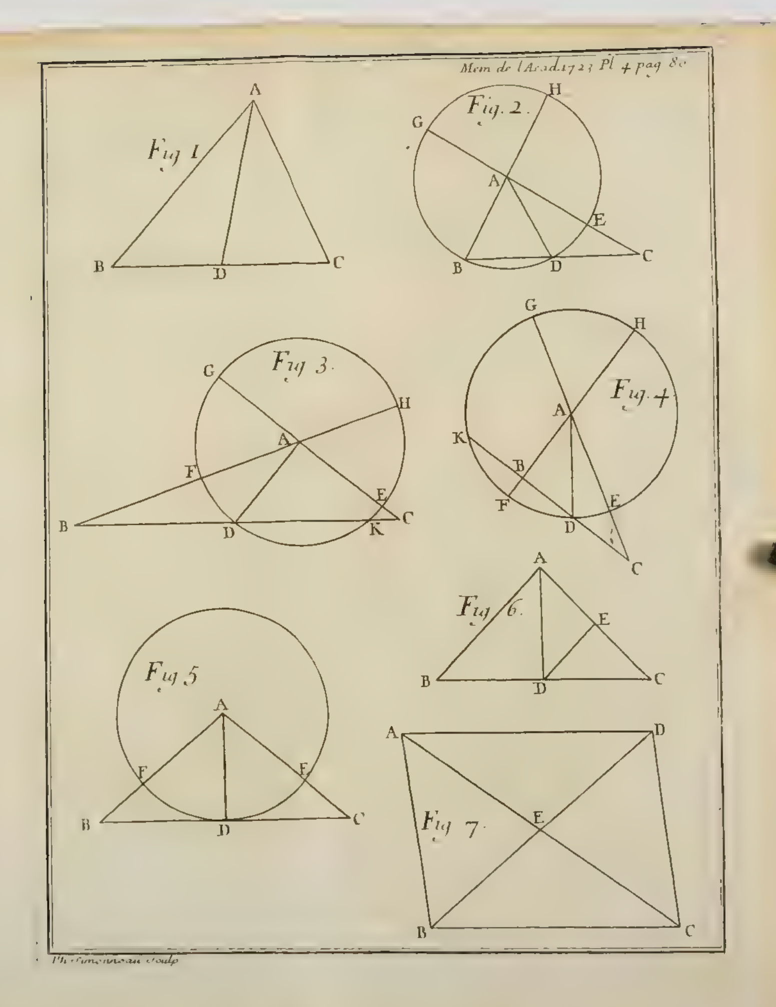
REMARQUE.

J'ai évité de me servir dans cette démonstration de la propriété du triangle rectangle que je voulois déduire de la propriété générale que je viens de prouver dans tous les triangles.

Voici encore un Corollaire qui se tire du théorème, & que je mets ici par l'utilité dont il peut être. M. de Lagny s'en



Mem. de l'Acad. 1723 Pl. 4. pag. 80.
Fig. 2.
G
H
A
E
B
D
C
C
ig. 3.
H
E
C
K
G
H
Fig. 4.
A
K
B
F
E
D
C
A
Fig. 6.
E
B
D
C
F
C
A
D
Fig. 7.
E
B
C



Ph. Simonneau Sculp.

s'en est servi pour trouver l'angle que font les asymptotes de l'hyperbole qui donne les logarithmes ordinaires. On en peut voir la démonstration qu'il a donnée page 319. des Mémoires de l'Academie de l'année 1706.

COROLLAIRE.

La somme des quarrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des quarrés des diagonales.

Dans le parallélogramme *ABCD*, on voit que $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$ & $\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 2\overline{CE}^2 + 2\overline{BE}^2$. Donc $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AC}^2$. *Ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 7.

EXPERIENCES

Qui montrent avec quelle facilité le FER *&* l'ACIER *s'aimantent, même sans toucher l'*AIMANT.

Par M. DE REAUMUR.

CEUX qui ont le plus travaillé sur l'aimant, regardent le fer comme une espece d'aimant imparfait. Il tient à bien peu qu'il n'en ait les proprietés, puisqu'un simple & presque instantanée contact de cette pierre les lui communique ; il les acquiert même seul sans toucher l'aimant. Les fameuses croix des clochers d'Aix & de Chartres ont assez appris qu'exposé à l'air pendant une longue suite d'années, il semble se convertir en véritable aimant. Mais il ne lui faut pas un temps considérable pour en prendre plus foiblement les vertus ; une barre de fer posée verticalement a bien-tôt deux poles comme l'aimant, dont l'un attire une des pointes de l'aiguille aimantée, & dont l'autre repousse la même pointe : on sçait qu'on peut trouver dans chaque 23 Fevr. 1723.

cheminée de quoi faire cette expérience; les pincettes y ſont propres, pourvû qu'on ait l'attention de ne les pas renverſer de haut embas. M. Rohault rapporte qu'ayant fait rougir un morceau d'acier long & délié, & l'ayant enſuite trempé en le tenant perpendiculaire à l'horiſon, il a trouvé à chacun de ſes bouts la vertu d'un des poles de l'aimant, jointe à celle d'attirer aſſez bien la limaille de fer.

Le fer & l'acier ſont ici pour nous la même choſe. Il y a une façon dont ils s'aimantent beaucoup plus ſûre & plus commune que la précédente, & cependant plus connue des ouvriers en fer que des phyſiciens. Dans les boutiques des Serruriers, des Couteliers, des Taillandiers, on ne voit qu'outils aimantés; preſque tous ceux dont ces ouvriers ſe ſervent pour couper ou percer le fer à froid, comme ciſeaux, forets, poinçons, ſe chargent de limaille de fer dès qu'on les en approche, il y en a même qui enlevent auſſi-bien de petits clouds qu'ils le feroient ſi on les eût fait toucher par un aimant médiocre; les limes même ſe trouvent ſouvent aimantées : en un mot, cela eſt propre à tous les ouvrages qui entament le fer.

Quelque commune que ſoit cette maniere dont l'acier s'aimante, je ne ſçache point que les phyſiciens l'ayent encore examinée. En général on étudie trop la phyſique dans ſon cabinet. Elle ma paru meriter attention, & m'a inſenſiblement engagé à faire diverſes expériences que je rapporterai dans ce Mémoire. Tout ce qui a rapport aux propriétés de l'aimant, nous offre des faits ſurprenans: mais le nombre de tant de faits connus ne doit pas nous faire négliger ceux qui ſe préſentent de nouveau. Plus nous en raſſemblerons, & plus nous ſerons en état de rendre raiſon de ceux que nous ſçavons déja, ou de juger ſi les explications que nous en donnions ſont les véritables.

J'ai commencé par examiner ſi les outils dont je viens de parler, tiennent leur propriété d'attirer le fer du fer, même qu'ils ont coupé ou percé, ou s'ils ne la doivent point à la trempe. J'en ai fait forger de différentes eſpeces & de diffé-

rentes grandeurs en chaque eſpece ; je les ai fait tremper, & j'ai eſſayé ſi immédiatement après la trempe ils étoient en état d'attirer la limaille. Je n'en ai trouvé aucun à qui elle eût donné cette proprieté, au moins ſenſiblement ; à peine en ai-je vû qui enlevaſſent un grain de limaille ou deux, & peut-être euſſent-ils fait davantage avant d'être trempés.

L'expérience de M. Rohault déja citée, m'a même engagé de répéter celles-ci pluſieurs fois, & cela, parce qu'outre les poles qu'il a reconnus à la verge d'acier qu'il a trempée verticalement, il lui a trouvé la vertu d'attirer une quantité de limaille de fer aſſez conſidérable. J'ai pourtant eu beau tremper l'acier dans les circonſtances qu'il décrit, je n'ai jamais vû que la trempe lui ait donné aucune vertu d'attirer ſenſiblement. Je ne doute pas néantmoins que le morceau d'acier dont il a parlé, n'eût la proprieté qu'il lui a attribuée : mais apparemment que ce n'étoit pas de la trempe qu'il la tenoit. Nous verrons dans la ſuite bien des circonſtances qui auroient pû la lui donner, auxquelles apparemment M. Rohault n'aura pas pris garde.

Il eſt donc ſûr que les outils d'acier qui viennent d'être trempés, n'ont nullement la vertu d'attirer le fer : mais il ne faut qu'un inſtant pour la leur donner. Qu'on prenne un ciſeau ou un poinçon au ſortir de la trempe, qu'on poſe le taillant de l'un ou la pointe de l'autre ſur un morceau de fer, n'importe ſous quelle inclinaiſon, & qu'on donne enſuite un coup de marteau ſur l'autre bout de l'outil, en voilà aſſez, on a aimanté ſa pointe ou ſon taillant; qu'on préſente cette pointe ou ce taillant à de la limaille, elle l'attirera, elle s'en hériſſera. Il a ſuffi à l'outil de couper le fer pour prendre la vertu de l'attirer. Après le premier coup de marteau, cette vertu eſt encore foible; on l'augmente ſi on applique une ſeconde fois la pointe de l'outil ſur un morceau de fer, & qu'on frappe ſur l'autre bout une ſeconde fois. Cette opération ſimple, répétée un nombre de fois, ajoûtera toûjours à la nouvelle force attractive : mais il y a un terme par de-là lequel on répeteroit inutilement l'opération, la vertu de

l'outil n'y gagneroit plus rien. Ceux dont on s'eſt ſervi pendant pluſieurs mois ne ſont pas plus forts que ceux dont on ne s'eſt ſervi que pendant un jour, & même que ceux dont on ne s'eſt ſervi que pendant quelques quarts d'heure.

Il y a pourtant diverſes circonſtances qui contribuent à augmenter cette force : mais avant de les rapporter, cherchons quelle eſt la cauſe de cet effet ſingulier ; pourquoi un morceau de fer, qui n'a ſenſiblement aucune des propriétés de l'aimant, aimante néantmoins l'acier par qui il eſt percé ou coupé, auſſi-bien que le pourroit faire un aimant foible ? Les expériences qui me reſtent à rapporter, ſeront peut-être plus naturellement placées à la ſuite des conjectures que j'ai à propoſer ſur la cauſe de cet effet, elles pourront ſervir à les appuyer.

Je ſuppoſe qu'on ne ſçauroit douter que la vertu attractive de l'aimant ou du fer aimanté ne dépende de la matiere magnétique qui circule dans l'aimant & autour de l'aimant, & de même dans le fer & autour du fer aimanté. Ceux qui raiſonnent ſur des idées claires, ne me le conteſteront pas. Au reſte je ne m'embarraſſe à préſent ni de la figure de cette matiere, ni d'examiner ſi elle entre par un des poles, & ſort par l'autre, ou ſi elle entre par l'un & par l'autre, ni comment cette matiere attire, ſi c'eſt en chaſſant le fluide qui eſt entre le fer & l'aimant, ou ſimplement en pouſſant le fer. Toutes ces queſtions regardent un traité général de l'aimant, que je n'ai ici en vûe en aucune ſorte. Il ſuffit qu'on m'accorde que la vertu attractive de l'aimant eſt l'effet des tourbillons de matiere magnétique qui circulent dedans & autour de cette pierre ; que le fer quand il s'aimante, acquiert de pareils tourbillons ; & que de-là il ſuit que, toutes choſes d'ailleurs égales, plus la quantité de matiere qui compoſe un tourbillon devient grande, & plus la vertu attractive devient forte.

Je fais encore une autre ſuppoſition, qui ne m'eſt pas moins néceſſaire que la précédente. Je demande à préſent qu'on me l'accorde ; peut-être ferai-je voir qu'on ne m'aura rien accor-

dé de trop, que je pouvois même demander davantage. Cette seconde supposition est que le fer dans lequel les propriétés de l'aimant ne se manifestent point, est cependant actuellement rempli de matiere magnétique qui y circule, & qui peut-être y est en quelque sorte emprisonnée ; je veux dire que dans l'intérieur de tout fer il y a actuellement de la matiere magnétique qui y forme une infinité de petits tourbillons différens qui ont chacun leurs poles particuliers, & que la plûtpart des passages, par où cette matiere pourroit s'échaper, sont peut-être bouchés.

Cette seconde supposition admise, rien n'est plus aisé que de comprendre comment un outil d'acier s'aimante, lorsqu'il perce un morceau de fer. Dans l'instant que le coup de marteau tombe sur l'outil, la pointe de cet outil presse les parties du fer, elle les sépare les unes des autres, & continue de presser les parties séparées : les tourbillons qui se trouvoient dans le chemin qui a été ouvert, sont donc dérangés ; ceux même qui se trouvoient entre les parties du fer qui se sont rapprochées sont alors trop comprimés : la matiere de ces tourbillons est donc forcée de prendre d'autres directions ; sçavoir, celles où elle trouve moins de résistance ; & ce sont sans doute celles qui la conduisent à enfiler l'outil d'acier ; ses parties plus dures, plus roides que celles du fer, n'ont point, ou ont été très-peu comprimées, pendant que les autres l'ont été considérablement. Qu'on se souvienne aussi que nous avons démontré ailleurs que les parties de l'acier trempé sont plus écartées les unes des autres que celles de l'acier non trempé. La matiere magnétique a donc plus de facilité à entrer dans l'acier qu'à continuer à circuler dans le fer, ou peut-être même se trouvoit-elle déja gênée à décrire de trop petits tourbillons, elle s'y ouvre de nouveaux passages, ou aggrandit ceux qui y étoient déja ; & toute cette matiere tendant à prendre la même route, l'acier se trouve dans le même cas où il seroit, si on l'eût appliqué contre un des poles d'un aimant foible.

Si on répete l'opération, on augmente la vertu attractive

de l'outil ; de nouvelle matiere sera forcée à pénétrer : elle s'ouvrira de nouveaux chemins, ou elle aggrandira ceux qui étoient ouverts ; la circulation de la matiere magnétique se fera plus librement, ou, ce qui est la même chose, plus abondamment dans l'acier, par conséquent sa vertu d'attirer sera augmentée. Mais après qu'on aura répété cette opération un certain nombre de fois, on ne doit plus trouver d'accroissement dans la force attractive de l'Acier. La pointe a beau percer de nouveau fer, elle a beau rompre de nouveaux tourbillons, forcer de nouvelle matiere magnetique à sortir, cette matiere trouve assez de passages tout formés dans l'acier, sans avoir besoin de s'en faire de nouveaux : elle a plus de facilité à suivre les premiers qu'à s'en ouvrir d'autres.

Ces faits, ce me semble, se déduisent très naturellement de notre seconde supposition ; si on avoit cependant quelque peine à admettre, que la pression que souffrent les parties voisines de l'outil qui coupe ou perce le fer, suffit pour déranger des tourbillons que nous avons supposé entre ses parties, cette difficulté pourroit être levée par une expérience déja connue, & que j'ai répetée bien des fois. L'existence des tourbillons magnétiques est incontestable dans l'acier aimanté ; qu'on donne quatre à cinq coups de marteau, même assez légers, sur l'acier qui s'est aimanté en coupant le fer, ou en touchant quelque aimant foible, on lui ote toute, ou presque toute sa vertu attractive : ces coups ont donc la force de détruire les tourbillons de matiere magnétique, quoiqu'ils pressent peut-être beaucoup moins les parties du fer sur lesquelles ils tombent, que le ciseau ne presse les parties qui s'opposent à son action.

Mais la supposition que nous avons faite des tourbillons de matiere magnétique emprisonnée en quelque sorte dans le fer même, paroitra peut etre une difficulté considérable contre notre explication. Ce métal ne semble pas propre à s'opposer au cours de la matiere magnétique ; cette matiere qui le pénetre si aisément, peut-elle y être en quelque sorte emprisonnée ? Il est vrai que des torrens de matiere magné-

tique, tels qu'en fournit l'aimant, peuvent fur le champ s'ouvrir des paffages dans le fer, mais lorfque cette matiere coule moins rapidement, ce n'eft qu'à la longue qu'elle aimante du fer au point néceffaire, pour le mettre en état d'attirer d'autre fer. Les obftacles qui font forcés par des torrens, réfiftent à des ruiffeaux; les parties de fer oppofent des réfiftances au paffage de la matiere magnétique, qui ne peuvent être vaincus qu'après un temps confidérable, lorfque les courans de cette matiere font foibles. Ce que nous difons de la matiere qui tend à entrer dans le fer, nous le pouvons dire de celle qui tend à en fortir; le fer aimanté perd fa vertu attractive d'une infinité de manieres différentes. Quand il la perd, les paffages qui donnoient entrée à la matiere, fe bouchent; ces paffages attendent-ils à fe boucher, que toute la matiere qu'il contenoit fût fortie? La fortie n'eft-elle pas fermée à celle-ci, quand l'entrée eft fermée à l'autre? Les coups de marteau, par exemple, qui fur le champ font perdre au fer la vertu d'attirer, étréciffent ou bouchent fur le champ les ouvertures par où cette matiere magnétique couloit librement.

Enfin quoiqu'il puiffe fe faire que de petits tourbillons, des tourbillons foibles de matiere magnétique fe trouvent renfermés dans le fer, on regardera fans doute l'exiftence de ces tourbillons comme prife gratuitement, & feulement en faveur du phénomene que nous avons voulu expliquer. Dès qu'elle y fatisfait, & qu'il n'y a nul inconvénient à l'admettre, c'en feroit affez en bonne phyfique pour la recevoir: mais les expériences que nous rapporterons dans la fuite, concourront à bien établir l'exiftence de ces petits tourbillons. Pour expliquer même dès-à-préfent l'idée que ces expériences m'ont donnée du fer, je dirai que je le regarde comme un aimant imparfait, & cela, non-feulement parce qu'il a de la difpofition à prendre les propriétés de l'aimant, mais je le regarde principalement comme tel, en ce qu'il eft continuellement pénétré d'une grande quantité de matiere magnétique. Peut-être en a-t-il moins que l'aimant, c'eft ce que

j'ignore : mais je crois qu'il en a une quantité très-considérable. Je ne veux pas seulement parler des petits tourbillons de matiere magnétique que j'ai supposé circuler dans l'intérieur du fer, je lui en crois d'autres qui entrent continuellement dans sa substance, qui ensuite en sortent ; en un mot, je lui crois, comme à l'aimant, une atmosphere, mais moins étendue. Si on me demande pourquoi le fer, avec cette abondance de matiere magnétique, ne produit pas les effets de l'aimant ? C'est qu'il manque de poles aussi-bien déterminés que ceux de l'aimant. C'est de ces poles que l'aimant tire sa force, c'est par eux que passe la plus grande partie de la matiere qui y circule ; il ne peut presque rien vers son équateur pendant que ses poles soûtiennent des poids considérables. Un aimant dont les poles seront mieux marqués que ceux d'un autre, aura plus de force, quoique la même quantité de matiere magnétique circule dans l'un & dans l'autre. Si donc on conçoit que le fer est, pour ainsi dire, un aimant brouillé, un assemblage d'une infinité de petits aimants, qu'il ressemble à une masse de poudre d'aimant ; en un mot, que le fer a presque par-tout des poles insensibles, il sera aisé de concevoir que quoiqu'il se fasse autour de ce métal & dans son intérieur une grande circulation de matiere magnétique, qu'il n'en doit pas avoir plus de force attractive, parce que les tourbillons, les courans ne concourent pas vers le même endroit.

Je fis, sans le chercher, l'expérience qui m'a donné cette idée du fer. Pendant que j'éprouvois jusques à quel point on pouvoit aimanter des outils d'acier, en leur faisant couper ou percer ce métal, j'étois proche d'une enclume, sur laquelle je posois les petits morceaux de fer avec lesquels j'essayois la force de mes aciers aimantés. Je mis sur ma main un des morceaux de fer qui venoit d'être attiré, étant sur l'enclume ; l'acier aimanté n'eut plus la force d'enlever ce fer, lorsqu'il fut sur ma main ; il ne put même se charger d'un morceau beaucoup plus léger. Je posai les morceaux que je voulois faire attirer sur d'autres corps, comme sur du bois,

sur

ſur du papier, l'outil n'eut pas plus de priſe ſur eux que lorſqu'ils étoient dans ma main : mais auſſi-tôt qu'ils eurent été remis ſur l'enclume, l'acier enleva le plus gros des morceaux avec autant de facilité qu'il l'avoit fait auparavant. La même expérience répétée & variée enſuite de diverſes façons, m'a donc fait voir que l'acier aimanté avoit plus de force pour attirer le fer poſé ſur d'autre fer, que pour attirer le même fer, lorſqu'il eſt poſé ſur tout autre corps. J'ai trouvé même que cette différence de force alloit quelquefois ſi loin, que la force étoit triple ou quadruple dans les circonſtances avantageuſes de ce qu'elle étoit dans les autres. J'ai en même-temps fait une autre remarque ſur ces expériences, qui me paroît également digne d'attention ; c'eſt que l'acier aimanté non ſeulement attire plus peſant, lorſque le fer qu'on lui donne à attirer eſt poſé ſur du fer ; mais que ſa vigueur encore eſt d'autant plus augmentée, que la piece de fer qui ſert de ſupport à celui que l'on veut qui ſoit attiré, eſt plus groſſe. Ce que l'acier aimanté a enlevé de deſſus une enclume, il ne l'enleve pas de deſſus une barre de fer qui eſt plate. De déterminer en quelle proportion cette force diminue par rapport à l'épaiſſeur du ſupport, c'eſt ce que je n'ai pas fait, & qui n'eſt peut-être pas aiſé à faire d'une maniere bien certaine : mais j'ai vû ſouvent que le fer qui étoit enlevé de deſſus l'enclume, peſoit plus du double de celui qui étoit enlevé de deſſus une barre ordinaire.

Ces expériences nous découvrent clairement une circulation de matiere magnétique qui ſe fait autour du fer ; elles forcent à reconnoître que ce métal a comme l'aimant un atmoſphere ; car ſans ces tourbillons, ſans cet atmoſphere, il ne paroît pas qu'on puiſſe rendre de raiſon probable de l'augmentation de force qui ſurvient au fer aimanté, & ces tourbillons, cet atmoſphere étant accordés au fer, non ſeulement ce phénomene s'en déduit naturellement, il s'enſuit même néceſſairement. Pour en être convaincu, il ne faut que ſe rappeller une expérience connue depuis long-temps ; ſçavoir, que ſi on éprouve ce que peut porter un morceau de

fer ou d'acier aimanté, & qu'ensuite on l'approche d'un aimant, jusqu'à faire entrer au moins un de ses bouts dans l'atmosphere de cet aimant, si on essaye alors sa force, on la trouvera beaucoup plus considérable qu'elle n'étoit auparavant; il soutiendra un poids plus pesant : mais pour peu qu'on le retire de cet atmosphere, il ne lui restera plus que sa premiere force; le poids dont il s'étoit chargé sera trop lourd, il le laissera tomber. De même un aimant foible mis dans le tourbillon d'un aimant plus fort, y acquiert de la force, qu'il ne conserve qu'autant qu'il reste dans cet atmosphere; c'est même une des singularités de l'aimant que M. Descartes a expliquées.

La cause de ces derniers effets n'est point équivoque; on ne peut absolument l'attribuer qu'à la matiere magnétique qui circule autour de l'aimant; une partie de cette matiere se détourne; elle prend sa route vers le fer aimanté, ou vers l'aimant le plus foible; plus de matiere magnétique les pénetre alors, ou, ce qui est la même chose, leur force attractive est augmentée.

L'augmentation de force qui se fait dans le fer ou l'acier aimanté, lorsque le fer qu'on lui veut faire attirer est posé lui-même sur d'autre fer, ne paroît être qu'un cas de l'expérience précédente. Si l'acier devient plus fort, c'est que la quantité de la matiere magnétique qui circule autour de lui est augmentée. Or d'où vient cette nouvelle matiere? qui la fournit? C'est sans doute le fer qui sert de support. On en doit donc conclurre que ce fer a comme l'aimant un atmosphere de matiere magnétique.

Une circonstance de cette expérience, dont nous n'avons pas encore parlé, contribue à établir cet atmosphere. C'est que si on éloigne un peu de l'enclume le fer aimanté qui s'y est chargé de ce qu'il pouvoit porter, aussi-tôt il devient trop foible, il laisse tomber son fardeau. La parité alors est entiere entre cet acier & celui qu'on éloigne du tourbillon d'un aimant où on l'avoit placé. Qu'on ne croie pas que le mouvement qu'on donne à cet acier, en l'élevant,

contribue à lui faire abandonner ce poids; si on l'agite même beaucoup davantage en le transportant à fleur de l'enclume, il le conservera toûjours.

Si l'acier ou le fer aimanté porte beaucoup plus pésant quand il est proche d'une grosse masse de fer, que quand il est auprès d'une barre; c'est donc que la grosse masse a un atmosphere qui fournit davantage de matiere magnétique.

Dès qu'il sera établi qu'il se fait autour de tout fer & dedans tout fer une circulation de matiere magnétique; mais que cette matiere est partagée en une infinité de petits tourbillons qui ont des poles différens; il paroîtra moins merveilleux que l'attouchement presque instantanée d'une pierre d'aimant mette le fer en état d'attirer d'autre fer. Les torrens qui sortent de la pierre ouvrent des routes dans une certaine direction, qui est celle du cours de ces torrens; & ces routes une fois ouvertes, la matiere même qui circuloit autour du fer, les enfile. Il avoit de son propre fonds assez de cette matiere, il n'étoit question que de la réunir, que de la diriger, que de la mettre en état de concourir à produire le même effet.

Mais ce sont les seuls tourbillons de matiere magnétique renfermés dans l'intérieur du fer que nous avons fait agir sur les outils d'acier qui percent ou coupent le métal. Nous avons dit que la violence qu'on leur fait, que la force qui les comprime, les contraint à prendre d'autres directions, & que la plus commode, la plus facile, celle qui offre, pour ainsi dire, une pente plus naturelle, est au travers de l'acier qui n'a point été comprimé comme le fer. En raisonnant sur cette explication, il m'a paru que si elle étoit juste, nous devions avoir encore un moyen d'aimanter le fer ou l'acier sans lui faire toucher l'aimant, ni couper d'autre fer. Puisqu'elle suppose le fer pénétré de tourbillons de matiere magnétique qui peuvent être comprimés & forcés à prendre d'autres directions lorsqu'on les presse, il s'ensuit que si on fait violence aux tourbillons, on les forcera à se réunir. Or

dès qu'on pliera & repliera plusieurs fois un morceau de fer dans le même endroit avant de l'y casser, on contraindra les tourbillons qui se trouveront en cet endroit à se réunir avec des tourbillons voisins, & par conséquent on donnera à ce même endroit une vertu attractive. Pour voir si l'expérience s'accommoderoit avec cette conséquence, j'ai pris un morceau de fenton de fer de Berry, c'est-à-dire, de fer très-doux, je l'ai serré dans un étau à quatre à cinq pouces d'un de ses bouts; prenant ensuite à deux mains le bout le plus long, qui étoit au-dessus de l'étau, je l'ai plié & replié différentes fois dans le même endroit, & enfin il s'y est cassé: mais comme il étoit très-doux, ce n'a été qu'après avoir bien eu la torture. Aussi-tôt qu'il a été cassé, j'ai présenté la cassure de chaque bout à de la limaille de fer, & j'ai vû avec plaisir qu'elles s'en sont entierement couvertes: elles en eussent moins attiré si elles n'eussent touché qu'un aimant foible.

Je ne m'en suis pas tenu à cette premiere expérience; j'ai cru même la devoir varier de bien des manieres. J'ai fait des épreuves pareilles sur des barres très-grosses, & sur du fil de fer assez fin, sur du fer doux & sur du fer cassant, sur de l'acier trempé & sur de l'acier non trempé. Voici ce que ces nouveaux essais m'ont appris de plus remarquable. Toutes choses d'ailleurs égales, plus le fer qu'on a cassé est doux, plus il est fibreux, plus il s'est laissé tourmenter avant de se casser, & plus vigoureusement se trouve-t-il aimanté dans ses cassures. Les pressions réiterées plus de fois forcent une plus grande quantité de matiere magnétique à prendre les mêmes routes; la matiere en est, pour ainsi dire, mieux exprimée de certains endroits; elle est toute chassée vers d'autres. Le fer à lames, le fer cassant, s'aimante plus foiblement: mais l'acier trempé s'aimante encore moins. Pour l'acier non trempé, l'acier recuit, il s'aimante plus ou moins, selon qu'il est plus ou moins doux. Enfin en général je n'ai point trouvé de fer dont la cassure n'attirât au moins quelques grains de limaille, si on l'essaye dans l'instant qu'elle vient d'être faite; j'ajoûte cette derniere circonstance, parce

que la vertu attractive s'affoiblit peu-à-peu, & quelquefois ne dure pas plus d'un jour.

Selon la grosseur, la figure, la longueur des morceaux de fer, on trouve aussi différens degrés de force attractive dans les cassures. Cette vertu n'est presque pas sensible dans du fil de fer de la grosseur des aiguilles ordinaires à tricotter; elle n'augmente pas pourtant proportionnellement à la grosseur des barres: plus une barre est grosse, & moins elle se laisse plier de fois avant de se casser. Du fer en lame, & sur-tout du fil de fer, appellé *fil de fer à Chaudronnier*, choisi de la grosseur du petit doigt, sont les fers qui donnent les cassures les mieux aimantées. Ce qui est sur-tout essentiel, c'est que le morceau de fer qu'on casse ait une certaine longueur, sans quoi on ne trouvera aucun effet sensible. Un exemple seul conduira sur cet article. Si on prend un fil de fer à Chaudronnier long d'un pied, qu'on le casse à peu-près au milieu, les deux bouts formés par la cassure attireront bien la limaille. Si au contraire on casse un pareil fil de fer à un pouce ou deux d'un de ses bouts, la cassure du petit morceau n'attirera point du tout la limaille, pendant que la partie du long bout qui tenoit à ce petit morceau attirera la limaille très-vivement.

Au reste il est à remarquer que ce n'est précisément que le bout fait par la cassure qui s'aimante, que l'autre n'est nullement aimanté. En suivant le même raisonnement qui m'avoit conduit à soupçonner que ce bout cassé, après avoir soûtenu plusieurs tortures, auroit une vertu attractive, j'ai cru en devoir conclurre qu'on pouvoit fortifier cette vertu, & cela en pliant & repliant le fer en divers endroits pris à diverses distances de ce bout; que c'étoit un moyen de forcer de nouvelle matiere magnétique à se diriger vers ce bout. Pour m'assûrer si les faits s'accommoderoient encore avec des conséquences si nécessaires de l'hypothese, que tout jusques ici a paru établir, j'ai choisi un fil de fer, gros environ comme le petit doigt, & long de près de deux pieds & demi. Après l'avoir serré dans l'étau, je l'ai plié & replié dans le

même endroit à diverses reprises, & l'a enfin cassé dans cet endroit, qui étoit éloigné d'à-peu-près cinq pouces d'une des extrémités du fil. Par cette division j'ai donc eu deux brins de fil, l'un long d'environ cinq pouces, & l'autre d'environ deux pieds & un pouce. L'un & l'autre de ces brins s'étoient bien aimantés à leur cassure, aussi étoient-ils d'un fer très-doux. Les bouts de chaque brin qui avoient été faits par la cassure, enlevoient de dessus l'enclume un de ces petits clouds appellés *broquettes*, mais de la plus petite.

Le plus long des deux brins étoit celui que j'avois destiné pour suivre mon expérience; je le serrai dans l'étau environ un pouce & demi au-dessus du bout aimanté; alors je le pliai & repliai proche de cet endroit plusieurs fois, mais sans le casser. Après l'avoir tiré de l'étau, j'essayai si sa vertu attractive avoit été augmentée, & il me parut qu'elle l'étoit. Je répétai la même manœuvre pour m'assûrer de cette augmentation, & pour voir jusqu'où elle iroit, c'est-à-dire, que je serrai le fil de fer un peu au-dessus de l'endroit où je l'avois tourmenté, & je continuai de même à le plier & replier en huit endroits différens, qui tous étoient entre le bout aimanté & le milieu du fil. Après les nouvelles tortures données à un nouvel endroit du fer, j'éprouvois s'il s'étoit fait quelque augmentation dans la force attractive; il me parut qu'il n'y en avoit point eu qui n'y eût ajouté: mais l'effet de toutes ces opérations ensemble n'étoit pas équivoque; elles mirent le bout aimanté en état d'enlever quatre clouds, égaux chacun à celui qu'il portoit immédiatement après qu'il avoit été cassé.

Pour suivre cette expérience, & pour voir jusqu'où pourroit aller cette augmentation de force, je continuai à plier & replier mon fil de fer en différens endroits: je le pliai d'abord vers le milieu; ce fut ensuite entre le milieu & le bout non aimanté. Les effets qui arriverent alors, n'en paroîtront peut-être pas moins singuliers pour n'avoir pas été de ceux que j'avois prévûs. Les nouvelles tortures que je donnai à mon fil, ne fortifierent point le bout aimanté; il

me semble même qu'elles l'avoient affoibli, & l'opération répétée un peu plus loin, m'en convainquit; je ne pûs plus douter que le bout aimanté ne se fût affoibli. J'essayai aussitôt si le second bout n'avoit point gagné ce que le premier avoit perdu, & je trouvai effectivement que ce second bout commençoit à enlever la limaille, ce qu'il n'avoit fait en aucune façon pendant que le premier étoit dans toute sa vigueur. Je continuai à tourmenter mon fer en différens endroits, dont le dernier étoit toûjours le plus proche du second bout, & je vis qu'à mesure que je multipliois ces opérations, sa force attractive augmentoit aux dépens de celle du premier bout. Il en acquit assez pour enlever les quatre clouds, & à peine en resta-t-il à l'autre suffisamment pour se charger de quelques grains de limaille.

Cette expérience nous apprend une nouvelle maniere d'aimanter le fer, au moins aussi singuliere que les précédentes, & même de l'aimanter mieux, pourvû que ce fer soit liant, & qu'il soit sous une forme qui permette de le plier avec quelque facilité. Il n'en est point qui y soit plus propre que celle du fil de fer. Mais la même expérience fait voir que pour le bien aimanter, il faut que toutes les inflexions qu'on lui donne se trouvent plus proches d'un de ses bouts que de l'autre. Il n'est pas trop aisé d'expliquer pourquoi, lorsque ces inflexions s'éloignent du milieu, elles déterminent la matiere magnétique à prendre plutôt sa route vers le bout le plus proche que vers celui qui est déja aimanté : vers le côté aimanté elle semble devoir trouver des chemins tous ouverts, mais plus longs. Est-ce que la longueur du chemin est pour elle une plus grande résistance à vaincre que celle qu'elle trouve à s'ouvrir de nouveaux chemins? Il s'ensuivroit de-là que la matiere magnétique a continuellement des obstacles à surmonter pendant qu'elle se meut dans le fer. Si on suppose, avec la plûpart des Physiciens, que les canaux par où elle coule sont hérissés de poils; que la force nécessaire pour se faire passage a été celle qu'il lui a fallu employer pour les coucher; la force dont elle a besoin pendant sa

circulation eſt celle qui eſt néceſſaire pour tenir ces mêmes poils couchés ; ils ſont ſans doute de même nature que le fer dont ils font partie, ou dont ils ne ſont que des parties plus fines : ils ont par conſéquent du reſſort, & ce reſſort tend à leur faire reprendre des poſitions différentes de celles où la matiere magnétique les a miſes. Dès que la matiere magnétique s'eſt ouverte paſſage vers le ſecond bout du fil de fer, ce paſſage peut ſuffire & pour cette matiere & pour une partie de celle qui paſſoit par l'autre bout. Dans le fer aimanté les paſſages les derniers ouverts ſont toûjours les plus libres. La preuve en eſt que peu à peu ces paſſages ſe ferment à la matiere magnétique, puiſqu'une force d'attirer très-ſenſible, ou, ce qui eſt la même choſe, une circulation ſenſible eſt quelquefois détruite en moins de vingt-quatre heures, comme nous l'avons dit ci-deſſus.

J'ai voulu voir ce qui arriveroit à un fil de fer qu'on tourmenteroit d'abord par ſon milieu, & enſuite à des diſtances égales de part & d'autre de ce milieu. Les plis & replis faits au milieu, & à des endroits qui n'en étoient pas éloignés, n'ont pas donné de vertu attractive ſenſible aux bouts : mais quand j'ai replié ce fer environ au tiers ou au quart de la diſtance qui eſt entre ce milieu & chaque bout, alors l'un & l'autre bout ſe ſont aimantés, mais bien plus foiblement que ſi tous les plis & replis euſſent été faits d'un ſeul côté ; ils ne portoient pas chacun le tiers ou le quart de ce qu'un des bouts eût porté s'il eût eu ſeul la force d'attirer.

Il eſt certain que ſi, après avoir plié le fer à pluſieurs repriſes entre un des bouts & le milieu, on le plie par de-là le milieu, on diminue le degré de force qu'on avoit donné au bout le plus proche des premiers plis : mais je n'ai pas toûjours trouvé la même diminution, & il ne m'eſt pas toûjours arrivé, comme dans la premiere expérience, de faire paſſer toute la force d'un bout dans l'autre.

Si peu de choſe ſuffit pour donner au fer la vertu d'attirer, peu de choſe auſſi la lui peut faire perdre. Nous avons vû que des inflexions en ſens contraire, faites d'un pouce

&

& demi, ou de deux pouces en deux pouces, ont augmenté la force attractive d'un fil de fer, gros comme le petit doigt. Si après avoir donné un certain degré à cette force, on veut multiplier les inflexions, quoiqu'on les fasse entre le milieu & le bout aimanté, on affoiblit la force de ce bout; on parvient même presque à la détruire, en les multipliant jusqu'à un certain point. Trop de plis réitérés rétrécissent à la fin les passages, le cours de la matiere magnétique n'est plus assez libre. Le Pere Grimaldi avoit déja observé aussi qu'un fil de fer aimanté par un véritable aimant, perd sa vertu magnétique, si on lui fait souffrir des inflexions réitérées, ou des frottemens continus. Enfin nous avons dit ci-dessus, que quelques coups de marteau ôtent à un outil la vertu d'attirer qu'il a acquise en coupant le fer; ils la font perdre de même au fer qui tient cette vertu des inflexions. Trop d'inflexions produisent à la fin l'effet des coups de marteau.

On ne doit pas s'attendre à aimanter un fil de fer, en le frappant à coups de marteau; ils forcent à la vérité la matiere à refluer: mais ils ne lui laissent aucune place commode où elle puisse se loger, tout ce qui se trouve sous le marteau est à peu-près également comprimé. Il n'en arrive pas de même au fer qui n'est plié qu'un certain nombre de fois, pendant les inflexions: certaines fibres sont moins distendues que les autres, elles restent plus au large. Mais il y a pourtant une maniere d'aimanter le fer à coups de marteau, quoique assez foiblement: si on ne le pouvoit point du tout, ce seroit une objection considérable contre l'explication dont nous avons fait usage jusqu'ici. Le fil de fer ne peut être aimanté, parce que toutes ses fibres sont pressées en même-temps. Mais cette raison ne doit pas empêcher d'aimanter à coups de marteau une barre large qu'on aura attention de ne frapper qu'au milieu ou près d'un de ses bords avec la panne d'un marteau; dans ce cas la matiere chassée a où se loger à son aise dans le fer même. Aussi ai-je reconnu qu'une barre de fer frappée fortement, avec les précautions dont nous venons de parler, acquiert la vertu attractive, moins

cependant que le fer qui eſt plié & replié à diverſes repriſes. C'eſt donc encore là une autre façon d'aimanter le fer ſur le champ, ſans lui faire toucher l'aimant. Mais c'eſt une des plus foibles, ſoit que la matiere chaſſée trop bruſquement ſorte de la barre par divers chemins, ſoit que les corps ne concourent pas aſſez à lui faire prendre une même direction.

Dans cette façon foible d'aimanter le fer, il y a pourtant une circonſtance à remarquer, qui ſeule donneroit beaucoup de probabilité à tout ce que nous avons dit de la matiere chaſſée des fibres du fer les plus comprimées pour aller en occuper d'autres où elle ſoit moins à l'étroit. Cette circonſtance eſt que tout le bout de la barre n'eſt pas aimanté, il ne l'eſt jamais vis-à-vis les endroits qui ont ſoûtenu les coups de marteau. S'il n'y a eu qu'une moitié de la largeur de la barre ſur laquelle les coups ſoient tombés, il n'y aura que la moitié du bout qui répond à ce qui n'a pas ſouffert de percuſſions, qui ſoit aimanté. Si on a eu attention à faire tomber les coups au milieu de la largeur de la barre; que ces coups forment une trace dirigée ſelon la longueur de cette barre, & de part & d'autre de laquelle le fer n'ait point été frappé, le bout du fer ne ſera aimanté que dans les deux endroits qui répondent à ce qui n'a pas été frappé, ou dans un de ces endroits, mais jamais le milieu ne le ſera.

Cela s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit, pour rendre raiſon de la maniere dont on deſaimante un fil de fer, en pouſſant trop loin le nombre des inflexions. A force de les multiplier, on chaſſe la matiere magnétique qui étoit dans le fer, elle ne peut y circuler à ſon aiſe. En lui ôtant de ſa ſoupleſſe, en l'écroüiſant, on exprime ſa matiere magnétique. En veut-on une preuve? Qu'on mette recuire le fil de fer qui, pour avoir été replié trop de fois, a perdu la vertu magnétique qu'il avoit acquiſe, & qui n'eſt plus en état d'en prendre de nouvelle; qu'on faſſe, dis-je, recuire ce fil de fer; auſſi-tôt qu'il aura été recuit, on pourra lui redonner toute la force d'attirer qu'il avoit ci-devant. Pendant le recuit, le feu écarte les parties du fer les unes des

autres, la matiere magnétique trouve de grands espaces où elle se loge: mais quand le fer vient à se refroidir, cette matiere s'y trouve renfermée, elle y est peut-être en quelque sorte emprisonnée, les parties du fer se rapprochent, & lui bouchent apparemment plusieurs passages par où elle sortoit librement; & c'est à cette matiere renfermée dans le fer, que sont probablement dûs la plûpart des effets que nous venons de rapporter.

Quoique nous croyions qu'il y a plus de matiere magnétique dans le fer chaud que dans le fer froid, nous ne pensons pas cependant que le fer chaud soit plus en état de s'aimanter lui-même ou d'aimanter l'acier, que ne l'est le fer froid; si nous l'eussions pensé, nous eussions bien-tôt trouvé dans les boutiques des ouvriers en fer de quoi nous défaire de cette erreur. Nous avons dit que tous les outils qui coupent ce métal à froid sont aimantés: mais nous dirons à présent qu'au contraire tous les outils qui coupent le fer à chaud, n'ont nulle vertu attractive. Il y a plus: c'est qu'on fait perdre cette vertu à un outil aimanté, si on lui fait couper du fer rougi par le feu.

Que l'acier ne s'aimante point, en coupant un fer rouge, c'est encore un effet qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons voulu établir sur les tourbillons emprisonnés en quelque sorte dans le fer. Le taillant de l'outil a beau presser le fer chaud, il ne met pas pour cela la matiere magnétique à l'étroit, il ne la force point à s'ouvrir une route au travers de ses pores, les parties du fer rouge sont écartées les unes des autres, elles présentent de toutes parts des passages; d'ailleurs ses parties tiennent peu ensemble, elles résistent foiblement à la force qui tend à les séparer.

Il y a un peu plus de difficulté à expliquer pourquoi l'acier aimanté perd sa vertu en coupant le fer chaud. Peut-être faut-il l'attribuer à ce qu'il s'échauffe alors lui-même; qu'il se fait une agitation dans ses parties, qui produit autant de changement dans leur situation qu'il en faut pour boucher des passages par où la matiere magnétique avoit son

cours. Quoique les parties de l'acier qui pénetre dans le fer chaud, deviennent plus écartées les unes des autres, les canaux dans lesquels circuloit la matiere magnétique, sont dérangés. Enfin si on veut, on supposera que dans l'instant de la percussion, l'outil fait, pour ainsi dire, corps avec le ferd chaud, & que les routes étant plus libres dans le fer chaud, que dans l'acier, qui alors a un degré de chaleur bien inférieur à celui du fer, la matiere magnétique de l'acier l'abandonne pour circuler dans le fer.

La premiere de nos expériences, & celle qui a donné occasion à toutes les autres, c'est celle des outils d'acier qui s'aimantent en coupant le fer; j'ai cru devoir éprouver si ces mêmes outils ne s'aimanteroient pas en coupant d'autres corps de différentes duretés. J'ai essayé sur de la limaille des ciseaux qui avoient coupé beaucoup de bois, d'autres qui avoient coupé du cuivre, & enfin d'autres qui avoient coupé des pierres plus dures que le fer. Je leur ai trouvé à tous quelque vertu attractive, plus foible cependant dans les outils qui n'avoient coupé que du bois, que dans ceux qui avoient coupé du cuivre. Ces expériences n'ont rien de contraire à celles que nous avons rapportées, & aux explications que nous en avons données, puisque nous avons vû que le fer ou l'acier frappé par le marteau, ou pressé ou tourmenté de quelque façon que ce soit, prend un certain degré de vertu attractive. On pourroit pourtant en conclurre que c'est inutilement que nous avons fait passer de la matiere magnétique du fer qui est coupé dans le ciseau qui le coupe; que les ciseaux qui coupent le fer ne s'aimantent plus vigoureusement que ceux qui coupent le bois, ou même le cuivre, que parce qu'ils sont plus pressés, que parce qu'ils agissent contre un corps plus dur. Deux remarques vont lever ce doute, & prouveront que l'explication doit subsister en son entier. La premiere est que l'outil, en coupant des pierres plus dures que le fer, ne s'aimante pas, à beaucoup près, aussi fortement qu'en coupant le fer. La seconde est que si avec ces mêmes outils qui ont coupé pendant long-temps du

bois, du cuivre, des pierres, ou coupé ſeulement une demi-ligne épais de fer; qu'on donne à ces outils un ſeul coup pour leur faire couper le fer, on leur fera prendre dans l'inſtant plus de huit à dix fois autant de force qu'ils n'en avoient pû acquérir. Ce ſurplus ſi conſidérable ne vient donc pas de la réſiſtance qu'oppoſe le fer qui a été entaillé, mais de la matiere magnétique qu'il a fournie.

La figure des outils d'acier contribue à augmenter la force attractive qu'ils prennent en coupant le fer. Un ciſeau dont le taillant eſt plat, s'aimante moins vigoureuſement qu'un poinçon dont la pointe eſt conique. On peut le remarquer, en comparant les effets de différens outils : mais j'en ai fait l'épreuve de la facon le moins équivoque. J'ai fait forger une ſeconde fois le taillant d'un ciſeau, je l'ai fait changer en une pointe conique, & alors il a attiré plus fortement. Toutes choſes d'ailleurs égales, la groſſeur de l'outil contribue auſſi à augmenter ſa force.

Ce qui pourtant eſt ſur-tout néceſſaire à l'outil, c'eſt d'avoir une certaine longueur, on a beau lui donner du diametre, s'il eſt extrèmement court, il ne s'aimante point, ou preſque point. J'ai fait forger des poinçons qui n'avoient qu'un pouce de longueur, & qui avoient huit ou neuf lignes de diametre, ils n'attiroient que quelques grains de limaille, après avoir percé bien du fer. Au lieu que des poinçons longs de trois à quatre pouces, & qui n'avoient pas une ligne ou une ligne & demie de diametre, attireroient de petits clous. Nous avons fait faire une remarque pareille ſur les fers qu'on aimante en les caſſant. Lorſqu'un des bouts faits par la caſſure eſt court, il n'attire rien, ou preſque rien; il faut une certaine longueur au fer pour donner aſſez d'entrée à la matiere magnétique, la groſſeur n'y ſupplée pas; l'augmentation de la force attractive que peut prendre un morceau de fer, n'eſt nullement proportionnelle à ſa maſſe. L'on en trouvera une raiſon aſſez ſatisfaiſante, ſi on fait attention que cette force eſt d'autant plus grande, que la matiere qui la produit paſſe en plus grande quantité par un

même endroit. De-là vient que certains aimants armés sont cent ou deux cents fois plus forts qu'avant d'être armés. Prenons deux cylindres de fer de masse égale, mais dont l'un soit beaucoup plus long que l'autre ; & supposons qu'il entre dans l'un & dans l'autre une égale quantité de matiere magnétique ; ce qui est tout ce que nous pouvons supposer de plus favorable au plus gros cylindre, puisqu'il a moins de surface. Si la matiere qui entre dans l'un & dans l'autre, & qui sort de l'un & de l'autre, vient se réunir aux deux bouts, qui sont les deux poles, il est sûr que celui qui a le moins de diametre sera plus puissant que celui qui en a le plus en raison renversée des bases ou des quarrés des diametres, puisque la quantité de matiere qui passera par chacun des points de l'un, sera à la quantité de matiere qui passera par chacun des points de l'autre dans ce rapport. Il y a peut-être encore bien d'autres circonstances qui contribuent à augmenter la force du petit cylindre : mais elles nous meneroient loin, & il suffit ici d'avoir entrevû que la différence des longueurs peut produire des augmentations de force attractive.

En commençant ce Mémoire, nous avons fait mention des pelles & des pincettes qui se trouvent ordinairement aimantées, ou qui ont deux poles, dont l'un attire une des pointes de l'aiguille, & repousse l'autre, & dont l'autre pole produit des effets contraires. Nous finirons par quelques remarques que nous avons faites sur cette expérience, & par quelques autres expériences qu'elle nous a donné occasion de faire, qui montrent avec quelle facilité le fer s'aimante. L'expérience des pelles & des pincettes ne manquera jamais, si on a attention à quelques circonstances, sçavoir de les présenter à l'aiguille, dont le support soit posé sur quelque plan fixe, & de les tenir toûjours verticalement, ou à peu-près, & dans le même sens où elles étoient placées dans la cheminée; alors on ne manquera pas de trouver les deux poles, dont l'inferieur attirera la pointe de l'aiguille qui se dirige vers le sud, & le supérieur celle qui se dirige vers le nord. On trouvera quelquefois les mêmes poles, si on tient ces instrumens

horisontalement, & qu'on les faſſe gliſſer auprès de l'aiguille; quelquefois auſſi on ne les retrouvera pas, mais il ſera rare qu'on les trouve, ſi on renverſe ces inſtrumens de haut embas. Peut-être que ces circonſtances auxquelles on n'a pas toûjours fait aſſez d'attention, ont fait regarder cette expérience comme incertaine, & ont empêché qu'on la ſuivît davantage. Il m'a paru qu'on étoit convaincu que les pincettes & les pelles devoient leurs poles à la ſituation où elles ont été pendant un long-tems ; ç'a été au moins le ſentiment de M. Rohault.

Mais en répétant ces expériences, j'ai reconnu qu'il n'y avoit guere de fer moins propre à les faire que ceux des pelles & des pincettes. J'ai voulu eſſayer en combien de temps une barre de fer, une verge de fer, & tout morceau de fer droit, poſé verticalement, acquerroit deux poles qui feroient ſur l'aiguille aimantée le même effet que ceux de l'aimant ; & j'ai été ſurpris, lorſque j'ai vû qu'il ne falloit préciſément qu'un inſtant à tout fer droit pour les acquérir. On peut bien appeller un inſtant le temps qu'il faut pour retourner une barre de fer, le haut embas, & il n'en faut pas davantage. Ayant placé, comme je l'ai dit ci-deſſus, le ſupport de mon aiguille aimantée ſur un plan fixe, j'ai préſenté à une des pointes de cette aiguille, tantôt le bout inférieur de cette barre, & tantôt le bout ſupérieur ; & ſelon le bout de cette barre que j'avois approché de l'aiguille, j'ai élevé ou abaiſſé cette barre, en la tenant verticalement, deſorte que chacun de ſes points a été ſucceſſivement à la hauteur de l'aiguille ; le bout inférieur de cette barre attiroit la pointe de l'aiguille qui eſt ordinairement tournée vers le ſud, & vers le bout ſupérieur il y avoit un pole qui attiroit au contraire la pointe du nord. Si ſur le champ je retournois la barre le haut embas, ſur le champ les poles étoient changés, c'étoit toûjours le bout d'embas qui attiroit la pointe du ſud. La même expérience avoit été faite long-temps avant moi par le Pere Grimaldi, comme il paroît par l'art. 51 de la ſixiéme propoſition de ſon traité de la lumiere. Au reſte ce que nous venons de dire d'une barre, nous l'avons expe-

rimenté sur toutes sortes de morceaux de fers droits, comme sur du fenton, des verges de vitres, du fil de fer, &c.

Il suit de ces expériences que le fer a une grande disposition à être aimanté ; que la matiere magnétique le pénetre bien aisément, & change avec une grande facilité l'arrangement qu'elle avoit donné à ses pores, ou aux parties de ses pores, pour s'y menager des passages, puisqu'elle peut changer sur le champ les poles qu'elle lui a donnés. S'il ne se fait pas un changement de poles si subit dans les pelles & dans les pincettes qu'on retourne le haut embas, c'est à leur figure qu'il faut en attribuer la cause, la courbure de ces instrumens oppose un obstacle au cours de la matiere magnétique. On croiroit peut-être que cette courbure a moins de part à cet effet que la position dans laquelle elles ont été pendant long-temps ; que cette position a donné à la matiere magnétique la facilité de se faire des routes qu'elle ne peut changer dans un instant. Le Pere Grimaldi même, dans l'article 52 de la proposition que nous venons de citer ci-dessus, assûre qu'une barre qui a resté long-temps droite, n'a plus l'espece d'indifférence dont nous avons parlé, à attirer par chacun de ses bouts l'une ou l'autre pointe de l'aiguille ; & cela peut-être, puisque par la suite des siecles une barre de fer peut devenir de véritable aimant. Mais je ne sçai à combien va le temps nécessaire pour donner à une barre de fer des poles qui ne puissent pas être changés sur le champ, il y faut peut-être des siecles, ou une longue suite d'années ; ce que je sçai, c'est que des mois n'y suffisent pas. J'ai présenté à une aiguille aimantée un barreau de fonte de fer, long de deux pieds & demi, & d'un pouce en quarré, qui avoit resté au moins dix mois dans une position verticale. Le bout inférieur n'a pas manqué d'attirer la pointe du sud : mais après que je l'ai eu retourné, le bout qui avoit resté en haut pendant si long-temps, a dans l'instant attiré la pointe du sud, c'est-à-dire, que les poles de ce barreau ont été changés dans l'instant.

La remarque par laquelle nous finirons ce mémoire, c'est que le pole qui attire la pointe du nord est toujours plus éloigné

éloigné du bout supérieur du fer que le pole, qui attire la pointe du sud, ne l'est du bout inférieur. Quelquefois le pole inférieur se trouve presque dans le bout même, & n'a de force qu'aux environs, pendant que le pole supérieur est considérablement éloigné du bout supérieur, & que la force de ce pole se conserve jusqu'au haut de la barre. Est-ce que la matiere magnétique entreroit dans le fer par son bout inférieur, & s'échapperoit ensuite en s'approchant du bout supérieur.

SUR LE DERNIER PASSAGE attendu de Mercure dans le soleil, & sur celui du mois de Novembre de la présente année 1723.

Par M. DELISLE le cadet.

DEPUIS la découverte des lunettes, Mercure n'a encore été vû que sept fois dans le soleil, quoiqu'on l'y ait attendu quelques autres fois. La derniere fois qu'on a cru qu'il y passeroit, a été le 8 Mai 1720 au matin; auquel jour, suivant les tables les plus récentes, il devoit encore paroître dans le soleil quelque temps après son lever. 2 Juin 1723.

Sur cette espérance que presque toutes les tables avoient donné de pouvoir voir Mercure dans le soleil le 8 Mai au matin, j'ai été attentif à regarder le soleil dès le 7 au soir. Il y avoit dans ce temps-là plusieurs taches sur le soleil, dont j'avois déterminé exactement la situation, pour y pouvoir comparer Mercure, lorsqu'il paroîtroit; il ne parut point de toute la journée du 7, où le temps fut assez favorable à Paris. Le 8 au matin, le soleil se leva dans un broüillard dont il se dégagea quelques minutes après: mais Mercure ne parut point, ensorte que je fûs assûré que si Mercure avoit passé dans le soleil, il en étoit sorti avant $4^h \frac{3}{4}$ du matin.

M. Kirch, Astronome de la Société Royale de Prusse,

eut aussi le tems assez favorable à Berlin : mais il n'apperçut point non plus Mercure sur le soleil, quoiqu'il ait pû voir le soleil peu après son lever, trois quarts d'heure plûtôt qu'il n'a paru à Paris : ainsi on a pû être assûré qu'à 4^h du matin à Paris, Mercure n'étoit plus sur le soleil.

On a aussi regardé attentivement le soleil dès son lever le 8 au matin à Konigsberg en Prusse, à Nuremberg, à Strasbourg, à Wittemberg : mais dans aucun de ces lieux on n'a pû voir Mercure, quoique le temps y ait été par-tout assez disposé : ce qui a fait reconnoître, ou que Mercure n'étoit point entré dans le soleil à cause de sa trop grande latitude, ou que ce passage s'étoit fait avant le lever du soleil.

On peut avec plus de raison espérer de voir cette année Mercure dans le soleil, parce que dans sa conjonction inférieure qui arrivera le 9 Novembre au soir, il n'aura que 4 à 5 minutes de latitude septentrionale. Par les Tables de M. de la Hire, cette conjonction arrivera à Paris à 5^h 30′ 20″; l'entrée du centre de Mercure dans le soleil sera à 2^h 45′ 38″, & sa sortie à 8^h 1′ 58″, & il passera à 4′ 28″ du centre du soleil vers le septentrion. Les éphemerides de Manfredi font arriver cette éclipse une demi-heure plus tard, & font passer Mercure une demi-minute seulement plus loin du centre du soleil : Voici la méthode & les principes sur lesquels j'ai déterminé les circonstances de ce passage que je viens de rapporter.

La conjonction de Mercure avec le soleil, vûe de la terre, est la rencontre apparente du centre de Mercure dans le cercle de latitude qui passe par le centre du soleil. Au moment de cette conjonction, Mercure, vû du centre du soleil, y paroît en conjonction avec la terre ; ce qui fournit le moyen de calculer les conjonctions apparentes de Mercure avec le soleil, vûes de la terre, en n'employant que les longitudes de Mercure, vûes du soleil, telles que les Tables astronomiques les donnent immédiatement, & comparant ces longitudes avec le lieu de la terre, vû du soleil, qui est toûjours opposé au lieu du soleil, vû de la terre.

C'eſt de cette maniere que j'ai remarqué le temps de la conjonction de Mercure avec le ſoleil à $5^{h}\ 30'\ 20''$. Suivant les tables de M. de la Hire, ayant trouvé que la longitude heliocentrique de Mercure, réduite à l'écliptique, étoit pour ce tems-là de $16^{\circ}\ 46'\ 29''$ ♉ préciſément oppoſée à la longitude vraie du ſoleil, qui eſt de $16^{\circ}\ 46'\ 29''$ ♏.

L'inclinaiſon de Mercure, ou ſa latitude héliocentrique, ſe trouve par les mêmes tables au même moment, de $9'\ 44''$ ſeptentrionale, & la diſtance de Mercure à ſon nœud aſcendant, priſe ſur l'écliptique, de $1^{\circ}\ 20'\ 46''$. D'où l'on conclud l'angle de l'orbite de Mercure avec le cercle de latitude dans cette conjonction de $83^{\circ}\ 8'\ 7''$. Sur ces élémens & ſur les mouvemens horaires vrais de Mercure & du ſoleil, tirés des mêmes tables, le premier de $15'\ 17''\ \frac{1}{2}$, & l'autre de $2'\ 31''$, reſte à conclurre le mouvement apparent de Mercure à la terre, vû du ſoleil, la terre étant ſuppoſée fixe au point où elle ſe trouve au moment de la conjonction.

Soit *CD*, l'écliptique (*Fig.* 1.) *C*, le lieu héliocentrique de la terre au moment de la conjonction, c'eſt-à-dire, lorſque le centre de Mercure ſe trouve dans le cercle de latitude *CA*, comme en *A*; ſoit par conſéquent *CA*, la latitude de Mercure, & *AF*, ſon orbite, faiſant avec le cercle de latitude, l'angle *FAG* de $83^{\circ}\ 8'\ 7''$. Soit pris ſur cette orbite, *AF*, égal au mouvement horaire vrai de Mercure. Soit auſſi pris ſur l'écliptique *CD* égal au mouvement horaire vrai du ſoleil. Si l'on imagine les points *D*, *F*, joints enſemble, & par le point *C*, *CE* parallele & égale à *DF*; *AE* ſera le mouvement horaire apparent de Mercure à la terre, vû du ſoleil, la terre étant ſuppoſée fixe au point *C*.

Par les nombres poſés ci-devant, l'on trouve le logarithme de ce mouvement horaire *AE* de 2, 8852504, en réſolvant le triangle rectiligne *AEF*, dans lequel on connoît *AF* de $1517''\ \frac{1}{2}$, ou $9'\ 17''\ \frac{1}{2}$ $FE = CD$ de $2'\ 31''$ ou $151''$, & l'angle, compris *AFE*, de $6^{\circ}\ 51'\ 53''$, complément de l'angle *FAG*, que l'on a dit être de $83^{\circ}\ 8'\ 7''$. L'on trouve

aussi par la résolution du même triangle, l'angle *GAE* de l'inclinaison apparente de l'orbite de mercure sur le cercle de latitude de 81° 47′ 18″.

Si présentement l'on abaisse du point *C* une perpendiculaire *CM* sur cette orbite vûe, elle y déterminera le point *M* de la plus proche distance apparente de Mercure à la terre, vûe du soleil, que l'on trouve de 9′ 38″ par la résolution du triangle rectiligne *ACM* rectangle en *M*, dans lequel on connoît, outre l'angle *CAM* de l'inclinaison apparente de l'orbite de Mercure avec le cercle de latitude, l'hypoténuse *AC* de 9′ 44″ ou 584″. L'on trouve aussi par la résolution du même triangle *ACM*, la valeur de *AM*, & le temps que Mercure emploie à le parcourir, qui est de 6′ 32″, à raison de son mouvement horaire *AE*. Ainsi ayant le tems de la conjonction de Mercure en *A* à 5h 30′ 20″, on en conclut le moment de la plus proche distance des centres en *M* à 5h 23′ 48″. Ce moment de la plus proche distance apparente des centres de Mercure & de la terre, vûe du soleil, est aussi celui de la plus proche distance apparente des centres de Mercure & du soleil, vûe de la terre, & ainsi par les seuls mouvemens de Mercure & de la terre considérés du soleil, on en peut déterminer le moment de sa conjonction apparente de Mercure avec le soleil & le milieu du passage de Mercure dans le soleil, vû de la terre.

On peut aussi déterminer l'entrée & la sortie de Mercure du disque du soleil, tels qu'ils sont vûs de la terre, & cela sans employer d'autres élemens que ceux que l'on vient de rapporter du mouvement de Mercure & de la terre, vû du soleil : en voici l'expédient.

Ayant supposé le soleil & la terre immobiles, lorsque l'on a recherché le mouvement apparent de Mercure à l'égard de la terre, vû du soleil; ayant, dis-je, fait cette supposition, la ligne qui joint les centres du soleil & de la terre, doit aussi être censée immobile. De plus, si l'on imagine du centre *T* de la terre (*Fig.* 2.) une infinité de lignes *TP*, *TR*, qui touchent le soleil, & qui forment par conséquent

la superficie d'un cone, dont l'angle au sommet *PTR* est égal au diametre apparent du soleil, vû de la terre, ce cone retranchera dans l'orbe de Mercure un cercle *NQ*, qui est la projection de tout le disque du soleil dans l'orbe de Mercure, & il est évident que lorsque Mercure viendra à rencontrer, par son mouvement propre sur son orbe, la circonférence du cercle, il paroîtra de la terre entrer ou sortir du disque du soleil.

Pour déterminer ces momens de rencontre, j'imagine que ce même cercle de projection du disque du soleil dans l'orbe de Mercure soit vû du centre *S* du soleil. Il y paroîtra sous un angle *NSQ* qui sera facile à trouver, connoissant l'angle *NTQ* du diametre apparent du soleil, vû de la terre, & le rapport des distances *SO*, *TO* de Mercure au soleil & à la terre, que l'on tire des tables astronomiques ; car les tangentes des complémens de ces angles *NSQ*, *NTQ*, sont entr'elles dans le rapport des distances *SO*, *TO*. Il n'y a donc plus qu'à imaginer du point *C*, comme centre (*Fig.* 1.) un cercle décrit de telle grandeur, qu'il paroisse du soleil sous un angle égal à l'angle *NSQ* (*Fig.* 2.) car les points *H*, *I*, de rencontre de ce cercle & de l'orbite apparente *AE* de Mercure à l'égard de la terre supposée immobile en *C*; ces points de section, dis-je, seront ceux de l'entrée & de la sortie du centre de Mercure dans le soleil, tels qu'ils seroient vûs du centre de la terre.

Par les tables de M. de la Hire, les distances *SO*, *TO*, de Mercure au soleil & à la terre sont dans le rapport de 31333 à 67646 ; & le diametre apparent du soleil est de 32′ 30″. D'où l'on conclut le demi-diametre apparent *NSO* ou *CI* de 35′ 5″ ou 2105″. C'est pourquoi dans le triangle rectiligne *MCI*, rectangle en *M*, connoissant l'hypoténuse *CI* & le côté *CM* (la plus proche distance des centres de Mercure & de la terre, que l'on a trouvée ci-devant de 9′ 38″ ou 578″) l'on en conclut aisément le troisieme côté *MI*, qui étant converti en temps, à raison du mouvement horaire *AE*, donne la demi-durée du passage du centre de Mercure

dans le ſoleil de $2^h 38' 10''$, laquelle ajoûtée & ſouſtraite du milieu de ce paſſage trouvé à $5^h 23' 48''$, il en réſulte l'entrée du centre de Mercure dans le ſoleil à $2^h 45' 38''$, & ſa ſortie à $8^h 1' 58''$. L'on trouve auſſi la plus proche diſtance apparente des centres de Mercure & du ſoleil, vûe de la terre, de $4' 28''$, dont Mercure doit paſſer au ſeptentrion du centre du ſoleil, vû du centre de la terre ; ce que l'on a trouvé, en conſidérant que les tangentes de ces plus proches diſtances apparentes de Mercure à la terre, vûes du ſoleil, ou de Mercure au ſoleil, vûes de la terre ; que ces tangentes, dis-je, ſont en raiſon directe des diſtances réelles de Mercure au ſoleil & à la terre.

Les déterminations précédentes ne donnent l'éclipſe que comme elle doit paroître du centre de la terre ; il y a à l'égard de ſa ſurface quelque différence à laquelle il eſt inutile d'avoir égard dans la prédiction de l'éclipſe : mais lorſque l'éclipſe a été obſervée exactement, il y faut avoir égard, & réduire les apparences obſervées de la ſuperficie de la terre à ce qu'elles auroient dû être, étant vûes du centre de la terre ; la différence de ces aſpects ſert même à trouver la parallaxe de Mercure au ſoleil, d'où l'on conclut celle du ſoleil.



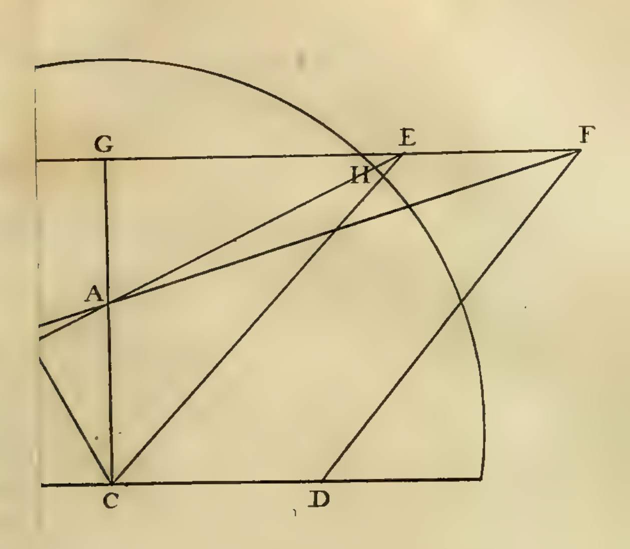
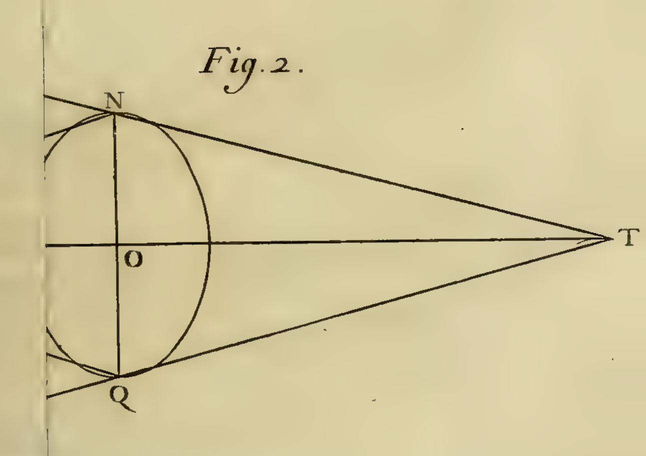
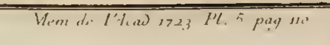
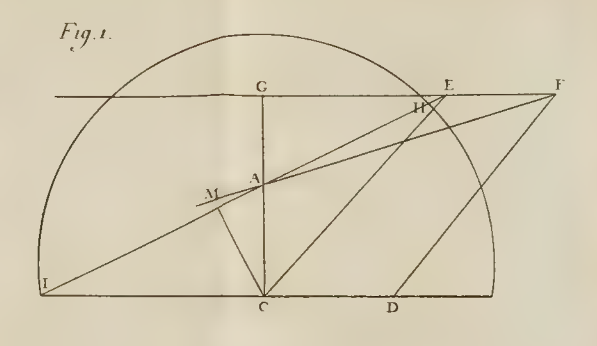
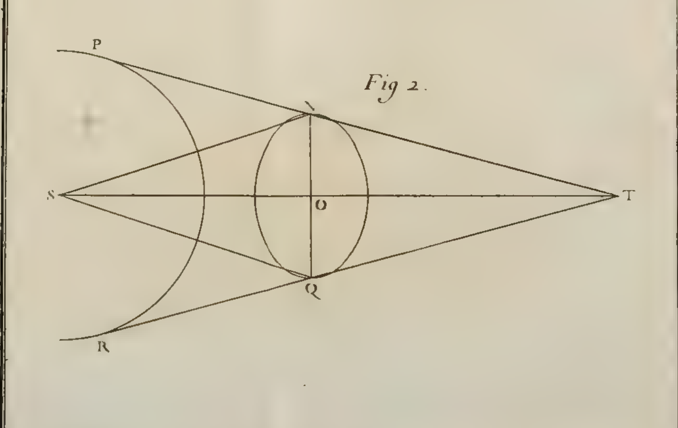


Fig. 2.









Ph. Simonneau Sculp

DIVERSES EXPE'RIENCES D'OPTIQUE.

Par M. MARALDI.

PREMIERE PARTIE.

Expériences d'Optique faites en plein soleil.

TOUT ce qui regarde l'Optique est curieux; & dans cette science, comme dans les autres, les choses les plus petites meritent notre attention. Ces matieres peuvent même être utiles, par le rapport qu'elles ont avec la lumiere qui nous intéresse si fort. L'Astronomie y peut trouver aussi ses avantages. C'est dans ses vûes que j'ai fait les expériences suivantes, & que je les ai accompagnées de reflexions que j'ai cru les plus propres à rendre raison des apparences observées. Voici donc ces expériences. 29 Mai 1723.

J'ai exposé en plein soleil un cylindre long de 3 pieds & de 6 lignes $\frac{1}{2}$ de diametre; son ombre ayant été reçûe sur un papier proche, étoit par-tout également noire & assez bien terminée. Elle conservoit le même degré d'obscurité depuis le cylindre jusqu'à la distance de 23 pouces. Plus loin on commençoit à voir une ombre de deux différentes densités; car les deux extrémités de l'ombre, formées par la longueur du cylindre, étoient terminées par deux traits d'ombre noire qui avoient un peu plus d'une ligne de largeur. Au milieu de ces deux traits, on voyoit une lumiere foible répandue également dans l'ombre; ce qui formoit une pénombre uniforme, beaucoup plus foible que les deux traits extérieurs dont on vient de parler, & plus foible aussi que l'ombre reçûe proche du cylindre. (*Fig.* 1.) A mesure que l'on éloignoit du cylindre le papier sur lequel l'ombre étoit reçûe, les

deux traits noirs conservoient à peu-près la même largeur qu'auparavant, & le même degré d'obscurité : mais la pénombre du milieu paroissoit plus claire, & sa largeur diminuoit de maniere que les deux traits noirs placés aux deux extrémités de l'ombre, s'approchoient l'un de l'autre, jusqu'à ce qu'enfin l'ombre ayant été reçûe à la distance de 60 pouces, les deux traits se confondoient l'un avec l'autre, & la pénombre du milieu a disparu.

Plus loin de l'union des deux traits noirs, on continuoit à voir une pénombre foible, assez mal terminée, qui augmentoit en largeur à mesure qu'elle étoit reçûe plus loin, & qui étoit encore sensible à une grande distance.

Outre cette ombre noire & obscure que formoit le cylindre proche du corps opaque, on voyoit une pénombre fort étroite & fort foible aux deux côtés extérieurs de l'ombre plus dense. Ensuite de la pénombre, on voyoit un trait de lumiere plus claire que celle qui étoit reçue sur le reste du papier en plein soleil.

La largeur de la pénombre extérieure alloit en augmentant à mesure que l'ombre étoit reçûe loin du cylindre. Le trait de lumiere qui suivoit après la pénombre s'étendoit aussi : mais son éclat s'affoiblissoit, étant reçûe loin du corps opaque.

Voilà les différentes apparences que nous avons remarquées dans l'ombre du cylindre long de 3 pieds & de 6 lignes de diametre, reçûe sur un papier à différentes distances.

J'ai fait les mêmes expériences avec un cylindre long de 3 pieds & de 9 lignes de diametre, & on voyoit des apparences semblables. Son ombre reçûe proche, étoit noire & bien terminée ; on commençoit à voir la pénombre au milieu de deux traits d'ombre plus obscurs à 34 pouces de distance, la pénombre du milieu s'affoiblissoit & devenoit plus claire à mesure qu'on la recevoit plus loin, & à 91 pouces les deux traits se confondoient, & l'ombre disparoissoit.

Un troisieme cylindre d'un pouce & onze lignes, commençoit à faire l'ombre de deux différentes densités, à six pieds

pieds de diſtance du cylindre, & les deux traits ſe confondoient à 17 pieds ou l'ombre diſparoiſſoit.

Un quatrieme cylindre de deux pouces trois lignes de diametre commençoit à faire la pénombre au milieu de deux traits noirs à 7 pieds 10 pouces de diſtance du cylindre, & l'ombre diſparoiſſoit à 20 pieds 6 pouces.

Au reſte tous ces cylindres, outre la pénombre au milieu de deux traits noirs, faiſoient des apparences ſemblables à celles que nous avons remarquées dans l'ombre du premier; c'eſt-à-dire, une pénombre fort foible à chaque côté extérieur du trait d'ombre plus obſcur, enſuite le trait de lumiere avec des ſemblables diverſités que nous avons remarquées dans l'ombre du premier, reçûes à différentes diſtances.

De ces quatre expériences, on peut inférer que tout corps opaque, de figure cylindrique, étant expoſé en plein ſoleil, fera des apparences ſemblables à celles que nous avons remarquées dans les obſervations précédentes.

Réflexions ſur ces Obſervations.

Puiſque le premier cylindre qui a 6 lignes & demie de diametre, commence à faire l'ombre de deux différentes denſités à 23 pouces de diſtance, diviſant ce nombre par le diametre du cylindre, qui eſt de 6 lignes & demie, on a pour quotient 42; d'où il paroît que cette diſtinction d'ombres commence à être ſenſible à 42 diametres du cylindre; & puiſque ſon ombre diſparoît à 60 pouces de diſtance, diviſant 60 pouces par 6 lignes & demie, on a 110 diametres du cylindre pour le terme de ſon ombre. C'eſt à peu près la diſtance, comme l'on ſçait, juſqu'où les corps opaques doivent jetter leurs ombres, à cauſe de la grandeur apparente du demi-diametre du ſoleil; car ce demi-diametre étant de 16 minutes, on trouve par la trigonométrie que l'ombre de tout corps opaque doit ſe terminer à 110 diametres du corps, avec une différence tantôt plus grande, tantôt plus petite, ſuivant que le demi-diametre apparent du ſoleil eſt tantôt plus grand, tantôt plus petit.

Nous avons remarqué que dans l'ombre du second cylindre, qui a 9 lignes de diametre, on commence à voir l'ombre distinguée en deux différentes densités à 34 pouces de distance, qui font 45 diametres du cylindre, & que son ombre disparoît à 121 diametres.

De même le troisieme cylindre d'un pouce & 11 lignes commence à faire les ombres distinguées en deux différentes densités à 6 pieds, qui font 38 diametres du cylindre, & l'ombre finit à 17 pieds 6 pouces, qui font 109 diametres du cylindre.

Enfin dans l'ombre du quatrieme cylindre, qui est de 2 pouces 3 lignes, on commence à voir la distinction de deux ombres à 7 pieds 10 pouces, qui font 42 diametres du cylindre, & l'ombre se termine à 20 pieds 6 pouces, qui en font 108 diametres.

On peut donc inférer de ces quatre expériences, que tout corps opaque cylindrique, exposé en plein soleil, fait une ombre qui paroît noire & pure depuis le cylindre jusqu'à la distance de 38 à 45 diametres du cylindre qui la forme, & que plus loin cette ombre n'est plus pure ni uniforme, mais distinguée, comme nous avons dit, en deux traits d'ombre plus obscure que le reste, au milieu desquels on voit une pénombre dont l'obscurité diminue à mesure qu'elle est éloignée du cylindre.

Dans les expériences précédentes, on trouve une différence de 7 diametres dans la distance où différens cylindres commencent à faire la distinction de deux ombres, la plus grande ayant été trouvée de 45 diametres, la plus petite de 38. Cette différence peut venir en partie de la difficulté qu'il y a de distinguer toûjours précisément le terme où commence cette distinction, à cause qu'elle se fait par des degrés insensibles, ne l'ayant pas toûjours trouvée précisément à la même distance dans un même cylindre. Elle peut venir aussi en partie de la différente clarté du soleil au temps des expériences; car nous avons remarqué qu'on apperçoit plus loin du même cylindre la différence des ombres, lorſ-

que le soleil est fort peu élevé sur l'horison, ou moins lumineux, que lorsqu'il est plus élevé & plus clair : mais en prenant un milieu entre la plus petite distance & la plus grande, on aura une distance moyenne de 41 diametres du cylindre, où commence à se faire la distinction entre la pénombre & les deux traits d'ombre plus obscure.

Pour expliquer ces apparences, nous supposons que de tous les rayons du soleil qui rencontrent le cylindre, une partie seulement se réfléchit sur elle-même, qu'une autre partie se réfléchit de chaque côté du cylindre, & enfin qu'une autre partie ne se réfléchit point, mais qu'elle se glisse de côté & d'autre du cylindre, & refluant, pour ainsi dire, derriere le cylindre, comme fait l'eau d'une riviere autour d'un pilier d'un pont ; cette lumiere qui reflue ainsi, pénetre dans l'ombre, & la rend moins noire qu'elle seroit sans ces rayons.

La raison pourquoi cette ombre proche du corps opaque ne paroît pas éclairée par des rayons qui refluent, mais seulement à une certaine distance, vient peut-être de ce que ces rayons entrent d'abord dans l'ombre séparés les uns des autres, comme on verra dans les expériences rapportées dans la seconde partie de ce Mémoire, ce qui est cause qu'ils ne sont pas visibles dans la section de l'ombre qui est proche : mais ces rayons venant à se joindre à une certaine distance, & à tomber tous dans le même endroit, ils y sont plus sensibles, & rendent par conséquent l'ombre moins noire. On peut encore expliquer cette apparence, en supposant que les rayons du soleil qui refluent dans l'ombre, étant en petite quantité par rapport à ceux qui sont réfléchis par le corps opaque, ne sont pas sensibles proche, à cause qu'ils y sont rares, & occupent dans l'ombre une espace trop grand par rapport à leur quantité : mais ils commencent à être sensibles dans une section d'ombre plus petite, où ils sont plus pressés ensemble, & où ils y occupent une plus petite étendue. C'est aussi par cette raison que la pénombre devient plus claire à mesure qu'elle est reçûe plus loin de l'objet, où la même

quantité de rayons qui refluent occupe encore une plus petite étendue que dans la section où la pénombre commence à être sensible. Voilà de quelle maniere nous croyons que se forme la pénombre au milieu de deux bandes noires qui sont à l'extrémité de l'ombre, & pourquoi elle ne commence à être sensible qu'à une certaine distance du corps opaque.

Pour expliquer la formation des deux bandes noires qui sont à chaque côté de la pénombre, nous supposons que les rayons qui refluent glissent un peu autour du cylindre avant que de le quitter & avant que de pénétrer l'ombre, comme on voit qu'il arrive à l'eau d'une riviere, quand elle passe par les piles d'un pont qui suit dans un certain espace le contour des piles ; il n'y aura donc pas de rayons dans la partie de l'ombre qui répond aux deux bords du cylindre, cette ombre y doit donc être plus noire que vers le milieu où elle est mélée avec les rayons qui refluent : on doit par conséquent voir de cette maniere à chaque côté de la pénombre deux traits noirs & plus obscurs que le reste. Ce qui est la seconde apparence que nous avons remarqué dans l'ombre du cylindre exposé en plein soleil.

La troisieme apparence est une pénombre fort foible qui suit après les deux bandes noires, & qui est plus foible à mesure qu'elle s'éloigne du milieu vers la partie extérieure, elle vient de ce que cet espace n'est éclairé que des rayons qui partent seulement d'une partie du disque du soleil, ce qui est connu de tous ceux qui ont traité de l'optique: c'est pourquoi on ne s'étendra pas davantage pour expliquer ce phénomene.

Enfin le trait de lumiere plus forte que la lumiere méme du soleil qui se peint sur le papier ensuite de la pénombre extérieure, vient, suivant toute apparence, des rayons du soleil que nous avons supposé se réfléchir de côté & d'autre sur les deux bords du cylindre, & qui se vont terminer à l'endroit du papier où il n'y a plus de pénombre extérieure. Or ces rayons réfléchis par les deux bords du cylindre, joints avec les rayons directs qui viennent immédiatement du soleil, & qui tombent au même endroit du carton, font une

lumiere plus forte & plus vive que celle qui est formée par les seuls rayons directs du soleil. Peut-être aussi que ces rayons réfléchis par les bords du cylindre, se répandent dans tout l'espace compris par la pénombre extérieure formée, comme nous avons dit, par les rayons qui viennent seulement d'une partie du disque du soleil, mais cette lumiere réfléchie n'est pas sensible dans cet espace, parce qu'elle y est mêlée avec la pénombre, laquelle par cette raison est plus foible qu'elle ne seroit sans cette lumiere réfléchie. Elle est donc seulement sensible à son terme qui tombe hors de la pénombre extérieure.

Expériences semblables aux précédentes, faites avec des globes.

J'ai exposé en plein soleil un globe d'un pouce & 11 lignes de diametre; son ombre reçûe sur un carton blanc, étoit noire & uniforme depuis le globe jusqu'à la distance de 2 pieds 6 pouces; plus loin on commençoit à voir cette ombre de deux différentes densités. L'ombre totale étoit terminée par un anneau obscur, large d'un peu plus d'une ligne (*Fig.* 2.) Au milieu de cet anneau, il y avoit une aire circulaire d'une ombre beaucoup plus foible que l'ombre qui formoit l'anneau. En recevant l'ombre plus loin, l'aire circulaire & l'anneau obscur diminuoient de grandeur. L'anneau conservoit le même degré d'obscurité: mais la penombre du milieu paroissoit plus claire. A la distance de 17 pieds 6 pouces du globe, il n'y avoit plus de pénombre, on voyoit seulement une petite obscurité au milieu d'une pénombre foible & fort large; à 18 pieds la petite ombre noire paroissoit encore assez bien terminée, & à 20 piés on ne voyoit plus qu'une pénombre foible & circulaire qui paroissoit augmenter à mesure que l'on éloignoit le papier sur lequel l'ombre se peignoit.

Outre ces apparences qui se font dans l'ombre formée par le globe, on voyoit vers la partie extérieure de l'anneau

obſcur un autre anneau de pénombre foible qui diminuoit de denſité plus il étoit éloigné de l'anneau obſcur. Après la pénombre ſuivoit un trait circulaire de lumiere plus vive que celle qui étoit reçûe ſur le papier, & qui venoit immédiatement du ſoleil.

On voit par cette expérience, que dans l'ombre du globe il y a les mêmes apparences que dans l'ombre du cylindre, avec cette différence ſeulement que dans l'ombre du globe les apparences ſont circulaires comme les corps qui les forment; au lieu que dans l'ombre du cylindre les apparences ſont terminées par des lignes droites.

Un ſecond globe de cuivre de 3 pouces 7 lignes de diametre, expoſé en plein ſoleil comme le premier, faiſoit une ombre noire juſqu'à la diſtance de 4 pieds; au de-là on commençoit à voir, comme dans la premiere expérience, la diſtinction de l'anneau obſcur avec la pénombre: elle ſe voyoit plus diſtinctement à 4 pieds 6 pouces.

Un troiſieme globe de 5 pouces une ligne de diametre, expoſé en plein ſoleil, comme les deux autres, faiſoit l'ombre noire & uniforme juſqu'à la diſtance de 5 piés & demi; à cette diſtance on commençoit à voir l'anneau d'ombre diſtinguée par la pénombre qui étoit au milieu.

Un quatrieme globe de 5 pouces 9 lignes & demie de diametre, faiſoit l'ombre pure juſqu'à la diſtance de 8 pieds & demi; plus loin on voyoit l'anneau d'ombre plus obſcur qui comprenoit une pénombre comme les autres. Au reſte autour de l'ombre de tous ces globes on voyoit les autres apparences que nous avons remarquées dans le premier.

Réflexions ſur ces Expériences.

Puiſque dans l'ombre faite par le globe d'un pouce & 11 lignes, on commence à diſtinguer la différence des ombres à 2 pieds 6 pouces de diſtance du globe, il ſuit que cette diſtinction ſe fait à 15 diametres du globe; & comme l'ombre diſparoît à 17 pieds 6 pouces, elle ſe termine à 109 diametres du globe; ce qui doit arriver à cauſe du demi-dia-

metre du soleil qui détermine cette distance de l'ombre, comme nous avons dit à l'égard du cylindre.

De même la diversité de l'ombre formée par le globe de cuivre de 3 pouces 7 lignes, se faisant à 4 pieds de distance du globe, on trouve qu'elle s'apperçoit à 15 diametres du globe.

Dans le globe de 5 pouces une ligne, la distinction des ombres de deux différentes densités se fait à 13 diametres, & dans le globe de 5 pouces 9 lignes & demie, elle se fait à 17 diametres.

Il faut remarquer que cette distinction de pénombre, avec l'anneau d'ombre plus obscure, ne se fait pas toûjours précisément à la même distance du même globe, mais qu'on l'apperçoit quelquefois un peu plus loin, quelquefois plus proche du globe, de sorte qu'il y a un peu de doute dans l'endroit précis où l'on distingue ces deux diversités d'ombre, comme nous avons remarqué qu'il arrive dans l'ombre du cylindre & par les mêmes raisons : mais cette différence n'est pas bien grande, de sorte qu'en prenant un milieu entre la plus petite, qui est de 13 diametres du globe, & la plus grande, qui est de 17, on aura une moyenne de 15 diametres où l'on commence à voir l'ombre du globe distinguée en deux différentes densités.

De ces quatre expériences, on peut inférer que tout corps sphérique commence à faire une pénombre sensible au milieu de son ombre à 15 diametres du globe. On peut aussi conclurre des expériences du globe & de celles du cylindre, que tout corps opaque ne fait pas une ombre pure à une certaine distance du corps, & que cette distance doit être différente selon les différentes figures des corps qui forment ces ombres.

Nous avons trouvé par des expériences très-constantes, rapportées ci-dessus, que dans l'ombre du corps cylindrique la pénombre commence à paroître à la distance de 41 diametres du cylindre, & que dans l'ombre des globes elle se fait à 15 diametres du globe. Donc dans l'ombre des Glo-

bes la différence des ombres commence à être sensible près de deux tiers plus proche, que dans l'ombre du corps cylindrique.

Cette différence entre la distinction de deux ombres du cylindre & du globe se connoit non-seulement en comparant les expériences faites sur des cylindres & des globes de différens diametres, comparées ensemble, mais encore par des expériences faites avec un cylindre & un globe de même diametre; car ayant exposé en même-temps en plein soleil un globe d'un pouce & 11 lignes, & un cylindre pareillement d'un pouce & 11 lignes, & ayant reçû ses ombres de ces deux corps sur un même papier, nous avons trouvé entre la distinction des deux ombres une différence de plus de 20 diametres du corps, la distinction dans l'ombre du cylindre s'étant faite à 38 diametres, & celle du globe à 17. Ce qui ne peut pas être attribué à la difficulté d'appercevoir le terme de cette distinction, qui ne monte tout au plus qu'à 7 ou 8 diametres.

Les principes que nous avons établis auparavant pour expliquer les apparences que l'on voit dans les ombres des corps cylindriques, servent également pour expliquer les apparences qui s'apperçoivent dans les ombres des globes.

On trouve aussi dans les mêmes principes, la raison de la différente distance où se fait la distinction des ombres des corps cylindriques & celle des globes, en considérant la différente quantité des rayons qui refluent autour des corps de ces deux différentes figures; car dans le cylindre les rayons du soleil ne peuvent refluer que des deux côtés du cylindre qui a une longueur considérable, comme étoient ceux dont je me suis servi. Dans le globe au contraire il en peut refluer également tout autour; il entre par conséquent une plus grande quantité de rayons dans l'ombre du globe que dans l'ombre du cylindre; cette lumiere plus abondante qui reflue derriere le globe doit donc être plus sensible plus proche du globe qu'à égale distance du cylindre, à cause qu'il y en a une plus grande quantité dans le même espace, &

par

par conféquent on doit voir cette diftinction des deux ombres plus proche du globe que proche du cylindre.

Nous avons rapporté ci-deffus que dans l'ombre du même corps, on commence à voir la pénombre plus proche du corps opaque, lorfque le foleil eft plus lumineux ; & que cette diftinction fe fait plus loin, lorfque le foleil n'eft pas fi clair. Cette obfervation s'accorde avec la caufe que nous venons d'affigner à la différente diftance qu'on a trouvée dans la pénombre du cylindre & dans celle du globe, car il y a une plus grande quantité de rayons qui doivent refluer, lorfque le foleil eft plus lumineux, que lorfqu'il eft un peu obfcurci par des nuages rares.

De même comme il y a une plus grande quantité de rayons qui reflue autour du globe qu'autour du cylindre, la diftinction de deux ombres fe doit faire plûtôt dans l'ombre du globe que dans l'ombre du cylindre.

Ces mêmes apparences donnent lieu de croire que la lumiere qui reflue pénetre dans l'ombre immédiatement après le corps opaque, quoiqu'elle n'y foit pas fenfible à la vûe ; car puifque cette diftinction fe fait comme nous avons dit, plus proche du même corps opaque, lorfque le foleil eft plus clair que lorfqu'il l'eft moins, il fuit que la différente diftance où fe fait la diftinction, dépend du plus ou du moins de lumiere répandue dans le même efpace ; ainfi quoique la lumiere qui reflue puiffe pénétrer l'ombre immédiatement après le corps opaque, elle n'y eft pas fenfible, parce qu'il n'y en a pas une affez grande quantité de mêlée avec l'ombre. D'où l'on pourroit conclurre qu'aucun corps opaque ne fait point d'ombre pure, & qui ne foit mêlée avec des rayons du foleil qui refluent derriere le corps opaque.

S'il eft permis préfentement de faire paffage du petit au grand, & de ces expériences particulieres en conjecturer ce qui peut arriver en géneral dans la nature, n'y auroit-il pas lieu de croire que les rayons du foleil qui éclairent la terre, refluent de la même maniere que nous l'avons obfervé dans les expériences précédentes ; par conféquent que ces rayons

qui refluent autour de la terre, pénetrent dans son ombre, & la rendent moins dense qu'elle ne seroit sans ces rayons, comme nous avons remarqué qu'il arrive dans l'ombre de plusieurs boules ?

On sait que la lune, lorsqu'elle est entierement immergée dans l'ombre de la terre, ne se perd que très-rarement de vûe, mais qu'elle est presque toûjours éclairée par une lumiere foible & rougeâtre qui la fait encore appercevoir au milieu de l'ombre.

On attribue cette lumiere, dont la lune est éclairée dans ses éclipses, tout entierement aux rayons du soleil qui se rompent dans l'atmosphere de la terre, & pénétrant l'ombre, l'éclairent diversement à différentes distances de la terre, suivant l'inclinaison différente que les rayons, qui partent des différentes parties du disque du soleil, font à la surface de l'atmosphére. Si les rayons du soleil refluent autour de la terre, ces mêmes rayons répandus dans l'ombre, peuvent aussi-bien contribuer à rendre la lune visible dans ses éclipses, comme les rayons qui se rompent dans l'atmosphere.

Il y a cependant une difficulté contre cette hypothese, qui est que la lune, lorsqu'elle entre dans l'ombre de la terre, semble passer d'abord par une pénombre foible, & successivement par divers degrés d'obscurité presque insensibles, qui va en augmentant depuis la circonférence de l'ombre jusqu'au milieu, & va ensuite en diminuant depuis le milieu jusqu'à la sortie entiere de la lune de l'ombre; au lieu que si l'ombre de la terre étoit semblable à celle des boules, comme nous avons remarqué dans les expériences précédentes, & qu'il y eût à la circonference un anneau plus obscur que le reste de l'ombre, il devroit être sensible dans les éclipses de lune, & cet astre devroit paroître plus obscur vers le commencement & vers la fin de l'éclipse que vers le milieu. De même dans les éclipses partiales, le terme de l'ombre qui sépare la partie du disque de la lune qui est éclipsée de celle qui ne l'est point, devroit être bien noir & bien terminé, ce qui n'a pas été remarqué jusqu'à présent.

Peut-être que les rayons du soleil rompus dans l'atmosphere, & qui pénetrent en grande quantité l'extrémité du cone de l'ombre dans une grande étendue de ce cone, peut effacer en partie cet anneau d'ombre plus obscur, supposé qu'il subsiste autour de l'ombre de la terre. Nous examinerons dans une autre occasion cette particularité. On fera cependant attention dans les éclipses de lune, s'il y a quelque apparence qui puisse confirmer cette hypothese ou bien la détruire.

SECONDE PARTIE.

Expériences d'optique, faites dans une chambre obscure.

Le Pere Grimaldi a observé qu'en introduisant par un fort petit trou fait dans une lame de plomb fort mince, un rayon de soleil dans une chambre obscure, & que mettant à ce rayon un cheveu, ou tout autre corps cylindrique & opaque fort mince, placé à une certaine distance du trou; ce corps, ainsi placé, fait une ombre qui, étant reçûe sur une carte à quelque distance du corps opaque, est beaucoup plus grande que ne demande la distance qui est entre le corps opaque & la section de l'ombre. Il a observé en second lieu qu'à chaque côté de cette ombre, il y a une bande claire, après laquelle suivent des traits colorés de rouge, de violet & de bleu.

M. Newton qui, après le Pere Grimaldi, a fait la même expérience, a remarqué que si l'on place au même rayon de lumiere décrit ci-dessus, un cheveu ou une aiguille très-fine qui soit à une distance de 12 pieds du trou, & qu'on reçoive sur un carton l'ombre faite par ce cheveu à une distance de 4 pouces, on voit sur ce carton l'ombre quatre fois plus grande que l'objet; à la distance de 2 pieds l'ombre paroît dix fois plus grande, c'est-à-dire, toûjours plus grande à mesure qu'elle s'éloigne du cheveu. Il a observé aussi, comme le Pere Grimaldi, les deux traits de lumiere à chaque côté de l'ombre, ensuite les autres traits plus petits, colorés de

rouge, de violet & de bleu au côté extérieur de chaque bande de lumiere.

J'ai répété la même expérience, dans laquelle, outre ces apparences, j'ai remarqué de plus, qu'en recevant l'ombre fort loin du cheveu, on voyoit au milieu de la bande noire une petite bande de lumiere qui partageoit l'ombre ſuivant ſa longueur en deux parties égales, de maniere que l'ombre du milieu n'étoit plus d'une même denſité que lorſqu'elle étoit reçûe plus proche du cheveu.

Outre cette expérience, j'ai fait encore celles qui ſuivent.

Une ſoie de ſanglier qui étoit plus groſſe qu'un cheveu, étant placée directement aux rayons du ſoleil qui entroient par le petit trou à une diſtance de 9 pieds du même trou, faiſoit une ombre qui, étant reçûe à 5 ou 6 pieds loin de l'objet, étoit compoſée de pluſieurs traits d'ombre & de pénombre. Le milieu étoit une ombre foible, ou plûtôt une eſpece de pénombre ; à chaque côté de cette pénombre il y avoit une bande étroite d'une ombre plus obſcure que celle du milieu ; après cette bande d'ombre il y en avoit une autre plus étroite de pénombre, enſuite une bande claire qui eſt plus large que l'obſcure ; à côté de la bande claire on voyoit des traits ſucceſſivement rouges, violets & bleus comme dans l'ombre du cheveu.

J'ai encore placé de la même maniere dans les mêmes rayons qui entrent par le petit trou dans une chambre obſcure pluſieurs aiguilles de différente groſſeur : mais il ſeroit trop long de rapporter en particulier toutes les différentes circonſtances que nous avons remarquées dans leurs ombres, tant par rapport à la largeur & à la denſité de la pénombre du milieu que par rapport à la largeur & à la denſité des bandes noires & claires qu'elles forment. Nous dirons ſeulement qu'il y a des aiguilles qui ne font qu'une pénombre foible & uniforme au milieu des deux bandes claires ; d'autres qui font la bande obſcure plus denſe au milieu de deux bandes noires & plus étroites, après leſquelles ſuivent immédiatement les deux bandes claires. Il y en a d'autres qui font la

bande du milieu un peu rougeâtre, après laquelle on voit deux bandes noires qui ſont ſuivies de deux petites bandes de pénombre, après leſquelles ſont les bandes claires. Il y a des aiguilles qui font les bandes noires & claires plus larges que d'autres aiguilles. Il y a enfin des aiguilles de moyenne groſſeur qui ne font point de pénombre aux deux côtés exterieurs de chaque bande noire, ni de bande claire qui ſoit ſenſible, & qui a coutûme de paroître, après la pénombre extérieure, dans l'ombre des plus petites aiguilles & dans celle des plus groſſes. Toutes ces aiguilles faiſoient cependant les petits traits mêlés de rouge & de bleu aux deux côtés extérieurs de la bande claire qu'on voit dans les ombres du cheveu.

Nous ne rapporterons donc pas en détail toutes ces expériences, & nous nous contenterons des deux ſuivantes, qui pourront ſervir à découvrir ce qui ſe paſſe dans les ombres des aiguilles.

J'ai expoſé dans les rayons du ſoleil qui entroient par un petit trou dans une chambre obſcure, une plaque perpendiculairement à ces rayons, qui avoit deux pouces de long & d'un peu plus d'une demi-ligne de large. Cette plaque étant placée à 9 pieds de diſtance du trou, on voyoit dans ſon ombre, lorſqu'elle étoit reçûe directement fort proche, une lumiere foible qui y étoit également répandue. L'ombre de la même plaque, reçûe encore directement à 2 pieds & demi de diſtance, paroiſſoit diſtinguée en quatre petites bandes noires fort étroites au milieu d'une pénombre plus foible; ces bandes noires étoient proche l'une de l'autre, ſéparées par de petits intervalles plus clairs, égaux aux bandes noires. (*Fig.* 3.) Les deux termes extérieurs de cette ombre, de côté & d'autre, étoient marqués par une pénombre, enſuite une bande fort claire qui étoit ſuivie comme dans les ombres des aiguilles des traits ordinaires mêlés de rouge, de violet & de bleu.

L'ombre de la même plaque, reçûe directement à quatre pieds & demi de diſtance de la plaque, ne paroiſſoit plus diſtinguée en quatre bandes noires & claires, mais ſeulement

en deux ; les deux bandes noires extérieures (*Fig.* 4.) ayant disparu, ces deux bandes noires qui restoient étoient plus larges qu'auparavant, & séparées l'une & l'autre par un intervalle d'une ombre plus foible qui étoit le double plus large que chacune des bandes noires qu'on voyoit auparavant, lorsque l'ombre étoit reçue à 2 pieds & demi de distance, cette pénombre du milieu étoit rougeâtre. Après les deux bandes noires, il y avoit une pénombre assez forte, après laquelle paroissoient les deux bandes claires assez larges & éclatantes, ensuite les traits colorés.

Une seconde plaque de 2 pouces de long & d'une ligne de large, étant placée comme la précédente dans les rayons du soleil à 14 pieds du trou par lequel entroient ces rayons, son ombre reçue directement fort proche de la plaque, étoit éclairée par une lumiere foible également répandue comme dans la plaque précédente: mais étant reçue encore directement à 13 pieds de distance de la plaque, on commençoit à voir six petites bandes noires, distinguées par autant de bandes d'une ombre moins forte, de la même largeur que les bandes noires (*Fig.* 5.); à 17 pieds de distance de la plaque, on voyoit ces bandes noires plus larges, plus distinguées & plus séparées des autres bandes moins obscures, de sorte que les moins noires qui étoient entre deux, s'étoient aussi élargies. A 42 piés depuis la plaque, on ne voyoit plus que deux seules bandes noires au milieu d'une pénombre. (*Fig.* 6.) La pénombre du milieu, placée entre les deux bandes noires, étoit rougeâtre, les deux extrémités étoient teintes d'une foible noirceur. Après ces deux bandes de pénombre extérieures, on voyoit toujours les bandes claires qui étoient larges, & les autres traits de lumiere colorée qui les suivent.

Ayant reçû l'ombre de la même plaque à 72 pieds de distance, on n'y voyoit point d'autre différence à l'égard de la situation précédente, excepté que les deux bandes noires étoient plus larges, & l'intervalle du milieu occupé par la penombre aussi plus large & plus rougeâtre qu'auparavant.

J'ai présenté dans les mêmes rayons différentes plaques

plus larges, comme d'une ligne & demie, de 2 lignes, de 3, &c. & ayant reçû directement les ombres de ces différens corps sur un papier, je n'ai pû distinguer dans ces ombres ces bandes de lumiere foible que l'on distingue dans les plaques plns petites, quoique j'aye reçû ces ombres à une distance de 56 pieds; on y voyoit seulement une lumiere foible & confuse répandue également, comme l'on voit dans les ombres des deux plaques d'une demi-ligne & d'une ligne, lorsqu'elles sont reçûes proche du corps qui les forme.

Si l'on avoit des lieux obscurs assez grands, dans lesquels on pût recevoir l'ombre des plaques larges à une fort grande distance, je crois que nous verrious dans ces ombres les mêmes apparences que nous voyons dans les ombres des plus petites aiguilles reçûes à une mediocre distance.

De même si l'on pouvoit voir distinctement les ombres des petites aiguilles fort proche du corps qui les forme, comme l'on peut distinguer les parties des ombres des plaques qui ont une demi-ligne ou une ligne de large, on verroit peut-être les ombres de ces petites aiguilles & des cheveux distinguées en différentes bandes de lumiere & d'ombre, comme on voit les ombres des plaques d'une ligne. Mais comme pour voir cette apparence dans les ombres des cheveux, il en faudroit recevoir l'ombre fort proche où elle est fort petite, cette extrème petitesse est peut-être cause qu'on ne peut pas distinguer les différentes parties qui la composent; cependant nous avons vû les mêmes apparences dnns les ombres des aiguilles qui n'étoient que d'une grosseur ordinaire.

Voilà les phénomenes les plus singuliers que l'on observe dans les ombres des corps étroits & longs, soit qu'ils soient cylindriques, soit qu'ils soient plats, lorsqu'ils sont exposés à un rayon de soleil qui entre dans une chambre obscure par un trou extrèmement petit.

Le Pere Grimaldi a observé, comme nous avons déja dit, ces trois bandes de lumiere & de couleur qu'on voit à chaque côté des ombres des cheveux & des autres petits corps cylindriques. Il a aussi observé ces traits de lumiere & d'om-

bre qui s'apperçoivent dans les ombres mêmes des plaques plus larges, & qui sont tantôt au nombre de quatre, tantôt au nombre de six, suivaut la largeur des plaques, & il a observé que dans la même plaque, de six qu'elles sont proche, elles se réduisent à deux, ainsi que nous avons remarqué, lorsque l'ombre est reçûe à la distance de 56 pieds. M. Delisle a aussi observé les mêmes apparences, comme il paroît dans un mémoire qu'il lut à l'Academie l'an 1717, & qui n'a point été publié.

Le P. Grimaldi explique ces bandes de lumiere, tant celles qui se voyent dans l'ombre, que celles qui se voyent à chaque côté de l'ombre, par une espece d'ondulation qu'il suppose dans les rayons du soleil, qui se fait lorsqu'ils rencontrent quelque obstacle; & il explique l'agrandissement de l'ombre par une difraction qui se fait des rayons proche du cheveu.

Je tâcherai d'expliquer d'une autre maniere les apparences qui s'observent dans les ombres des cheveux, dans celles des aiguilles & dans celles des plaques, & je les expliquerai par les mêmes principes que j'ai supposé pour rendre raison des apparences observées dans les ombres des corps exposés en plein soleil; car je crois que les unes & les autres se font à peu près de la même maniere.

Je suppose donc comme dans la premiere partie de ce mémoire, que des rayons qui vont rencontrer le corps opaque, il y en a une partie qui se réfléchit sur elle-même, & forme l'ombre à l'opposite, une autre partie se réfléchit aux côtés du corps opaque, & le reste qui n'est qu'une petite partie, se reflechit en circulant autour du corps, & après en avoir fait le tour, le quitte, & entre dans l'ombre formée par les rayons réfléchis. Je suppose qu'il y a des parties de lumiere qui ne quittent le cylindre que fort proche de l'axe de l'ombre, d'autres parties qui circulent moins, & quittent le cylindre avant que d'approcher de l'axe. Cette lumiere qui circule autour du corps, se mêlant pour ainsi dire avec l'ombre, en diminue l'obscurité dans les différens endroits où tombent ces parties de lumiere, & forme ces traits moins obscurs

obſcurs qu'on voit dans les ombres, lorſqu'elles ſont reçûes proche du corps qui les forme.

Par les expériences faites ſur pluſieurs petites aiguilles & ſur des cheveux, il eſt conſtant que leur ombre paroît noire, lorſqu'elle eſt reçûe à une fort petite diſtance du corps opaque : qu'à une diſtance de 3 ou 4 pieds elle n'eſt qu'une eſpece de pénombre uniforme ou une ombre fort légere ; il tombe donc en cet endroit de l'ombre un peu de lumiere qui circule autour du corps opaque, & qui en diminue en cet endroit l'obſcurité. L'ombre des mêmes aiguilles étant reçûe fort loin de l'objet, on voit non ſeulement cette pénombre plus claire qu'auparavant, mais ſa largeur paroît partagée en deux parties égales par un trait de lumiere foible qui regne au milieu de l'ombre dans toute ſa longeur. Il eſt donc viſible qu'en cet endroit de l'ombre il tombe une plus grande quantité de lumiere qu'il n'en tomboit auparavant.

Par les expériences précédentes on voit les ombres des petites plaques partagées en différentes parties ſuivant les différentes diſtances où ces ombres ſont reçûes à l'égard du corps qui les forme. Fort proche, on voit l'ombre diſtinguée en quatre ou ſix bandes claires ſéparées par autant de bandes obſcures égales aux claires : ces bandes claires ſont des rayons de lumiere qui circulent autour des aiguilles, les uns plus, les autres moins ; il y en a qui refluent & ne quittent le cylindre que preſque à l'oppoſite du lieu où ils le rencontrent : ceux-ci forment les bandes claires qui ſont les plus proches du milieu de l'ombre. Il y a d'autres rayons qui refluent moins que les premiers, & qui quittent plûtôt le cylindre pour entrer dans l'ombre ; ceux-ci forment les bandes de lumiere qui ſont plus proche des extrémités de l'ombre : ainſi des autres.

Ces traits de lumiere qui ſe voyent dans l'ombre occupent un petit eſpace juſqu'à une certaine diſtance ; plus loin cette lumiere ſe dilate & ſe croiſe, & par-là elle efface une partie de ces traits d'ombre qu'on voyoit plus proche ; car, comme nous avons dit, dans l'ombre de la plaque, large

d'une ligne environ, les six traits de lumiere & d'ombre qu'on voyoit depuis 13 pieds jusqu'à la distance de 35 ou 42, étoient effacés en partie; mais plus loin que 42 pieds, on ne voyoit plus que deux bandes noires au milieu d'une lumiere foible ou d'une pénombre. D'où il est visible qu'à 42 pieds de distance, la lumiere, par rapport à l'ombre, avoit changé de situation.

Les deux bandes noires ne sont qu'une partie d'ombre qui n'est point mêlée avec les rayons de lumiere qui reflue derriere le corps opaque; la pénombre rougeâtre qui est au milieu de deux traits d'ombre, est une partie de lumiere répandue dans un grand espace de l'ombre, & les deux pénombres à chaque côté extérieur des deux bandes noires, sont des espaces de l'ombre, où il y a encore une moindre quantité de rayons que dans l'espace du milieu.

Voilà comment nous croyons qu'on peut expliquer en général cette diversité de nuances que l'on voit dans les ombres des plaques d'une demi-ligne & d'une ligne de large; il suffira d'en avoir donné une idée, sans être obligé d'entrer dans un plus grand détail.

L'explication de ce qui se voit dans ces plaques peut servir à rendre raison des apparences qui se voyent dans les ombres des aiguilles ordinaires, n'y ayant presque point d'autre différence entre les unes & les autres, sinon que dans les aiguilles ordinaires les mêmes apparences sont comprises dans un petit espace, & se font dans une plus petite distance du cylindre; au lieu que dans les grandes plaques, elles sont plus remarquables, & demandent une grande distance. De plus, la diversité de pénombre & d'ombre, & leur différente combinaison que l'on voit dans les ombres des aiguilles de différente grosseur, vient du différent mélange d'ombre & de lumiere qui reflue & qui se fait à l'endroit où ces ombres sont reçûes.

Après avoir parlé des différens degrés d'obscurité des ombres, nous passons aux bandes de lumiere qui suivent les ombres.

Nous expliquons les deux bandes claires que l'on voit à côté de la bande obſcure par une réflexion des rayons du ſoleil qui ſe fait ſur le corps cylindrique ; car ces rayons réfléchis pour l'ordinaire en grande quantité de chaque côté par ce corps, tombent ſur le papier, mêles avec les rayons qui viennent directement du ſoleil ; la ſomme de ces deux lumieres, l'une réfléchie, l'autre directe, qui ſe rencontrent au même endroit du papier, compoſe une lumiere totale qui doit être plus claire & plus vive que celle qui eſt formée par les ſeuls rayons directs, comme cela eſt viſible dans les bandes claires.

Les deux autres bandes plus petites, que l'on voit à chaque côté extérieur des deux autres plus claires, ſont cauſées par des rayons qui, en tombant ſur le corps cylindrique, s'y reflechiſſent ſous différens angles, & vont tomber ſur le papier. Cette lumiere ſe mêle avec les rayons directs, & forme une lumiere plus vive comme la précédente.

Après avoir rendu raiſon de la différente denſité que l'on voit dans les ombres des aiguilles & des bandes de lumiere qui ſont à chaque côté de ces ombres, il reſte à examiner de quelle maniere ſe peut faire l'agrandiſſement extraordinaire de ces ombres, qui a été remarqué par le Pere Grimaldi & par M. Newton dans les cheveux & dans les autres corps cylindriques minces.

Pour expliquer ce phénomene, je ſuppoſe qu'un corps opaque, outre l'ombre qu'il fait par les rayons directs du ſoleil, peut avoir encore à côté de cette ombre un grand nombre d'ombres plus foibles ; ou plûtôt une ombre continue formée par les rayons réfléchis dans l'air. Ces ombres ne ſont pas à la vérité viſibles dans un grand jour, parce que la lumiere réfléchie par les particules d'air autour du corps opaque, étant preſque uniforme & répandue également autour du corps, il ne fait point d'ombre ſenſible par cette lumiere réfléchie : mais on pourra comprendre facilement que ſi en quelque endroit de la place qui eſt autour de l'objet, on pouvoit diminuer la lumiere réfléchie, &

empêcher en quelque maniere qu'en cet endroit il n'en tombât une aussi grande quantité que par-tout ailleurs, on verroit en cet endroit une ombre d'autant plus forte que la lumiere y seroit affoiblie ; or en quelque endroit que l'on fasse autour de l'objet cette diminution de lumiere, il est certain qu'il y aura une ombre causée par la lumiere réfléchie qui est à l'opposite ; ainsi cette ombre sera plus forte à l'opposite du soleil, & l'ombre formée par l'objet fera autour de lui des ombres plus foibles, qui feront la circonférence de l'horison.

Pour un plus grand éclaircissement je suppose une colonne au milieu d'une place. Cette colonne étant éclairée par les rayons directs du soleil, fera une ombre noire à l'opposite, mais elle est encore éclairée par les rayons réfléchis dans l'air, & par les objets qui sont aux environs, puisqu'elle est visible, de quelque côté qu'on la regarde, même du côté de l'ombre ; je dis que cette colonne, outre l'ombre causée par les rayons qui viennent directement du soleil, pourra faire encore tout autour des autres ombres plus foibles causées par les rayons réfléchis dans l'air qui iront en s'affoiblissant à mesure qu'elles s'éloignent de l'opposite du soleil, si l'on trouve le moyen de diminuer la lumiere uniforme réfléchie de toutes parts, qui empêche, pour ainsi dire, d'appercevoir ces ombres ; car diminuer la lumiere d'un côté, fait le même effet que de l'augmenter à l'opposite. Cela supposé, considérons les circonstances de l'expérience du Pere Grimaldi & de M. Newton.

On fait entrer par un fort petit trou, qui n'est qui n'est que la quarante-deuxieme partie d'un pouce, dans une chambre obscure un rayon de soleil. La lumiere faite par ce rayon est par conséquent fort foible ; on présente un cheveu ou une aiguille à ce rayon à une distance de 12 pieds du trou ; & recevant sur le carton l'ombre faite par le cheveu à 2 pieds de distance, elle paroît dix fois plus grande que l'objet ; à la distance de 10 pieds elle paroît trente-cinq fois plus grande, c'est-à-dire, toûjours plus grande à mesure qu'elle s'éloigne du cheveu.

Expliquons cette expérience par les principes établis ci-dessus. La lumiere du soleil introduite dans la chambre obscure par le petit trou, éclaire directement l'espace compris entre les lignes droites qui partent de l'extrémité de l'image du soleil, & passant par le diametre du trou, vont se terminer aux bords du soleil : mais outre cette lumiere qui vient directement du soleil, il entre encore par le trou une grande quantité de rayons qui sont réfléchis par l'air.

Quand donc on présente le cheveu aux rayons directs du soleil, il est éclairé non-seulement par ces rayons, mais il l'est aussi par les rayons réfléchis dans l'air voisin : donc le cheveu doit faire à l'opposite une ombre formée par les rayons directs du soleil ; & outre cela il doit faire de çà & & de là de l'ombre principale une autre ombre continue formée par les rayons réfléchis dans l'air ; & comme la lumiere principale qui entre par le trou dans la chambre obscure, est extrèmement foible à cause de la petitesse du trou, qui n'est que la quarantieme partie d'un pouce, elle n'est pas assez forte pour effacer une partie de ces ombres faites par la lumiere réfléchie de côté & d'autre de l'ombre principale, ensorte que de toutes ces ombres qui se forment en portion de cercle autour du cheveu, dont il est comme le centre, il se fait une ombre totale qui est plus grande que l'ombre seule formée par les seuls rayons directs du soleil, comme l'ont observé le Pere Grimaldi & M. Newton.

Il est vrai que suivant cette explication il devroit y avoir une ombre qui occupe à peu-près la demi-circonference du cercle dont le cheveu seroit au milieu: mais deux choses peuvent empêcher qu'on ne voie cette ombre aussi grande. La premiere est que le degré de lumiere formée par les rayons réfléchis dans l'air, va en diminuant à mesure qu'ils s'éloignent du soleil ; c'est pourquoi les ombres de ces rayons devenant toûjours plus foibles à mesure qu'elles font un plus grand angle avec le rayon qui va du centre du soleil au cheveu, la plus grande partie de ces ombres est effacée par un degré de lumiere plus forte, telle qu'est celle du soleil,

faite par les rayons directs introduits par le trou. L'autre raison qui empêche de voir cette ombre aussi grande, est qu'à chaque coté de cette ombre il y a une bande de lumiere plus claire que le reste de la lumiere faite par l'image du soleil, comme nous avons déja dit, qui par conséquent doit effacer à l'endroit où elle se trouve une partie des ombres proche de la grande, c'est pourquoi nous ne pouvons pas voir cette ombre aussi grande qu'elle se verroit, à cause de ces bandes de lumiere formées par les rayons réfléchis, qui sont à chaque côté de l'ombre.

J'ai observé qu'en mettant le cheveu fort proche du trou, il se formoit un plus grand nombre d'ombres & de traits colorés vers le côté extérieur de chaque bande claire, que lorsque le cheveu étoit éloigné du trou. Cela vient de ce que la lumiere réfléchie dans l'air à l'entrée du trou, étant plus forte que lorsque le cheveu en est éloigné, elle est plus propre proche du trou à marquer un plus grand nombre d'ombres & de bandes plus fortes & plus visibles, que lorsque le cheveu est plus éloigné de l'ouverture.

Ces ombres & ces traits colorés qui sont à côté de la bande claire, se voyent même sur le papier lorsque le cheveu n'est plus éclairé par les rayons directs du soleil, ainsi que M. Delisle l'a remarqué; ce qui fait voir que ces ombres & ces traits colorés ne sont pas seulement formés par les rayons directs du soleil, mais encore par des rayons qui en sont éloignés de côté & d'autre.

Voilà de quelle maniere on peut expliquer pourquoi l'ombre du cheveu est plus grande qu'elle ne doit être naturellement. Cette maniere d'expliquer l'agrandissement extraordinaire de l'ombre ne suppose que les principes ordinaires d'optique.

On pourroit encore expliquer de la moniere suivante l'agrandissement extraordinaire de l'ombre. Nous avons supposé qu'une partie de lumiere qui rencontre le corps cylindrique, circule tout autour, & va se séparer par parties derriere le cylindre. Cette lumiere qui reflue, forme autour du

cylindre une espece de tourbillon cylindrique qui s'étend à quelque distance du cylindre, de sorte que la somme des diametres du cylindre & du tourbillon est plus grande que le diametre du cylindre seul. Cela supposé, comme le tourbillon de la lumiere circule autour du cylindre, il entraîne non-seulement la partie des rayons qui reflue, mais il fait prendre la même circulation aux rayons de lumiere qui viennent directement du soleil, & qui passent de côté & d'autre du cylindre, jusqu'à la distance où le tourbillon même s'étend. Ces rayons étant détournés de leur direction, & emportés par les autres qui circulent, laissent un vuide de lumiere à l'opposite, & par cette seule raison il se fait une ombre à chaque côté de celle du cylindre ; ainsi l'ombre du cylindre & celle du tourbillon ensemble doit être plus grande que celle du cylindre seul. Voilà une seconde maniere d'expliquer l'agrandissement extraordinaire de l'ombre.

Pour rendre raison par la même hypothese des bandes claires que l'on voit à chaque côté extérieur de l'ombre, on suppose que tous les rayons qui forment le tourbillon ne suivent pas si précisément la circulation, qu'il s'en échappe quelques-uns vers sa partie extérieure. Or cette lumiere qui s'échappe, se mêlant avec la lumiere directe du soleil, ces deux lumieres, jointes ensemble, forment à chaque côté de l'ombre la bande de lumiere qui est beaucoup plus éclatante que la seule lumiere qui vient directement du soleil, & entre par le petit trou dans la chambre obscure.

Les autres bandes colorées qui sont à côté de la bande claire, se peuvent expliquer par le même échappement des rayons qui sortent de la partie extérieure du tourbillon, & vont à une plus grande distance & en moindre quantité que les premiers qui forment la bande claire. Pour ce qui est des couleurs, on peut supposer avec M. Newton qu'elles sont formées par les rayons de différente espece qui sont séparés l'un de l'autre par différentes inflexions.

Comme on peut souvent rendre raison de la même apparence par différentes hypotheses, je laisse à juger quelle de

ces deux est la plus vsaisemblable. Ces explications supposent à la vérité que la lumiere circule autour du corps opaque : mais il paroît difficile de rendre raison d'une maniere plus simple des apparences observées dans les ombres des corps opaques exposés aux rayons du soleil, tant en plein jour, que dans la chambre obscure. On peut expliquer ce mouvement que l'on suppose dans les rayons autour du corps opaque, suivant les regles ordinaires, par une suite de réflexions qui produisent un mouvement sensiblement circulaire.

Ceux qui ont expliqué avant nous cet agrandissement extraordinaire de l'ombre observée dans la chambre obscure, ont été obligés de faire pour cela seul des nouvelles suppositions. Car les uns ont supposé une difraction dans la lumiere qui se détourne du corps opaque, les autres ont cru qu'il y a une espece d'action dans le cheveu, par laquelle il éloigne loin de lui les rayons de lumiere.

On peut encore expliquer par la même hypothese du tourbillon de lumiere différentes apparences qui ont été observées dans les expériences précédentes, & que nous passerons.

Pour avoir quelque idée de ce qui arrive à la lumiere dans les expériences précédentes, j'ai tâché de le découvrir par le moyen de l'eau. J'ai présenté verticalement un bâton à une fontaine d'eau qui sortoit horisontalement dans l'air libre par une ouverture ronde d'un pouce environ de diametre. Après avoir présenté le bâton à l'eau, j'ai vû qu'elle se divisoit en quatre parties. La plus grande partie couloit en bas, une petite partie se réfléchissoit & s'élevoit perpendiculairement le long du bâton au-dessus du jet horisontal jusqu'à une certaine hauteur, après quoi elle tomboit ; le reste se divisoit, pour ainsi dire, en deux branches, dont une alloit à droite, l'autre à gauche ; & circulant avec une grande vitesse autour du cylindre, formoit une espece de tourbillon cylindrique assez gros. Ces deux branches, après avoir fait chacune la moitié environ de la circonférence du cylindre, alloient se rencontrer presqu'à l'opposite, & tomber en bas.

Les

Les mêmes apparences arrivoient, ſoit que le diametre du bâton fût plus petit que l'ouverture par où l'eau s'écouloit, ſoit qu'il fût un peu plus grand. C'eſt ſur cette experience que je me ſuis fondé pour ſuppoſer que la lumiere du ſoleil pourroit former un tourbillon ſemblable autour du cylindre qu'on préſente dans l'image du ſoleil qui entre par le petit trou dans la chambre obſcure.

Puiſque donc l'eau, toute peſante qu'elle eſt dans l'air, ne tombe pas toute, lorſqu'elle rencontre le cylindre, mais qu'il y en a une partie qui circule, & ne le quitte qu'après en avoir fait la moitié ou la plus grande partie du tour, on pourroit ſuppoſer qu'une partie de la lumiere qui rencontre le cylindre, circule autour du corps dans la lumiere même.

Il paroît viſible que cette circulation d'eau autour du cylindre, vient de l'impulſion que font les parties de l'eau, les unes contre les autres, & que c'eſt une continuation du mouvement qu'elles avoient à la ſortie du tuyau, lequel mouvement ſe continue encore aux parties de l'eau dans le détour qu'elles ſont obligées de prendre autour du cylindre. De même les parties de lumiere qui ont un mouvement infiniment plus rapide que l'eau, peuvent circuler autour du cylindre, pouſſées tant par les parties qui le ſuivent que par celles qui ſont à côté.

Outre les expériences rapportées juſqu'ici ſur les ombres des corps cylindriques expoſés aux rayons du ſoleil dans une chambre obſcure, on en a fait d'autres dont on ſe contentera de rapporter les principales.

J'ai placé deux cheveux qui ſe croiſoient & ſe touchoient l'un l'autre. Les ombres de ces deux cheveux ayant été reçûes à quelque diſtance du cheveu, paroiſſoient peintes réciproquement l'une ſur l'autre, enſorte que la partie obſcure de l'une ſe diſtinguoit ſur la partie obſcure de l'autre. Les bandes claires ſe croiſoient enſemble & paſſoient par deſſus les bandes noires; les autres petites bandes qui ſont à chaque côté des claires, faiſoient la même apparence.

Ayant placé une aiguille qui ſe croiſoit avec un cheveu

dans les rayons du ſoleil, on voit dans leurs ombres reçûes à la méme diſtance les mêmes apparences que dans les ombres des deux cheveux, quoique l'ombre de l'aiguille fût plus forte & plus marquée, on voyoit les ombres du cheveu ſur celle de l'aiguille, & les bandes claires de l'une ſur les obſcures de l'autre.

J'ai mis encore dans les rayons du ſoleil une ſoie de ſanglier proche d'une plaque de fer d'une ligne de largeur, enſorte qu'elles ſe touchoient & ſe croiſoient obliquement, faiſant d'un côté des angles aigus & des obliques de l'autre. Dans leurs ombres reçûes à la même diſtance, on voyoit du côté où étoient les angles aigus, que les bandes claires & obſcures de la ſoie entroient juſqu'au milieu de la largeur de l'ombre de la plaque: mais elles n'y entroient pas auſſi ſenſiblement du côté des angles obtus, ſoit que la plaque fût expoſée la premiere aux rayons du ſoleil, ſoit qu'elle fût la derniere. La plaque faiſoit alors une ombre aſſez noire, compoſée de ſix traits obſcurs ſéparés l'un de l'autre par autant de traits plus clairs égaux aux noirs, comme nous avons déja remarqué dans les experiences précédentes, de ſorte que dans cette ombre noire on y diſtinguoit fort bien toutes les parties claires & obſcures de l'ombre de la ſoie. (*Fig.* 7.)

Pour expliquer cette apparence, nous croyons que la lumiere du ſoleil gliſſe un peu le long de la ſoie, & par cette maniere on éclaire une partie qui ſe trouve derriere la plaque, & n'eſt point expoſée aux rayons directs du ſoleil. Cette lumiere qui gliſſe un peu le long de la ſoie, en prolonge les ombres juſqu'au milieu de l'ombre de la petite plaque. Voilà de quelle maniere on peut expliquer cette apparence. Cette explication peut ſervir auſſi à rendre raiſon de deux autres que nous avons rapportées auparavant, & de diverſes autres ſemblables que nous avons remarquées après le Pere Grimaldi.

Expériences faites avec des globes dans une chambre obſcure.

J'ai fait avec des petits globes les mêmes experiences que j'ai faites ſur les petites plaques. J'ai donc expoſé aux rayons du ſoleil qui entroient par un petit trou dans une chambre obſcure, une boule d'une ligne de diametre, placée à 25 piés du trou; ſon ombre ayant été reçûe à 33 piés de la boule, on voyoit au milieu une aire circulaire fort claire, enſuite un anneau étroit d'ombre aſſez obſcur, lequel étoit ſuivi d'un anneau beaucoup plus large de pénombre. Cette pénombre étoit terminée par un ſecond anneau étroit & obſcur, dont le diametre étoit de 3 lignes; après cet anneau on voyoit un autre anneau aſſez large, de lumiere vive, & enſuite les traits colorés de rouge, de violet & de bleu, comme dans les corps cylindriques, avec la ſeule différence que dans les globes ces apparences étoient circulaires, au lieu qu'elles étoient terminées par des lignes droites dans le corps cylindrique. (*Fig.* 8.)

J'ai fait d'autres experiences ſemblables avec des globes plus petits & des plus grands que le premier. Il y en avoit d'un quart de ligne, d'une demi-ligne; il y en avoit d'une ligne & demie, & de deux lignes & un quart. Les ombres de toutes ces boules reçûes à la même diſtance, avoient au milieu une aire circulaire de lumiere qui étoit aſſez claire: mais cette aire avoit un différent diametre, ſuivant les différens diametres des globes qui les formoient; les aires claires des boules plus groſſes, étant plus petites, & les aires des boules plus petites étant plus grandes.

Cette aire de lumiere que l'on voit au milieu des ombres des globes eſt ſans doute une lumiere qui reflue en grande abondance derriere le globe, & va éclairer cette partie. Les deux anneaux obſcurs qui renferment l'anneau de pénombre ſont des parties d'ombre ſans aucun mêlange de lumiere, & la pénombre renfermée par ces deux anneaux eſt l'ombre

du globe mêlée avec un peu de lumiere qui reflue derriere le globe. Au reste les autres anneaux de lumiere qui suivent se peuvent expliquer de la même maniere que nous avons expliqué les bandes de lumiere formées par des corps cylindriques.

La lumiere plus grande au milieu des boules plus petites, fait voir qu'elle circule en plus grande abondance & plus facilement autour des petites boules qu'autour des grandes.

Si l'on compare présentement les ombres des petites boules avec celles des petits cylindres & des petites plaques, il est évident qu'il y a beaucoup plus de lumiere dans les ombres des globes que dans celles des cylindres, non seulement lorsque les uns & les autres sont d'un diametre égal, mais lorsque le diametre du globe est plus grand que le diametre du cylindre, les ombres de tous ces corps étant reçûes à la même distance du corps opaque.

Il faut encore remarquer que nous n'avons pû appercevoir aucune distinction de lumiere séparée de l'ombre dans les ombres des plaques qui avoient un peu plus d'une ligne de largeur, quoique ces ombres ayent été reçûes à des distances fort grandes, comme de 72 piés ; mais qu'ayant reçû à la même distance les ombres des globes, lesquels globes avoient jusqu'à 2 lignes & un quart de diametre, on a vû une diversité de nuances dans leurs ombres.

Cette plus grande lumiere que l'on a remarquée dans les ombres des globes que dans celles des cylindres, vient de ce que les rayons du soleil circulent plus facilement & en plus grande abondance autour des globes qu'autour des cylindres & des plaques, parce que dans le globe ils ont plus de liberté de circuler tout autour, aulieu qu'ils ne peuvent refluer que des deux côtés du cylindre, ainsi que nous l'avons déja dit à l'occasion des experiences faites en plein soleil.

Après ces expériences je ne laisserai pas d'en rapporter encore d'autres qui ont été faites dans le dessein de découvrir, s'il étoit possible, l'origine de ces couleurs que l'on voit

dans les ombres des aiguilles, quoique je n'aye pas pû jusqu'à présent me satisfaire sur cet article.

J'ai placé dans les rayons du soleil qui entroient dans une chambre obscure deux ou trois aiguilles à différentes distances du trou, & à peu près dans une même ligne droite, afin qu'une partie de l'ombre d'une aiguille tombât sur la partie de l'ombre de l'autre. Cela étant, j'ai remarqué que lorsque la bande claire formée par une aiguille tomboit sur la bande claire formée par une autre aiguille, cette double lumiere jointe ensemble, formoit une bande plus claire que lorsqu'elles étoient séparées, comme il a été remarqué par M. Newton à l'occasion d'autres experiences qu'il a faites. De même lorsque la couleur qui formoit le bleu dans les deux ombres étoient jointes ensemble, cette couleur paroissoit beaucoup plus vive & plus éclatante que lorsqu'elles étoient séparées. Il arrivoit la même chose, lorsque les deux couleurs rouges se rencontroient ensemble, car elles formoient une belle couleur d'or.

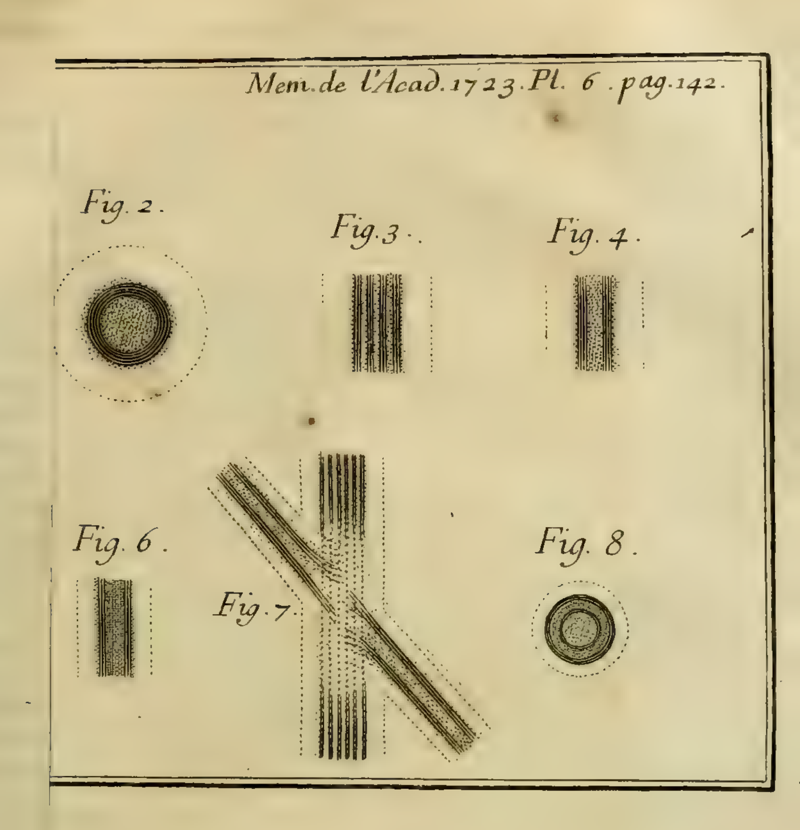
Après avoir joint ensemble ces couleurs de même nature pour en former une plus vive, nous avons essayé de faire passer la bande claire d'une aiguille sur les différentes parties de l'ombre faite par une seconde aiguille, & j'ai remarqué que lorsque la bande claire d'une aiguille tomboit sur la pénombre extérieure formée par l'autre aiguille, on voyoit une belle couleur de bleu celeste, à peu près comme elle paroissoit quand on faisoit tomber les deux couleurs bleues ensemble. Et lorsque la même bande claire se rencontroit sur l'ombre plus forte du milieu, cette union formoit une couleur rouge; ce qui prouve en quelque maniere que cette couleur rougeâtre qu'on voit au milieu des ombres d'un grand nombre d'aiguilles, peut venir du peu de lumiere qui reflue dans cette ombre.

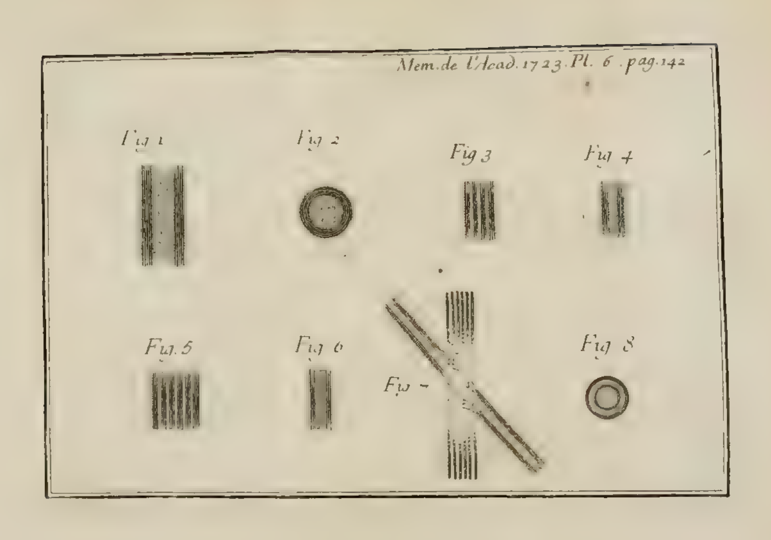
J'ai mis deux petites plaques de fer, larges chacune de 3 ou 4 lignes l'une proche de l'autre, de sorte qu'il y avoit un petit intervalle entre deux. Les ayant exposées aux rayons du soleil, & ayant reçû leurs ombres à 15 ou 20 piés loin

des plaques, il n'y avoit aucune lumiere entre deux, mais on voyoit une ombre continue, au milieu de laquelle paroiſſoient quatre traits d'une couleur de pourpre vive. Ces traits étoient paralleles entre eux, & ſéparés l'un de l'autre par d'autres traits noirs, diſtingués de ceux de couleur de pourpre par d'autres traits d'un vert fort foible & d'un jaune auſſi pâle. M. Deliſle a remarqué auſſi des couleurs dans les traits de lumiere & d'ombre qu'on voit dans les ombres reçûes proche des corps.

Quelque attention que j'aye apporté pour faire exactement ces dernieres expériences ſur le mélange des couleurs, je ne promets pas d'avoir toûjours rencontré juſte, à cauſe de la difficulté qu'il y a de faire tomber préciſément les parties d'un ombre ſur des parties différentes de l'autre.

A l'occaſion des couleurs formées par la réflexion des rayons du ſoleil, j'ai répété l'expérience ſuivante, rapportée par le Pere Grimaldi. J'ai fait entrer dans une chambre obſcure la lumiere du ſoleil par une ouverture qui avoit environ un demi-pouce de diametre. A la diſtance de 7 ou 8 pieds du trou, j'ai préſenté à la lumiere du ſoleil qui entroit par ce trou, un corps cylindrique de bois ou de cuivre d'un pouce de diametre; j'ai appliqué ce cylindre à l'image du Soleil, deſorte qu'une partie de cette image tomboit ſur le cylindre, l'autre tomboit dehors. Dans cette ſituation il ſe faiſoit une réflexion de rayons du ſoleil par le corps cylindrique, & cette réflexion formoit une trainée de lumiere en maniere de demi-cercle, dont le centre étoit à l'endroit du cylindre où tomboit l'image du ſoleil. Ayant reçû ſur un carton blanc une partie de cette lumiere réfléchie, en quelque endroit que ce fût de la demi-circonférence, on voyoit dans cette lumiere une grande diverſité de couleurs toutes belles & vives. Ces couleurs étoient du rouge, du violet, du jaune, du bleu & du vert; de ſorte qu'étant reçûes ſur le carton blanc, on auroit crû qu'il étoit un de ces papiers marbrés de ces différentes couleurs. Il n'y avoit que proche de l'image du ſoleil où cette lumiere étoit plus étroite &


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.



Mem. de l'Acad. 1723. Pl. 6 . pag. 142
Fig 1
Fig 2
Fig 3
Fig 4
Fig. 5
Fig 6
Fig 7
Fig 8

plus ramassée, qu'on ne voyoit point ces couleurs, au moins distinctement, mais seulement une lumiere à peu près comme celle du soleil.

DES DIVERSES METHODES de déterminer l'apogée & le perigée, ou l'aphélie & le perihélie des planetes.

Par M. CASSINI.

ON sçait que les planetes ne sont pas toûjours à égale distance du soleil & de la terre, autour desquels elles font leurs révolutions, mais qu'elles s'en trouvent tantôt plus tantôt moins éloignées; ce qui provient non-seulement de ce que le soleil ou la terre ne sont pas précisément au centre de leur orbe, mais aussi de ce que ces orbes ne sont pas exactement circulaires. 16 Juin 1723.

Quelque soit la figure de cet orbe, il est certain qu'il y a un point où chaque planete se trouve dans sa plus grande distance, que l'on appelle apogée, lorsqu'on la considere à l'égard de la terre, & aphelie, lorsque c'est parrapport au soleil; le point opposé de cet orbe supposé régulier, s'appelle périgée à l'égard de la terre, & périhélie par rapport au soleil.

Il est aisé de reconnoître de quelle importance il est dans l'astronomie de pouvoir déterminer exactement la situation de ces points dans le zodiaque, & leur distance à la terre ou au soleil, puisque c'est de-là principalement que l'on peut conjecturer la figure des orbes des planetes & leur mouvement véritable, qui sont les objets principaux de cette science.

Mais autant que la connoissance exacte de la situation de ces points est nécessaire, autant est-il difficile de la déterminer exactement. Car comme vers ces points la distance des planetes à la terre ou au soleil, varie presque insensiblement, il est très-difficile de s'appercevoir du lieu précis où elles se

trouvent à leur plus grande distance, & où elles commencent à s'approcher de la terre & du soleil, après s'en être éloignées le plus qu'il a été possible; ou bien le temps où elles commencent à s'éloigner de la terre ou du soleil, après s'en être approchées à leur plus petite distance.

Ainsi j'ai crû devoir exposer les principaux moyens que l'on peut employer pour parvenir à cette connoissance, en discernant ceux qui méritent la préference, & quelles sont les circonstances où on peut s'en servir le plus utilement. Mais avant que d'exposer ces méthodes, il est à propos de remarquer, que quoique nous convenions que la plûpart des planetes fassent leurs révolutions autour du soleil qui se trouve à l'un des foyers de leur orbe; cependant la situation où nous nous trouvons, nous oblige de les considérer par rapport à la terre.

Pour ce qui est de la lune, tous les astronomes sont d'accord qu'elle fait sa révolution autour de la terre, ainsi on parlera de son apogée & du périgée.

A l'égard du soleil, il est indifférent pour cette recherche de supposer qu'il tourne autour de la terre, ou que la terre fasse sa révolution autour de lui. Dans cette derniere supposition, on appellera aphélie & perihélie de la terre, ce que l'on nomme vulgairement apogée ou périgée du soleil.

Il n'en est pas de même des autres planetes, il est nécessaire de déterminer leur aphélie ou leur perihélie, parce qu'elles tournent réellement autour du soleil.

Comme leurs révolutions autour du soleil, ne s'achevent pas en même-temps que celle de la terre autour du soleil, ou du soleil autour de la terre, il suit qu'elles se trouvent plus près de la terre dans des temps où elles sont plus éloignées du soleil, & qu'au contraire elles paroissent s'éloigner de la terre dans d'autres temps où elles s'approchent du soleil. Ainsi nous ne pouvons déterminer leur distance au soleil, qu'en réduisant leur distance à la terre à celle qu'elles ont par rapport au soleil.

Mais comme ces rapports de distances supposent des hypotheses

pothefes aftronomiques, & que la moindre erreur dans ces hypothefes en peut caufer de fort grandes dans la détermination des apogées, qui demande une grande exactitude; nous avons jugé qu'on ne pouvoit employer fûrement que les occafions où le foleil & la planete fe trouvent à l'égard de la terre dans le même point du zodiaque, ou dans celui qui lui eft oppofé; car alors il n'y a pas de difficulté d'affigner à la planete, vûe du foleil, le même lieu où elle eft apperçûe de la terre.

Il eft aifé de voir que le temps de ces obfervations n'arrive que dans leurs conjonctions & oppofitions avec le foleil.

A l'égard des conjonctions, on ne peut pas appercevoir celles des planetes fupérieures, telles que Saturne, Jupiter & Mars; car ou elles font cachées derriere le foleil, lorfque leur conjonction eft prefque centrale, ou bien fa lumiere empêche de les appercevoir, lorfqu'elles paffent en conjonction avec une latitude méridionale ou feptentrionale plus grande que le demi-diametre du foleil.

A l'égard des planetes inférieures, elles paffent toûjours dans leurs conjonctions inférieures entre le foleil & la terre; c'eft pourquoi on peut les appercevoir fur le difque du foleil, lorfqu'elles ont très-peu de latitude, ce qui arrive cependant très-rarement. Lorfque leur latitude furpaffe le demi-diametre du foleil, elles paffent deffus ou deffous en conjonction, & dans cet état on ne peut voir que Venus, car pour Mercure il eft trop petit pour pouvoir être alors apperçû. On les diftingue encore moins dans leurs conjonctions fupérieures, où elles paffent derriere le foleil, ou bien deffus ou deffous, à une trop grande diftance de la terre pour pouvoir en être apperçûes.

Pour ce qui eft des oppofitions des planetes fupérieures, on les obferve très-facilement, parce qu'elles arrivent au milieu de la nuit; & ce font ces obfervations qui arrivent à peine une fois dans chaque année, dont nous nous fervons principalement pour déterminer leurs aphélies & perihélies.

Il faut auffi remarquer que quoique la lune faffe fa ré-

volution autour de la terre ; elle eſt ſujette à des inégalités qui l'éloignent plus ou moins de la terre en différens endroits de ſon orbe ; de ſorte qu'on ne peut guere employer, pour déterminer ſon apogée, que les obſervations de ſes conjonctions ou oppoſitions avec le ſoleil, auquel temps elle n'a d'autre inégalité que celle qui réſulte de ſon excentricité à l'égard de la terre & de la figure de ſon orbe.

Toutes ces remarques étoient néceſſaires pour juger que les méthodes que nous allons donner pour déterminer l'apogée & le périgée des planetes, ne conviennent toutes qu'au ſoleil ; qu'il y en a dont on ne peut faire aucun uſage pour les planetes, & qui conduiroient même à l'erreur ; & qu'ainſi il ne faut employer que celles qui conviennent dans certaines circonſtances qu'on aura ſoin d'indiquer.

Premiere méthode de déterminer l'apogée & le périgée du ſoleil.

La premiere méthode qui ſe préſente pour déterminer l'apogée & le périgée du ſoleil, eſt d'obſerver le vrai lieu du ſoleil, lorſque ſon diametre paroît le plus grand & le plus petit : car pour les regles de l'optique, la grandeur apparente d'un même objet qui s'approche ou s'éloigne de nous, étant en proportion réciproque de ſes diverſes diſtances, il eſt évident que le ſoleil eſt dans ſon apogée, lorſque ſon diametre nous paroît le plus petit, & qu'il eſt au contraire dans ſon périgée, lorſqu'il nous paroît le plus grand.

Mais comme le ſoleil, dans le temps de ſon paſſage par ſon apogée & ſon périgée, eſt pluſieurs jours ſans que ſon diametre paroiſſe augmenter ou diminuer ſenſiblement de grandeur, il faut l'obſerver par un micrometre ou par des réticules placés au foyer d'une lunette, pluſieurs jours avant & après, choiſiſſant les heures auxquelles il ſe trouve à la même hauteur ſur l'horiſon, afin d'éviter les erreurs cauſées par la parallaxe & la réfraction. On comparera enſemble ces obſervations, & en ayant trouvé deux où le diametre du

ſoleil a paru de la même grandeur, on partagera en deux parties égales l'intervalle qui s'eſt écoulé entre le temps de ces obſervations, qui étant ajoûté au temps de la premiere, donne le temps auquel le ſoleil eſt arrivé à ſon apogée ou à ſon périgée.

On déterminera pour le temps de ces deux obſervations le vrai lieu du ſoleil, qu'on peut calculer immédiatement par ſa hauteur méridienne. Le milieu entre ces deux vrais lieux donne le vrai lieu de l'apogée ou du périgée du ſoleil.

Il eſt aiſé de reconnoître que cette méthode ne peut être employée que pour déterminer l'apogée & le périgée du ſoleil, de même que ceux de la lune dans le temps ſeulement des oppoſitions, pour les raiſons que nous avons déduites ci-deſſus, & parce qu'il n'y a que ce temps-là qu'on peut appercevoir le diametre entier de la lune. A l'égard des autres planetes, leur diametre apparent eſt ſi petit, qu'on ne pourroit pas y reconnoître de différence aſſez ſenſible.

Seconde méthode de déterminer l'apogée & le périgée du ſoleil.

On obſervera pluſieurs jours de ſuite la hauteur méridienne du bord ſupérieur & du bord inférieur du ſoleil avant ſon paſſage par l'apogée ou le périgée. Corrigeant ces hauteurs par la réfraction & la parallaxe, on aura la grandeur véritable du diametre du ſoleil, & ſa déclinaiſon pour le jour de chaque obſervation. On cherchera enſuite le jour auquel le diametre du ſoleil, ainſi corrigé a paru après ſon paſſage par l'apogée ou le périgée, de la même grandeur que dans une obſervation précédente. La déclinaiſon du ſoleil étant connue, on trouvera par la trigonométrie ſphérique le vrai lieu du ſoleil pour le temps des deux obſervations correſpondantes. La différence étant partagée en deux parties égales, & ajoûtée au vrai lieu du ſoleil pour le jour de la premiere obſervation, donne le vrai lieu de ſon apogée ou de ſon périgée.

Cette méthode ne peut pas être employée pour les planetes, par les raisons que nous avons alléguées ci-dessus.

Troisieme méthode de déterminer l'apogée & le périgée du soleil.

Ayant placé au foyer d'une lunette un fil vertical, on mesurera le temps que le soleil employe à passer par le méridien en diverses saisons de l'année, & on convertira ce temps en degrés, minutes & secondes à raison de 15 degrés par heure.

Comme le soleil décrit par son mouvement journalier un cercle parallele à l'équateur, dont les degrés diminuent de grandeur à mesure que sa déclinaison à l'égard de l'équateur va en augmentant, il arrive que son diametre occupe alors un plus grand arc de ce parallele : c'est pourquoi il faut réduire le temps de son passage, converti en degrés & minutes de son parallele, en degrés & minutes d'un grand cercle de la sphere, en faisant comme le sinus total est au sinus du complément de la déclinaison du soleil au temps de l'observation : ainsi les minutes & secondes de degré que le diametre du soleil occupe sur le parallele, sont aux minutes & secondes d'un grand cercle qu'occupe le diametre du soleil pris sur l'équateur.

On choisira deux observations correspondantes, dans lesquelles le diametre du soleil ainsi réduit, se trouve de la même grandeur ; & on calculera par le moyen de la déclinaison du soleil son vrai lieu dans ces deux différentes situations. La différence étant partagée en deux parties égales, & ajoûtée au vrai lieu du soleil pour le temps de la premiere observation, donne le vrai lieu de l'apogée ou du périgée du soleil.

Cette méthode, de même que les deux précédentes, ne peut être employée que pour déterminer l'apogée & le périgée du soleil, & elle a cet avantage, qu'elle n'est point sujette à aucune variation causée par la réfraction & la parallaxe.

Quatrieme méthode de déterminer l'apogée & le périgée du ſoleil.

On obſervera pluſieurs jours de ſuite en diverſes ſaiſons de l'année la hauteur méridienne du ſoleil, qui étant corrigée par la réfraction & la parallaxe, & comparée à la hauteur de l'équateur, donnera la déclinaiſon du ſoleil pour les jours de ces différentes obſervations. Cette déclinaiſon étant déterminée, & connoiſſant l'obliquité de l'écliptique, que l'on ſuppoſe de 23° 29′ 0″, on calculera par la trigonométrie ſpherique le vrai lieu du ſoleil pour le temps de chaque obſervation.

Ayant ainſi connu le mouvement vrai du ſoleil pendant l'intervalle d'un ou de pluſieurs jours, on cherchera dans une autre ſaiſon, le temps où le mouvement vrai du ſoleil a été égal à celui qu'on lui a reconnu pendant le même nombre de jours, la différence entre le vrai lieu du ſoleil déterminé par les obſervations correſpondantes étant partagée en deux également, & ajoûtée au vrai lieu du ſoleil de la premiere obſervation, donne le vrai lieu de l'apogée & du périgée du ſoleil.

Lorſque le mouvement vrai du ſoleil en longitude pendant un certain nombre de jours eſt plus grand ou plus petit que dans le même nombre de jours correſpondans, on comparera les obſervations des jours qui précédent ou ſuivent immédiatement, & ſont telles que dans un pareil nombre de jours la quantité du mouvement du ſoleil ſoit plus grande ou plus petite que dans la premiere comparaiſon. On déterminera l'apogée ou le périgée du ſoleil qui réſulte de ces obſervations, & on aura la différence entre les deux déterminations de l'apogée, dont on prendra la partie proportionnelle qui convient à la différente quantité du mouvement, qu'il faut appliquer au lieu de l'apogée du périgée trouvé par la premiere détermination, pour avoir le vrai lieu de l'apogée & du périgée du ſoleil.

Cette méthode suppose que la différence entre le temps vrai & le temps moyen dans l'intervalle des premieres observations, est égale à la différence entre le temps vrai & le temps moyen dans l'intervalle des observations correspondantes, ou qu'elle n'en differe pas sensiblement; car autrement il faudra réduire le temps vrai de chaque intervalle en temps moyen. On prendra le mouvement du soleil qui convient à la différence entre le temps moyen de chacun de ces intervalles qu'on retranchera du vrai mouvement observé dans le plus grand intervalle. On comparera ensuite ces vrais mouvemens de la maniere qu'on vient de l'expliquer pour déterminer le vrai lieu de l'apogée & du périgée du soleil.

Il est aisé de reconnoître que cette méthode demande un grand nombre d'observations de hauteurs méridiennes du soleil, afin de pouvoir choisir celles qui sont les plus propres pour cette détermination, lesquelles doivent être éloignées les unes des autres, afin que les différences entre les mouvemens observés soient plus sensibles.

On peut l'employer aussi pour la lune & les autres planetes, pourvû qu'on ait assez d'observations pour trouver des intervalles égaux où le mouvement vrai d'une planete avant & après son passage par l'apogée ou le périgée soit de la même quantité.

EXEMPLE.

Le 29 Janvier de l'année 1717, la hauteur méridienne apparente du soleil a été observée de $23^d\ 36'\ 15''$, ce qui donne sa déclinaison méridionale à midi de $17^d\ 52'\ 0''$, & sa longitude de $309^d\ 39'\ 8''$.

Le 14 Mai suivant, la hauteur méridienne apparente du bord supérieur du soleil a été observée de $60^d\ 5'\ 50''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale de $18^d\ 39'\ 38''$, & sa longitude de $53^d\ 24'\ 46''$.

La différence entre ces deux longitudes est de $103^d\ 45'\ 38''$, qui mesurent le vrai mouvement du soleil dans l'intervalle de 104 jours, depuis le 29 Janvier, jusqu'au 14 Mars de l'année 1717.

Le 13 Août de la même année, la hauteur méridienne du bord supérieur du soleil a été observée de $56^d\ 5'\ 20''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale de $14^d\ 42'\ 2''$, & sa longitude de $140^d\ 26'\ 40''$.

Le 26 Novembre suivant, la hauteur méridienne du bord supérieur du soleil a été observée de $20^d\ 27'\ 50''$, ce qui donne sa déclinaison méridionale de $21^d\ 0'\ 35''$, & sa longitude de $244^d\ 7'\ 19''$.

Le mouvement du soleil en longitude dans le même intervalle de 104 jours, depuis le 13 Août jusqu'au 26 Novembre 1717, a donc été de $103^d\ 40'\ 39''$, plus petit de 4 minutes 59 secondes que depuis le 29 Janvier jusqu'au 14 Mai de la même année.

La différence entre le temps vrai & le moyen dans le premier intervalle est de $17'\ 48''$, plus grande seulement d'une minute 8 secondes que dans le second intervalle, auxquels il répond 3 secondes de vrai mouvement qu'il faut retrancher du mouvement vrai du soleil, déterminé dans le premier intervalle de $103^d\ 45'\ 38''$, & on aura $103^d\ 45'\ 35''$.

Comparant l'observation du 14 Mai, où la longitude du soleil étoit de $53^d\ 24'\ 46''$, avec celle du 13 Août, où on l'a trouvée de $140^d\ 26'\ 40''$, on aura le vrai mouvement du soleil dans cet intervalle de $87^d\ 1'\ 54''$, dont la moitié $43^d\ 30'\ 57''$, étant ajoûtée à $53^d\ 24'\ 46''$, donne $96^d\ 55'\ 43''$.

Comme dans ces observations le mouvement du soleil en longitude dans le premier intervalle de $103^d\ 45'\ 35''$ est plus grand de $4'\ 56''$ que celui qui a été observé de $103^d\ 40'\ 39''$ depuis le 13 Août jusqu'au 26 Novembre, on examinera les observations des jours suivans, & on trouvera que le 14 Août la hauteur méridienne apparente du bord supérieur du soleil a été observée de $55^d\ 49'\ 30''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale de $14^d\ 23'\ 11''$, & sa longitude de $141^d\ 25'\ 36''$.

Le 27 Novembre suivant, la hauteur méridienne du bord

ſupérieur du ſoleil étoit de 20ᵈ 16′ 30″, ce qui donne ſa déclinaiſon méridionale de 21ᵈ 12′ 7″, & ſa longitude de 245ᵈ 10′ 19″.

La différence entre la longitude du ſoleil du 14 Mai & du 27 Novembre, meſure ſon mouvement vrai dans cet intervalle qui eſt de 103ᵈ 44′ 43″, plus grand de 4′ 4″ que depuis le 13 Août juſqu'au 26 Novembre, & plus petit de 52 ſecondes que depuis le 29 Janvier juſqu'au 14 Mai.

Comparant l'obſervation du 14 Mai, où la longitude étoit de 53ᵈ 24′ 46″ avec celle du 14 Août, où on l'a trouvée de 141ᵈ 25′ 36″, on aura le mouvement du ſoleil dans cet intervalle de 88ᵈ 0′ 50″, dont la moitié 44ᵈ 0′ 25″ étant ajoûtée à 53ᵈ 24′ 46″, donne 97ᵈ 25′ 11″.

Comme la différence entre le mouvement du ſoleil qui réſulte des obſervations des 14 & 27 Novembre eſt encore plus petite de 52 ſecondes que celle qui réſulte des obſervations des 29 Janvier & 14 Mai, on voit que le vrai lieu de l'apogée doit être au-delà de la derniere détermination : c'eſt pourquoi l'on fera comme 4′ 4″ différence, dont le mouvement du ſoleil en longitude depuis le 14 Août juſqu'au 27 Novembre, eſt plus grand que ſon mouvement depuis le 13 Août juſqu'au 26 Novembre, ſont à 52 ſecondes différence, dont le mouvement en longitude depuis le 14 Août juſqu'au 27 Novembre, eſt plus petit que depuis le 29 Janvier juſqu'au 14 Mai; ainſi 29′ 28″, différence entre l'apogée du ſoleil qui réſulte des deux comparaiſons précédentes, ſont à 6′ 17″ qu'il faut ajoûter au lieu de l'apogée trouvé par la derniere détermination de 97ᵈ 25′ 11″, pour avoir le vrai lieu de l'apogée du ſoleil en 1717 à 7ᵈ 31′ 28″ de l'écreviſſe.

Il eſt aiſé de voir juſqu'à quelle préciſion on peut déterminer le vrai lieu de l'apogée par cette méthode, puiſque dans cet exemple une différence de 52 ſecondes dans le vrai lieu du ſoleil, en cauſe une de 6′ 17″ dans la détermination de l'apogée du ſoleil, ce qui eſt à raiſon de 14′ 30″ pour deux minutes de différence dans le vrai lieu du ſoleil, qui eſt

eſt une erreur beaucoup plus grande que celle qui peut réſulter des obſervations faites avec préciſion. Ainſi l'on peut s'aſſûrer que par cette méthode on déterminera le vrai lieu de l'apogée à moins d'un quart de degré près, & même avec beaucoup plus d'exactitude, ſi l'on n'y employe que des obſervations choiſies & faites dans les circonſtances convenables, en aſſez grand nombre pour rectifier les unes par les autres

Cinquieme méthode de déterminer l'apogée & le périgée du ſoleil.

On obſervera en diverſes ſaiſons de l'année, le paſſage par le méridien du ſoleil & d'une étoile fixe, dont l'aſcenſion droite eſt connue. Réduiſant en dégrés la différence entre ces paſſages, à raiſon de 15 degrés par heure, on aura la différence entre l'aſcenſion droite du ſoleil & celle de cette étoile au temps de ſon paſſage par le méridien, qu'il faut ajoûter à l'aſcenſion droite de l'étoile, lorſque ſon paſſage précede celui du ſoleil, & qu'il faut retrancher de l'aſcenſion droite de l'étoile, lorſque ſon paſſage ſuit celui du ſoleil, & on aura l'aſcenſion droite du ſoleil au temps du paſſage de l'étoile par le méridien, avec laquelle on trouvera la longitude véritable du ſoleil pour ce temps.

On déterminera de la même maniere la longitude véritable du ſoleil pour le jour ſuivant ou tel autre que l'on voudra, & l'on aura le mouvement vrai du ſoleil pendant un certain nombre de jours.

On trouvera par la même méthode, dans une autre ſaiſon, le vrai lieu du ſoleil, & l'on cherchera le temps où le mouvement du ſoleil en longitude eſt égal à ſon mouvement obſervé pendant le même nombre de jours. La différence entre le vrai lieu du ſoleil qui réſulte des obſervations correſpondantes, étant partagée en deux également, & ajoûtée à la premiere obſervation, donne le vrai lieu de l'apogée & du périgée du ſoleil.

Lorſque le mouvement vrai du ſoleil, pendant ces deux intervalles de temps égaux, n'eſt pas préciſément de la même

quantité, on comparera les obſervations des jours qui précedent ou ſuivent immédiatement, & ſont telles que la quantité du mouvement compriſe dans un même intervalle de temps, ſoit plus grande ou plus petite que dans la premiere comparaiſon, on déterminera l'apogée ou le perigée du ſoleil qui reſulte de ces obſervations, & on aura la différence entre les deux déterminations de l'apogée, dont on prendra la partie proportionnelle qui convient à la différente quantité du mouvement, qu'il faut appliquer au lieu de l'apogée ou du périgée trouvé par la premiere détermination, pour avoir le vrai lieu de l'apogée ou du périgée du ſoleil.

On peut ſe ſervir, pour cette détermination, de différentes étoiles fixes, & au cas que l'on ne connoiſſe point exactement leur aſcenſion droite, il faudra obſerver la hauteur méridienne du ſoleil dans les temps où ſa déclinaiſon varie conſidérablement d'un jour à l'autre, & calculer ſon aſcenſion droite, à laquelle on ajoûtera le mouvement du ſoleil en aſcenſion droite qui convient à la différence entre le paſſage du ſoleil & de l'étoile par le méridien, lorſque le paſſage de l'étoile eſt après midi, & de laquelle on retranchera ce mouvement, lorſque l'étoile a paſſé le matin, & on aura l'aſcenſion droite véritable du ſoleil au temps du paſſage de l'étoile par le méridien. Y ajoûtant la différence entre le paſſage du ſoleil & de l'étoile par le méridien, réduite en degrés, lorſque l'étoile a paſſé par le méridien après midi; ou le retranchant, lorſque ſon paſſage eſt avant midi, on aura l'aſcenſion droite véritable de l'étoile, avec laquelle on déterminera le vrai lieu de l'apogée ou du périgée du ſoleil, de la maniere qu'on l'a expliquée ci-deſſus.

EXEMPLE.

Le paſſage de Sirius par le méridien a été obſervé le 21 Mai de l'année 1717 à $2^h\ 40'\ 20''$, & le 22 Mai à $2^h\ 36'\ 20''$.

Réduiſant ces heures en degrés, on aura la différence d'aſcenſion droite entre le ſoleil & cette étoile le 21 Mai

de 40^d 5′ 0″, & le 22 Mai de 39^d 5′ 0″, qui étant retranchés de l'aſcenſion droite de cette étoile qui étoit alors de 98^d 11′ 3″, à cauſe que ſon paſſage a ſuivi celui du ſoleil, donne l'aſcenſion droite du ſoleil le 21 Mai 1717 à 2^h 40′ 20″ de 58^d 6′ 3″, & le 22 Mai à 2^h 36′ 20″ de 59^d 6′ 3″, par le moyen deſquelles on trouvera la longitude du ſoleil le 21 Mai 1717 à 2^h 40′ 20″, de 60^d 16′ 44″, & le 22 Mai à 2^h 36′ 20″, de 61^d 14′ 15″. La différence, qui eſt de 57^d 31′, meſure le vrai mouvement du ſoleil dans l'intervalle de 23^h 56′ 0″.

Le 6 Août ſuivant, le paſſage de la luiſante de l'Aigle par le meridien a été obſervé à 10^h 30′ 27″ $\frac{1}{2}$, & le 7 Août à 10^h 26′ 38″.

Réduiſant ces heures en degrés, on aura la différence d'aſcenſion droite entre le ſoleil & cette étoile le 6 Août de 157^d 36′ 52″ $\frac{1}{2}$, & le 7 Août de 156^d 39′ 30″, qui étant retranchés de l'aſcenſion droite de la luiſante de l'Aigle qui étoit alors de 294^d 13′ 44″, donne l'aſcenſion droite du ſoleil le 6 Août 1717 à 10^h 30′ 27″ $\frac{1}{2}$ du ſoir de 136^d 36′ 51″ $\frac{1}{2}$, & le 7 Août à 10^h 26′ 38″, de 137^d 34′ 14″, par le moyen deſquelles on trouvera la longitude du ſoleil le 6 Août 1717 à 10^h 30′ 27″ $\frac{1}{2}$ du ſoir de 134^d 8′ 18″ $\frac{1}{2}$, & le 7 Août à 10^h 26′ 38″ $\frac{1}{2}$ de 135^d 5′ 50″. La différence qui eſt de 57′ 31″ $\frac{1}{2}$, meſure le mouvement vrai du ſoleil en longitude pendant l'intervalle de 23^h 56′ 10″, avec une différence de 10 ſecondes dans le temps, & d'une demi-ſeconde dans le mouvement, de ce qui a été trouvé entre l'obſervation du 21 & 22 Mai.

Négligeant ces différences qui ſont inſenſibles, & qui d'ailleurs ſe compenſent l'une l'autre, on trouvera qu'au temps de la premiere obſervation, la longitude du ſoleil étoit de 60^d 16′ 44″, & au temps de la derniere de 135^d 5′ 50″. La différence, qui eſt de 74^d 49′ 6″, étant partagée en deux parties égales, on aura 37^d 24′ 33″, qui étant ajoûtés à 60^d 16″ 44″, donne le lieu de l'apogée du ſoleil à 7^d 41′ 17″ de l'Ecreviſſe.

Si l'on ſuppoſe préſentement, que l'aſcenſion droite de ces deux étoiles n'eſt pas connue, on trouvera par l'obſervation de la hauteur méridienne du ſoleil ſa déclinaiſon ſeptentrionale le 21 Mai à midi de $20^d\ 12'\ 51''$, & le 22 Mai à midi de $20^d\ 25'\ 31''$, ce qui donnera ſa déclinaiſon le 21 Mai à $2^h\ 40'\ 20''$, temps du paſſage de Sirius par le méridien de $20^d\ 14'\ 45''$, avec laquelle on trouvera ſa longitude de $60^d\ 16'\ 31''$, & ſon aſcenſion droite de $58^d\ 5'\ 48''$. Y ajoûtant $40^d\ 5'\ 0''$, qui répondent à $2^h\ 40'\ 20''$ différence entre le paſſage du ſoleil & de Sirius par le méridien, on aura l'aſcenſion droite de cette étoile le 21 Mai à $2^h\ 40'\ 20''$ de $98^d\ 10'\ 48''$.

Le 22 Mai le paſſage du Sirius par le méridien fut obſervé à $2^h\ 36'\ 20''$, qui étant converties en degrés, font $39^d\ 5''$, qui étant retranchés de $98^d\ 10'\ 48''$ donne l'aſcenſion droite du ſoleil le 22 Mai à $2^h\ 36'\ 20''$ de $59^d\ 5'\ 48''$, avec laquelle on trouvera ſa longitude de $61^d\ 14'\ 2''$.

La différence entre cette longitude & celle du jour précédent eſt de $57'\ 31''$ qui meſurent le vrai mouvement du ſoleil dans l'intervalle de $23^h\ 56'\ 0''$.

Le 6 Août ſuivant la déclinaiſon ſeptentrionale du ſoleil a été obſervée à midi de $16^d\ 43'\ 46''$, & le 7 Août de $16^d\ 27'\ 26''$, ce qui donne la déclinaiſon du ſoleil le 6 Août à $10^h\ 30'\ 27''\frac{1}{2}$, temps du paſſage de l'Aigle par le méridien de $16^d\ 36'\ 37''$, avec laquelle on trouvera le vrai lieu du ſoleil de $134^d\ 9'\ 42''\frac{1}{2}$, & ſon aſcenſion droite de $136^d\ 38'\ 16''$. Y ajoûtant $157^d\ 36'\ 52''\frac{1}{2}$ qui répondent à $10^h\ 30'\ 27''\frac{1}{2}$, différence entre le paſſage du ſoleil & de l'Aigle par le méridien, on aura l'aſcenſion droite de cette étoile le 6 Août de $294^d\ 15'\ 8''\frac{1}{2}$.

Le 7 Août le paſſage de l'Aigle par le méridien fut obſervé à $10^h\ 26'\ 38''\frac{1}{2}$, qui étant converties en degrés, font $156^d\ 39'\ 30''$, qu'il faut retrancher de $294^d\ 15'\ 8''\frac{1}{2}$ pour avoir l'aſcenſion droite du ſoleil le 7 Août à $10^h\ 26'\ 38''$ de $137^d\ 35'\ 38''\frac{1}{2}$, avec laquelle on trouvera le vrai lieu du ſoleil le 7 Août à $10^h\ 26'\ 38''$ de $135^d\ 7'\ 14''$. La diffé-

rence entre cette longitude & celle du jour précedent est de 57′ 31″ ½ qui mesurent le vrai mouvement du soleil dans l'intervalle de 23^h 56′ 10″.

Négligeant ces petites différences qui sont compensées en partie l'une par l'autre, on trouvera au temps de la premiere observation la longitude du soleil de 60^d 16′ 31″, & au temps de la seconde de 135^d 7′ 14″. Prenant un milieu, on aura le vrai lieu de l'apogée du Soleil à 7^d 41′ 52″ de l'écrevisse, peu différent de celui que l'on a trouvé par la comparaison précédente.

Cette methode a beaucoup de rapport à la précedente, en ce que l'on y employe le vrai lieu du soleil, déterminé dans des intervalles égaux avant & après son passage par son apogée ou son périgée : mais elle a cet avantage, que dans la quatrieme methode il étoit nécessaire dans chaque observation de déterminer le vrai lieu du soleil par le moyen de sa déclinaison, ce qui oblige de choisir des temps où cette déclinaison varie considérablement d'un jour à l'autre, pour avoir plus exactement son mouvement en longitude; au lieu que dans celle-ci, l'ascension droite d'une étoile étant une fois déterminée exactement par des observations choisies, on peut connoître le vrai lieu du soleil, & par conséquent son vrai mouvement dans tous les temps de l'année avec une assez grande exactitude. Car comme on ne suppose par cette méthode que l'ascension droite de l'étoile connue, & la différence entre le passage du soleil & de cette étoile par le méridien, toute l'erreur qui peut se trouver dans cette détermination doit provenir de ces deux causes.

A l'égard de celle qu'il peut y avoir dans l'ascension droite de l'étoile, elle ne peut gueres monter qu'à une minute, & elle n'en cause qu'une de la même quantité dans la détermination de l'apogée.

Pour ce qui est de la différence entre les passages, quand même on la supposeroit de deux secondes, qui est une erreur plus gtande que celle qui peut résulter des observations faites avec précision, cela n'en causeroit qu'une de 3

ou 4 minutes dans l'exemple qui a été rapporté dans la quatrieme méthode, ce qui est une exactitude plus grande que celle à laquelle on a cru jusqu'à présent pouvoir parvenir dans la détermination du vrai lieu de l'apogée & du perigée.

Sixieme méthode de déterminer l'apogée & le périgée du soleil, ou l'aphélie ou le perihélie des planetes, & l'excentricité de leurs orbes.

Les méthodes que nous venons de proposer, demandent des observations choisies, faites à distance égale de part & d'autre de l'apogée & du périgée, & qu'on ne peut par conséquent employer qu'en comparant ensemble un grand nombre d'observations.

C'est pourquoi nous en donnerons ici une qui a été inventée par mon Pere, & rapportée dans le Journal des Sçavans du mois de Novembre de l'année 1669. par laquelle on peut déterminer immédiatement le vrai lieu de l'aphélie & du périhélie des planetes dans l'hypothese elliptique, y employant seulement trois observations faites dans des temps différens.

Fig. 1. Ayant décrit un cercle *MBND* à volonté, on prendra de *C* vers *B*, l'arc *CB* égal à la différence entre le vrai lieu d'une planete déterminée par les deux premieres observations, & l'arc *BA* égal à la différence entre le vrai lieu de cette planete, déterminé par la seconde & la troisieme observation. Du point *B*, on menera par le centre *L* du cercle *MBND*, le diametre *BLD* qui rencontrera sa circonférence au point *D*. Le mouvement moyen de la planete étant connu, on prendra du point *D* vers *C* l'arc *DF* égal au moyen mouvement du soleil qui répond à l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre la premiere & la seconde observation, & du point *D* vers *A* l'arc *DE* égal au moyen mouvement depuis la seconde jusqu'à la troisieme observation. On menera du point *D* aux points *C* & *A*, les lignes *DC*, *DA*, qui couperont les lignes *BF*, *BE*, aux points *G* & *H*, par lesquels on menera la ligne *GH*.

Du point *B*, on abaiſſera ſur *HG* la perpendiculaire *BI*, & du point *I*, on menera par le centre *L* le diametre *MILN*, ſur lequel on prendra *IO* égal à *IL*. L'angle *BIM* meſurera la diſtance de la planete à ſon aphelie dans le temps de la ſeconde obſervation. Le point *I* ſera le centre de l'ellipſe que le ſoleil décrit par ſon mouvement propre, dont le grand axe ſera égal au diametre *MN*, le point *L* ſera un des foyers de l'ellipſe, & repréſentera le centre du vrai mouvement où le ſoleil eſt placé, & le point *O*, l'autre foyer autour duquel la planete parcourt ſon moyen mouvement.

On peut employer de la même maniere un plus grand nombre d'obſervations faites avant & après celle qui a été marquée la ſeconde, en tirant des extrémités *B* & *D* du diametre *BD*, aux points de la circonférence qui marquent les mouvemens vrais & moyens du ſoleil, des lignes dont les interſections doivent toutes ſe rencontrer ſur la ligne *HG* prolongée de part & d'autre, s'il eſt néceſſaire.

DÉMONSTRATION.

L'angle *BHA* externe eſt égal à l'angle *BDA*, moitié de l'angle au centre *BLA*, qui meſure le mouvement vrai de la planete depuis la ſeconde juſqu'à la troiſieme obſervation, & à l'angle *DBE*, moitié de l'angle *DLE* qui meſure ſon moyen mouvement, c'eſt-à-dire, au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

L'angle *BGC* externe eſt égal à l'angle *BDC*, moitié de l'angle *BLC* qui meſure le mouvement vrai de la planete depuis la premiere juſqu'à la ſeconde obſervation, & à l'angle *DBF*, moitié de l'angle *DLF* qui meſure ſon moyen mouvement.

Du point *B* ſoit mené aux points *A* & *C* les lignes *BA*, *BC*. L'angle *BAH* ou *BAD* qui eſt dans le demi-cercle *BAD* eſt droit; l'angle *BIH* eſt auſſi droit par la conſtruction; c'eſt pourquoi les points *BAHI* ſont dans un cercle dont le diametre eſt *BH*. L'angle *BIA* qui ſoûtend l'arc *BA* eſt donc égal à l'angle *BHA* qui ſoûtend le même arc *BA*,

& a été trouvé égal au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

On trouvera de même que les angles *BCD* ou *BCG* & *BIG* étant droits, les points *BIGC* sont dans un cercle, & que l'angle *BIC* qui soûtend l'arc *BC* est égal à l'angle *BGC* qui a été trouvé égal au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

Du point *I* comme centre & de l'intervalle *IV* égal à *LM* soit décrit le cercle *VPT*. Soit fait l'angle *BIR* égal à l'angle *IBL*, soit prolongé *IR* jusqu'à ce qu'il rencontre le cercle *VPI* en *P*. Joignez *LP*, & du point *O* ménez à *IP* la parallele *OS* qui rencontre en *S* le rayon *SB* prolongé, s'il est nécessaire.

Les angles *IBL*, *IBP*, étant égaux par la construction, les côtés *BR* & *RI* sont aussi égaux; les retranchant des rayons *LB*, *IP*, des cercles égaux *MBND*, *VPT*, on aura les cotés *PR*, *RL*, du triangle *PRL* égaux. Les angles *RPL*, *RLP*, seront donc égaux entr'eux : mais l'angle *IRL* externe est égal à la somme des angles *RPL*, *RLP*, & à la somme des angles *IBL*, *BIP*. Les quatre angles *RPL*, *RLP*, *IBL*, *BIP*, seront donc égaux entr'eux, & la ligne *PL* sera parallele à la ligne *BI*. Maintenant à cause des paralleles *OS*, *IP*; *SL* est à *RL* ou *PR* qui lui est égal comme *SO* est à *RI*, comme *OL* est à *IL*. Mais *OL* est double de *IL*, donc *SL* est double de *RL* ou *PR*, & *SO* est double de *RI*; donc *SL* plus *SO* est double de *PR* plus *RI*, c'est-à-dire du rayon *PI* qui est égal à la moitié du diametre *VT*. Le point *S* est donc sur une ellipse, dont le grand axe est *VT*, & dont les foyers sont aux points *O* & *L*.

On démontrera de même que si l'on fait l'angle *CKI* égal à l'angle *ICL*, & l'on mene *OQ* parallele à *IK*, qui rencontre *LC* prolongé, s'il est nécessaire en *Q*; le point *Q* est sur une ellipse dont le grand axe est *VT*, & les foyers *O* & *L*.

Si l'on ajoûte présentement à l'angle *SLQ* ou *ELC* qui par la construction mesure l'arc *BC* du vrai mouvement du soleil

soleil l'angle *PLB*; on aura l'angle *CLP* ou *CXB* qui lui est égal à cause des paralleles *BL*, *BIX*. Ajoûtant à l'angle *CXB* l'angle *ICL* ou *ICX*, on aura l'angle *BIC* ou *BGC* qui lui est égal, que l'on a démontré mesurer le milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement du soleil.

Si l'on ajoûte de même à l'angle *BIC* l'angle *PLB* ou *PIB* qui lui a été démontré égal, on aura l'angle *PIC*, auquel si l'on ajoûte l'angle *ICL* ou *CIK* qui lui est égal par la construction, on aura l'angle *PIK* qui, à cause des paralleles *OS*, *IP* & *OQ*, *IK*, est égal à l'angle *SOQ*. La différence entre l'angle *BLC* ou *SLQ* du vrai mouvement, & l'angle *BIC* milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement est donc égale à la différence entre cet angle *BIC* & l'angle *SOQ*, lequel représentera par conséquent dans l'hypothese elliptique le moyen mouvement qui se fait autour d'un des foyers *O* de l'ellipse *VST*, pendant que le vrai mouvement se fait autour de l'autre foyer *L* qui représente le centre du soleil. La ligne *VT* qui passe par les foyers *L* & *O* sera donc l'axe de l'ellipse que la planete décrit par sa révolution, dont l'extrémité *V* du côté du point *O* représente son aphélie, & l'extrémité *T* son périhélie. L'angle *VOS* mesurera la distance moyenne de la planete à son aphélie, & l'angle *VLS* sa distance véritable, qui, étant retranchée du vrai lieu du soleil déterminé en *S*, donne le vrai lieu de son aphélie: ce qu'il falloit chercher.

On peut déterminer géométriquement par cette méthode le vrai lieu de l'aphélie des planetes & leur excentricité, en décrivant une grande figure divisée exactement, & choisissant la détermination qui résulte des observations qui paroissent avoir été faites avec le plus d'exactitude. Mais comme il seroit difficile de déterminer par ce moyen les aphélies des planetes & leur excentricité avec toute la précision que l'on peut souhaiter, on les trouvera par le calcul en cette maniere.

EXEMPLE.

Le 5 Mai de l'année 1690. la vraie opposition de Saturne avec le soleil est arrivée à Paris à $6^h\ 32'$ du soir. Le vrai lieu du soleil étoit alors $1^s\ 15^d\ 33'\ 30''$, ce qui donne le vrai lieu de Saturne de $7^s\ 15^d\ 33'\ 30''$.

Le 15 Juillet de l'année 1696. la vraie opposition de Saturne est arrivée à $1^h\ 0'$ après midi, son vrai lieu étant de $9^s\ 23^d\ 46'\ 0''$.

Le 12 Octobre de l'année 1703. la vraie opposition de Saturne est arrivée à $20^h\ 12'$ après midi, son vrai lieu étant de $0^s\ 19^d\ 14'\ 20''$.

Le mouvement vrai du soleil dans l'espace de six années, dont deux bissextiles, 70 jours $18^h\ 28'$ depuis le 5 Mai 1690. à $6^h\ 32'$ du soir jusqu'au 15 Juillet 1696. à $1^h\ 0'$, a donc été de $68^d\ 12'\ 30''$, & ce vrai mouvement dans l'espace de sept années communes 89 jours $19^h\ 12'$ depuis le 15 Juillet 1696. à $1^h\ 0'$ jusqu'au 12 Octobre 1703. à $20^h\ 12'$ a été de $85^d\ 28'\ 20''$.

Soit pris sur le cercle *MBAD* l'arc *BC* de $68^d\ 12'\ 30''$, & l'arc *BA* de $85^d\ 28'\ 20''$, & ayant tiré le diametre *BLD*, soit pris l'arc *DF* de $75^d\ 44'\ 8''$ égal au moyen mouvement de Saturne qui convient à six années communes 72 jours $18^h\ 28'$, & l'arc *DE* de $88^d\ 31'\ 20''$ égal au moyen mouvement de cette planete qui répond à 7 années 89 jours $19^h\ 12'$.

L'angle *BDC* à la circonférence, étant la moitié de l'angle *BLC* au centre qui mesure l'arc *BC* de $68^d\ 12'\ 30''$, sera de $34^d\ 6'\ 15''$. L'angle *DBF* à la circonférence étant la moitié de l'angle *DLF* qui mesure l'arc *DF* de $75^d\ 44'\ 8''$, sera de $37^d\ 52'\ 4''$, & par conséquent dans le triangle *BGD*, dont les angles *BDC* ou *BDG*, & *DBF* ou *DBG* sont connus, & le côté *BD* est égal au double du rayon supposé de 100000, on trouvera le côté *BG* de 117930.

L'arc *BA* étant de $85^d\ 28'\ 20''$, & l'arc *DE* de $88^d\ 31'\ 20''$, on aura l'angle *BDA* de $42^d\ 44'\ 10''$, & l'angle *DBE*

de 44^{d} $15'$ $40''$, & par conséquent dans le triangle *B H D*, dont les angles *B D H* & *D B H* sont connus aussi-bien que le côté *B D*, on trouvera le côté *B H* de 135911. Maintenant dans le triangle *G B H*, dont les côtés *B G*, *B H*, sont connus, & l'angle compris *G B H* est de 82^{d} $7'$ $44''$ égal à la somme des angles *D B G* & *D B H*, on trouvera l'angle *B H G* de 44^{d} $17'$ $15''$; & dans le triangle rectangle *B I H*, dont le côté *B H* est connu de 135911, & l'angle *B H G* ou *B H I* de 44^{d} $17'$ $15''$, on trouvera le côté *B I* de 949012. Retranchant l'angle *D B E* qui a été trouvé de 44^{d} $15'$ $40''$ de l'angle *I B H* de 45^{d} $42'$ $55''$, complément de l'angle *B H G*, on aura l'angle *I B L* de 1^{d} $27'$ $5''$, & dans le triangle *B I L*, dont le côté *B I* vient d'être trouvé de 949012, & le rayon *B L* est connu, aussi-bien que l'angle *I B L* compris entre ces côtés, on trouvera l'angle *B L I* ou *S L V* de 25^{d} $6'$ $33''$, qui étant retranché du vrai lieu du soleil en *S* au temps de la seconde observation qui étoit de 9^{s} 23^{d} $46'$ $0''$, donne le vrai lieu de l'aphélie de Saturne de 8^{s} 28^{d} $39'$ $27''$, c'est-à-dire, à 28^{d} $39'$ $27''$ du sagittaire. On trouvera aussi dans le triangle *B I L* le côté *I L* qui mesure l'excentricité de Saturne de 56646 parties, dont le rayon est 1000000.

Septieme méthode de déterminer l'apogée & le périgée du Soleil, ou l'aphélie & le périhélie des planetes, & l'excentricité de leurs orbes.

Étant donné par trois observations quelconques le mouvement vrai d'une planete & le mouvement moyen qui lui répond, déterminer dans l'hypothese elliptique le vrai lieu de l'apogée de cette planete & l'excentricité de son orbe. Fig. 2.

Soit dans le cercle *A B D* le moyen mouvement qui convient à l'intervalle de temps entre la premiere & la seconde observation, mesuré par l'angle *A C B*, & le moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre la seconde & la troisieme observation, mesuré par l'angle *B C D*. Ayant pro-

longé le rayon *BC* au-delà du centre *C*, ſoit fait l'angle *CAE* égal à la demi-circonférence entre le vrai & le moyen mouvement qui convient au premier intervalle, & ſoit pris l'angle *CDG* égal à la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement qui répondent au ſecond intervalle. Soit décrit par les points *A*, *B*, *E*, le cercle *ABHE*, dont le centre eſt en *V*, & par les points *B*,*D*,*G*, le cercle *BDHG*, dont le centre eſt en *T*, & qui coupe le cercle *ABHE* au point *H*. Soit mené du point *H* par le centre *C* du cercle *ABD* la ligne droite *HCF*. Je dis que le point *F* repréſentera l'apogée de la planete, le point *Q* le périgée, *H*, un des foyers de l'ellipſe, autour duquel ſe fait le vrai mouvement, & *HC* la moitié de l'excentricité.

Pour déterminer l'ellipſe que la planete décrit par ſa révolution, ſoit fait l'angle *DHI* égal à l'angle *CDH*, & ayant pris *CK* égal à *CH*, ſoit mené *KI* parallele à *CD* qui rencontrera *HI* au point *I*. Soient faits auſſi les angles *BHN* & *AHL* égaux aux angles *CBH* & *CAH*, & ſoient menées les lignes *KN* & *KL* paralleles aux lignes *CB*, *CA*, qui rencontrent les lignes *HN* & *HL* aux points *N* & *L*. Je dis que les points *I*, *N*, *L*, ſeront ſur une ellipſe dont les foyers ſont *H* & *K*, & qu'ils repréſentent le lieu de la planete dans les trois obſervations données.

DÉMONSTRATION.

A cauſe des paralleles *DC* & *KI*, on aura dans les triangles *HCM*, *HKI*; *HC* eſt à *HK*, comme *HM* eſt à *HI*, comme *CM* eſt à *KI*: mais *HC* eſt la moitié de *HK*, donc *HM* eſt la moitié de *HI*, & *CM* eſt la moitié de *KI*, donc *HM* plus *CM* eſt égal à la moitié de *HI* plus *KI*. Mais à cauſe des angles égaux *DHI*, *CDH*; *DM* eſt égal à *HM*; donc *DM* plus *CM*, c'eſt-à-dire, le rayon *CD* eſt égal à la moitié de *HI* plus *KI*, & par conſéquent le point *I* eſt ſur la circonférence d'une ellipſe, dont un des foyers eſt le point *H*, & l'autre foyer le point *K*.

Il faut préſentement conſidérer que l'angle *BHA* eſt

égal à l'angle *BCA* moins les angles *CBH* & *CAH*: mais l'angle *BGA* qui lui est égal, mesure l'angle *BCA* moins l'angle *CAG* demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement : donc les angles *CBH* plus *CAH* mesurent aussi cette même demi-différence. Si donc on retranche de l'angle *BHA* les angles *BHN* & *AHL* qui, par la construction, ont été faits égaux aux angles *CBH* plus *CAH*, on aura l'angle *LHN* égal à l'angle *ACB* du moyen mouvement moins deux fois la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement, d'où il suit que l'angle *LHN* mesure le vrai mouvement de la planete qui répond au premier intervalle.

On trouvera de même que l'angle *BGD* ou *BHD* qui est à la circonférence du cercle *BDHG* est égal à l'angle *BCD* moins l'angle *CDG* demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement : mais l'angle *CDG* est égal à l'angle *CHD*, moins l'angle *GDH* ou *GBH*, qui se terminant à la même circonférence, lui est égal ; donc l'angle *CDH* moins l'angle *GBH* ou *CBH* mesure cette demi-différence. Si donc l'on retranche de l'angle *BHD* l'angle *DHI* qui a été fait égal à l'angle *CDH*, & l'on y ajoûte l'angle *BHN* qui a été fait égal à l'angle *CBH*, on aura l'angle *IHN* égal à l'angle *BCD* moins deux fois l'angle *CDG*, d'où il suit que l'angle *IHN* représente le vrai mouvement qui convient au second intervalle. Mais à cause des lignes *KL*, *KN*, *KI*, paralleles aux lignes *CA*, *CN*, *CD*, l'angle *LKN* est égal à l'angle *ACB*, & l'angle *NKI* est égal à l'angle *BCD*. Donc les angles *LKN* & *NKI* mesurent le moyen mouvement qui se fait à l'égard du foyer *K* de l'ellipse, pendant que le vrai mouvement se fait autour de l'autre foyer *H* de la même ellipse, d'où il résulte que le point *F* représente le vrai lieu de l'apogée, & le point *O* le périgée ; que *KH* mesure l'excentricité de l'orbe de la planete, & que les points *L*, *N*, *I*, représentent son vrai lieu dans ces trois différentes observations.

EXEMPLE.

Le vrai lieu du Soleil ayant été déterminé en 1722. le 16.

Mai de 1 25^d 10′ 54″, le 18 Juillet de 3^s 25^d 22′ 0″, & le 30 Août de 5^s 25^d 40′ 6″, on cherche le vrai lieu de l'apogée du soleil & l'excentricité de son orbe.

L'angle *ACB* du moyen mouvement, depuis le 16 Mai jusqu'au 18 Juillet 1722. est de 6^d 5′ 44″, dont retranchant le vrai mouvement du soleil de cet intervalle qui a été observé de 60^d 11′ 6″, on aura la différence entre le vrai & le moyen mouvement de 1^d 54′ 38″, dont la moitié 57′ 19′ étant ajoutée à 60^d 11′ 6″, ou retranchée de 62^d 5′ 44″, donne l'angle *AEB* ou *AHB* de 61^d 8′ 25″.

L'angle *BCD* du moyen mouvement, depuis le 18 Juillet jusqu'au 30 Août 1722. est de 42^d 22′ 59″, dont retranchant le vrai mouvement du soleil dans cet intervalle qui est de 41^d 18′ 6″, on aura la différence entre le vrai & le moyen mouvement de 1^d 4′ 53″, dont la moitié 32′ 26″ $\frac{1}{2}$ étant retranchée de l'angle *ABD* de 42^d 22′ 59″, donne l'angle *BGD* ou *BHD* de 41^d 50′ 32″ $\frac{1}{2}$.

L'angle *ACB* étant de 62^d 5′ 44″, & l'angle *BCD* de 42^d 22′ 59″, on aura l'angle *ABC* de 58^d 57′ 8″, & l'angle *CBD* de 68^d 48′ 30″ $\frac{1}{2}$, dont la somme mesure l'angle *ABP* qui seroit de 127^d 45′ 38″ $\frac{1}{2}$.

L'angle *AHB* ou *BVP* qui lui est égal étant de 61^d 8′ 25″, & l'angle *BHD* ou *BTO* qui lui est égal de 41^d 50′ 32″ $\frac{1}{2}$, on aura l'angle *ABV* de 28^d 51′ 35″, & l'angle *TBD* de 48^d 9′ 27″ $\frac{1}{2}$, dont la somme 77^d 1′ 2″ $\frac{1}{2}$ étant retranchée de l'angle *ABD* de 127^d 45′ 38″ $\frac{1}{2}$, reste l'angle *TBV* de 50^d 44′ 36″.

Ayant divisé les cordes *AB*, *BD*, en deux parties égales par les lignes *CP*, *CO*, on aura l'angle *BCP*, moitié de l'angle *ACB*, de 31^d 2′ 52″ $\frac{1}{2}$, dont le sinus *BP* est de 51575 parties dont le rayon *BC* est 100000. On aura aussi l'angle *BCO* moitié de l'angle *BCD* de 21 11′ 29″ $\frac{1}{2}$, dont le sinus *BO* est 36149. On fera donc comme le sinus de l'angle *BVP* ou *AHB* de 61^d 8′ 25″ est au sinus total; ainsi *BP* 51575 est à *BV* qu'on trouvera de 58888; on fera aussi comme le sinus de l'angle *BTO* ou *BHD* de 41^d 58′

32″ ½ est au sinus total; ainsi *B O* 36149 est à *B T* qu'on trouvera de 54190.

Maintenant dans le triangle *B V T*, dont le côté *B V* est de 58888, le côté *B T* de 54190, & l'angle *T B V* compris entre ces côtés a été déterminé de 50ᵈ 44′ 46″, on aura l'angle *B T V* de 69ᵈ 38′ 7″, dont le double est l'angle *B T H* de 139ᵈ 16′ 14″; on aura donc l'angle *T B H* de 20ᵈ 21′ 53″ qui étant ajoûté à l'angle *D B T* de 48ᵈ 9′ 27″ ½, donne l'angle *D B H* de 68ᵈ 31′ 20″ ½: mais l'angle *D H B* est de 41ᵈ 50′ 32″ ½; on aura donc l'angle *B D H* de 69ᵈ 38′ 7″, dont retranchant l'angle *C B D* ou *C D B* de 68ᵈ 48′ 30″ ½, reste l'angle *C D H* de 49′ 36″ ½. On fera présentement comme le sinus de l'angle *B H D* de 41ᵈ 50′ 32″, est au sinus de l'angle *D B H* de 68ᵈ 31′ 20″ ½; ainsi *B D* 72298 est à *H D* qu'on trouvera de 100854, & dans le triangle *C D H* dont le côté *C D* est connu de 100000, le côté *D H* de 100854, & l'angle compris *C D H* est de 49′ 36″ ½, on trouvera l'angle *D H C* de 59ᵈ 4′ 37″, dont retranchant l'angle *D H I* égal à l'angle *C D H* de 49′ 36 ½, reste l'angle *F H I* de 58ᵈ 15′ 0″, distance de l'apogée au lieu du soleil dans la troisieme observation, qui étoit de 5ˢ 6ᵈ 40′ 6″, on aura donc le vrai lieu de l'apogée du soleil de 3ˢ 8ᵈ 25′ 6″. On trouvera aussi *C H*, moitié de l'excentricité de l'orbe du soleil de 1682 parties, dont le rayon est 100000.

Cette méthode a beaucoup de rapport à la précédente : mais le calcul en est un peu plus long. On peut l'employer très-utilement pour trouver les observations qui sont les plus favorables pour la recherche de l'aphélie & du périhélie des planetes; parce que la détermination de ces lieux se faisant par l'intersection de deux cercles, il est certain que l'on trouvera plus de précision par les observations faites dans les lieux où l'intersection de ces cercles est la moins oblique & la plus approchante de la perpendiculaire.

Huitieme méthode de déterminer l'apogée & le périgée du soleil, ou l'aphélie & le périhélie des planetes dans l'hypothese de Kepler par trois seules observations.

Nous venons de donner la maniere de déterminer géométriquement dans l'hypothese elliptique simple, l'aphélie & le périhélie des planetes par trois seules observations faites en quelque endroit que ce soit de leurs orbes.

Cette méthode peut s'appliquer au soleil, à la lune & aux autres planetes, dont l'excentricité est fort petite : mais l'on a remarqué que dans les orbes des planetes dont l'excentricité est considérable, telles que Mars & Mercure, les équations qui résultent de l'hypothese de Kepler, représentent plus parfaitement la différence entre leur vrai & leur moyen mouvement. Nous avons donc jugé qu'il seroit très-avantageux d'avoir une méthode de déterminer, suivant cette hypothese, l'aphélie & le périhélie des planetes, en ne supposant qu'un petit nombre d'observations. Car comme on ne peut observer que rarement leur vrai lieu vû du centre du soleil, par les raisons que nous avons rapportées ci-dessus, on ne peut pas par conséquent y employer la plûpart des méthodes précédentes qui demandent un grand nombre d'observations.

Comme dans l'hypothese de Kepler on ne peut pas calculer les vrais lieux des planetes géométriquement, mais seulement par approximation, il ne faut pas non plus espérer de pouvoir déterminer géométriquement, suivant cette hypothese, l'aphélie & le périhélie des planetes, mais seulement par approximation, ce qui suffit pour cette recherche, pourvû que l'on puisse approcher à l'infini de la précision géométrique.

On considerera pour cela que la distance des planetes au soleil, lorsqu'elles sont dans leur aphélie & périhélie, devant être toûjours la même, dans quelque hypothese que ce soit, leurs orbes doivent avoir aussi une même excentricité, & qu'ainsi l'ellipse qu'elles décrivent, suivant l'hypothese de Kepler

Kepler, doit être la même que celle qu'elles parcourent suivant l'hypothese elliptique simple. Le vrai lieu des planetes, suivant l'une & l'autre de ces deux hypotheses, doit donc être sur la même ellipse, mais distribué diversement, parce que suivant Kepler la planete parcourt des aires égales en temps égaux, au lieu que suivant l'hypothese elliptique simple, le moyen mouvement se distribue également autour d'un des foyers de l'ellipse, pendant que le vrai ou apparent se fait autour de l'autre foyer.

Les vrais lieux d'une planete que l'on suppose se mouvoir, suivant l'hypothese de Kepler, étant donc connus par trois observations, il s'agit de trouver les lieux de la planete qui y répondent suivant l'hypothese elliptique, parce que la situation des planetes étant, suivant ces deux hypotheses, sur une même ellipse, dont les foyers & les axes sont les mêmes; connoissant le lieu de l'aphélie & du périhélie d'une planete suivant l'hypothese elliptique, on aura en même-temps leur situation, suivant l'hypothese de Kepler.

Pour les déterminer, soit *ALBM* une ellipse qui représente par exemple l'orbe de Saturne, dont *C* soit le centre, & *S* l'un des foyers où est placé le soleil, suivant les deux hypotheses, ensorte que *SA* mesure la plus grande distance de Saturne au soleil, & *SB* sa plus petite distance. Soient les points *M*, *L*, *N*, les vrais lieux de Saturne en trois différens endroits de son orbe, tels que les aires *MSL*, *LSN*, soient entr'elles, comme les temps que cette planete a employés à parcourir les arcs *MAL*, *LGN*, c'est-à-dire que l'aire *MALS* soit à l'aire *LGNS*, comme le temps que la planete a employé à parcourir l'arc *MAL* est au temps qu'elle a employé à décrire l'arc *LGN*. Nous avons enseigné dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1719, une méthode abregée pour déterminer, suivant l'hypothese de Kepler, la vraie distance *ASL* d'une planete à son aphélie, sa distance moyenne *ACD* étant donnée, & il s'agit de trouver ici la distance moyenne qui répond à la véritable, ce que l'on fera en cette maniere. * Fig. 3.

L'excentricité *CS* étant connue par rapport au rayon *AC*, & la ligne *GS* étant par la proprieté de l'ellipse, égale à ce rayon, on trouvera dans le triangle rectangle *GCS*, la valeur du côté *GC* par rapport au rayon *AC* ou *HC*. On fera ensuite comme *GC* est à *HC*, ou bien *LF* est à *IF*; ainsi la tangente de l'angle *FSL*, distance véritable de Saturne à son aphélie est à la tangente de l'angle *ASI*. Maintenant dans le triangle *CIS*, dont l'angle *ASI* vient d'être déterminé, l'excentricité *CS* & le rayon *CI* sont connus; on fera comme *CI* est à *CS*, ainsi l'angle *ASI* ou *CSI* est à l'angle *CIS*, qui étant ajoûté à l'angle *CSI*, est égal à l'angle externe *ACI*. Menant la ligne *DRO* parallele au rayon *CI* qui rencontre l'axe *AB* en *R*, on aura l'angle *ARD* égal à l'angle *ACI* que l'on vient de déterminer. Retranchant de l'angle *ARD*, l'angle *ODS* que l'on a remarqué dans les Mémoires de 1719, mesurer la différence entre la grandeur de l'arc *DI* & celle de la ligne *SE*, & dont nous avons donné une table à la fin de ces Mémoires, on aura l'angle *ASD*, & dans le triangle *CDS* dont l'angle *ASD* est connu de même que l'excentricité *CSD* & le rayon *CD*, on fera comme *CD* est à *CS*; ainsi le sinus de l'angle *ASD* ou *CSD* est au sinus de l'angle *CDS*, qui étant ajoûté à l'angle *CSD*, donne la valeur de l'angle *ACD* qui mesure la distance moyenne cherchée de Saturne à son aphélie.

La distance moyenne de Saturne à son aphélie étant connue, on déterminera facilement son vrai lieu suivant l'hypothese elliptique simple, car la différence entre le vrai & le moyen mouvement d'une planete étant suivant cette hypothese le double de l'équation qui se fait au centre, il faut retrancher de l'angle *ACD*, distance moyenne de Saturne à son aphélie, l'angle *DCT* double de l'angle *CDS*, & mener du point *S*, la ligne *CP* parallele à la ligne *CT*, l'angle *ACT* ou *ASP* qui lui est égal, mesurera la distance véritable de Saturne à son aphélie, & le point *P* marquera le vrai lieu de Saturne suivant l'hypothese elliptique.

Ayant ainsi déterminé sur cette ellipse trois points, sui-

vant cette hypothese, qui répondent aux trois lieux observés, on calculera géométriquement, par le moyen d'une des deux méthodes précédentes, le vrai lieu de l'aphélie & l'excentricité de Saturne qui se trouveront différens de ceux que l'on a supposés en premier lieu de même que son excentricité.

On se servira de cet aphélie & de cette excentricité pour calculer de nouveau les vrais lieux de Saturne suivant l'hypothese elliptique, & on employera ces vrais lieux pour trouver son aphélie & son excentricité qui approcheront des véritables avec toute la précision que l'on peut souhaiter.

On peut recommencer ce calcul autant de fois que l'on souhaitera, & approcher ainsi à l'infini de la précision géométrique : mais cela est inutile dans cette recherche.

EXEMPLE.

Le vrai lieu de Saturne ayant été déterminé le 5 Mai 1690 de $7^s\ 15^d\ 33'\ 30''$, le 15 Juillet 1696 de $9^s\ 23^d\ 46'\ 0''$, & le 12 Octobre 1703 de $0^s\ 19^d\ 14'\ 20''$, on veut trouver, suivant l'hypothese de Kepler, l'aphélie de Saturne & son excentricité.

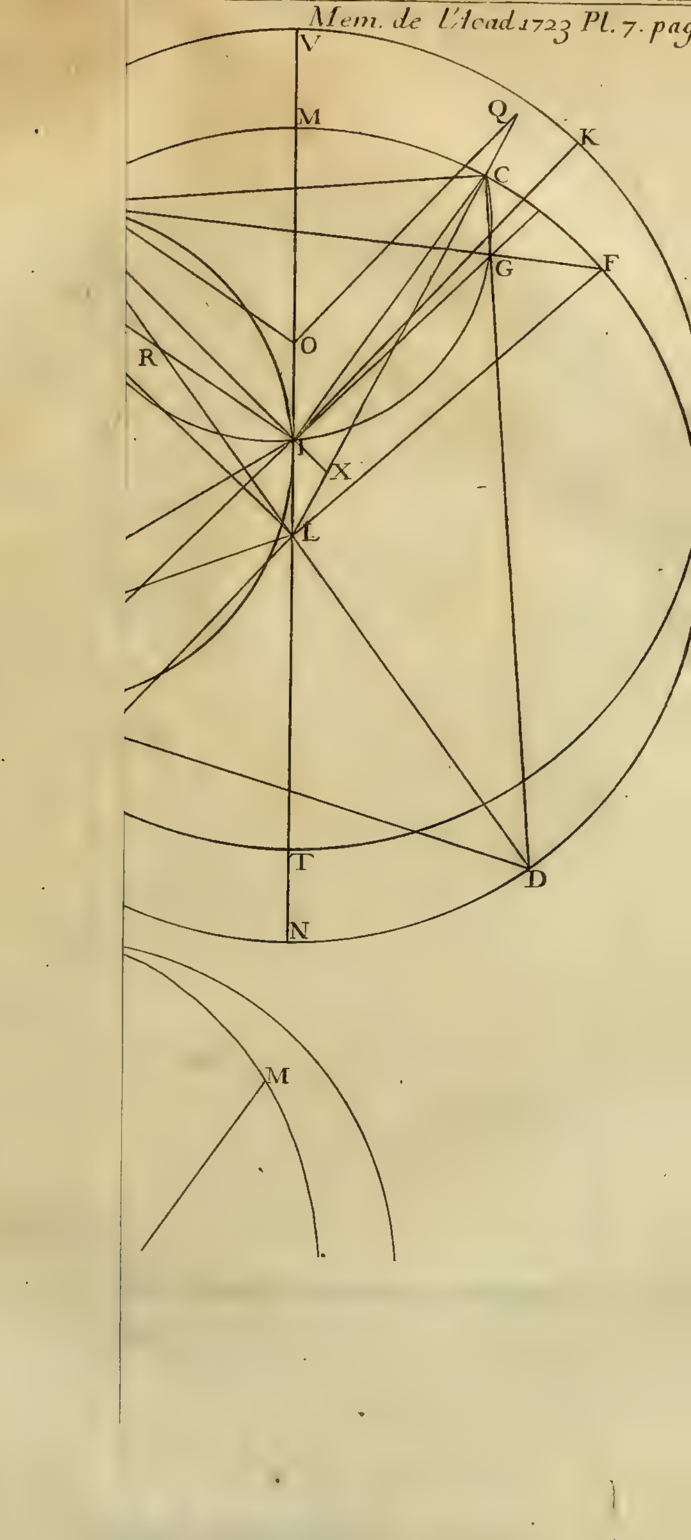
On employera d'abord l'aphélie qui résulte de l'hypothese elliptique qu'on a trouvé dans l'exemple précédent de $8^s\ 28^d\ 39'\ 27''$, & l'excentricité qui a été déterminée de 56646 parties dont le rayon est 1000000, & on aura la distance de Saturne à son aphélie dans la premiere observation de $43^d\ 5'\ 57''$, dans la seconde de $25^d\ 6'\ 33''$, & dans la troisieme de $110^d\ 34'\ 45''$. L'excentricité *CS* ayant aussi été déterminée de 56646 parties, dont le rayon est 1000000, on aura *GC* de 998395, & l'on fera comme *GC* 998395 est à *HC* 1000000. Ainsi la tangente de l'angle *ASL* de $25^d\ 6'\ 33''$ est à la tangente de l'angle *ASI* qu'on trouvera de $25^d\ 8'\ 40''$; on fera ensuite comme *CI*, 1000000 est à *CS*, 56646; ainsi le sinus de l'angle *ASI* de $25^d\ 8'\ 40''$ est au sinus de l'angle *CIS* de $1^d\ 22'\ 45''$, qui étant ajoûté à l'angle *ASI*, donne l'angle *ACI* ou *ARD* de $62^d\ 31'\ 25''$. On cherchera dans la Table des Mémoires

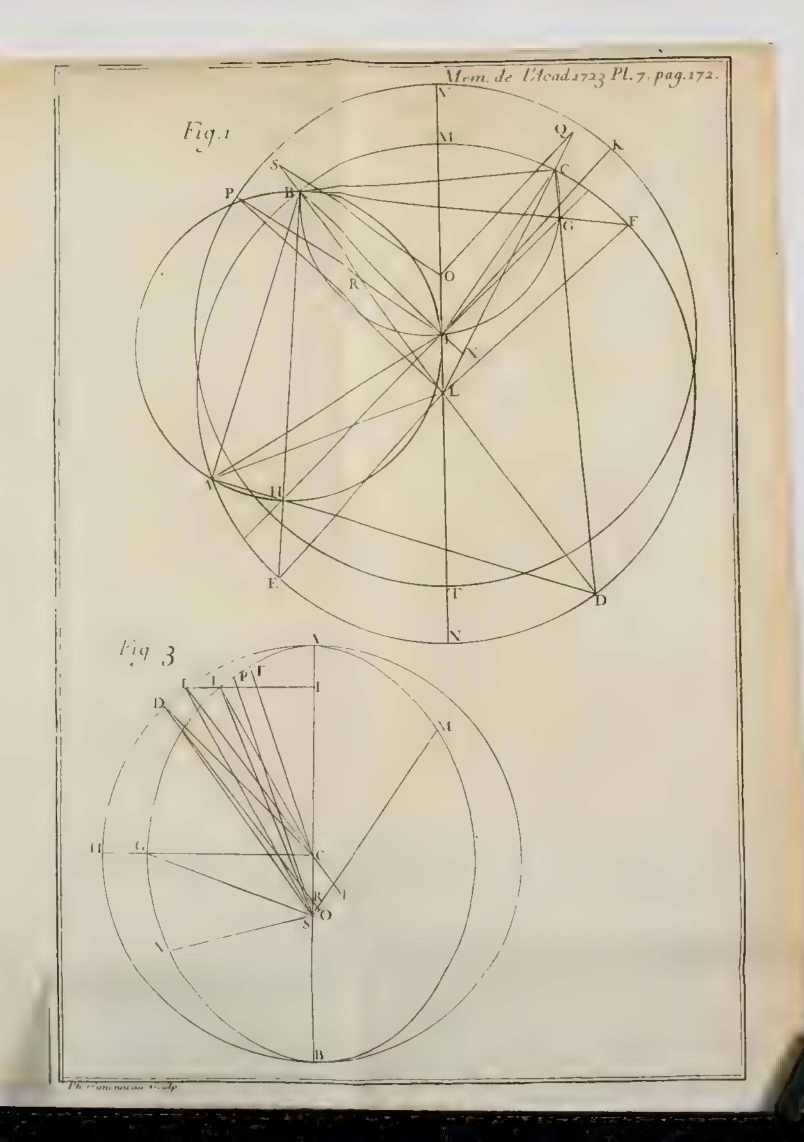
de l'Academie de 1719, p. 156 la valeur de l'angle *ODS* qui répond à l'angle *CIS* de 1ᵈ 22′ 45″; & on le trouvera d'une seconde, qui étant retranchée de l'angle *ARD* de 26ᵈ 31′ 25″, donne l'angle *ASD* de 26ᵈ 31′ 24″. On fera ensuite comme *CD* 1000000 est à *CS* 56646; ainsi le sinus de l'angle *ASD* de 26ᵈ 31′ 24″ est au sinus de l'angle *CDS* de 1ᵈ 26′ 58″, qui étant ajoûté à l'angle *ASD*, donne l'angle *ACD* qui mesure la distance moyenne de Saturne à son aphélie dans la seconde observation de 27ᵈ 58′ 22″. Retranchant de cet angle, l'angle *DCT* de 2ᵈ 35′ 56″ qui a été pris égal au double de l'angle *CDS*, on aura la distance *ACT* ou *ASP* de Saturne à son aphélie dans l'hypothese elliptique de 25ᵈ 4′ 26″, plus petite de 2′ 7″ que suivant l'hypothese de Kepler.

On trouvera par la même maniere la distance de Saturne à son aphélie dans la premiere observation de 43ᵈ 3′ 16″, plus petite de 2′ 41″ que suivant l'hypothese de Kepler, & la distance de ceste planette à son aphélie dans la troisieme observation de 110ᵈ 36′ 53″, plus grande de 1′ 59″ que suivant l'hypothese de Kepler.

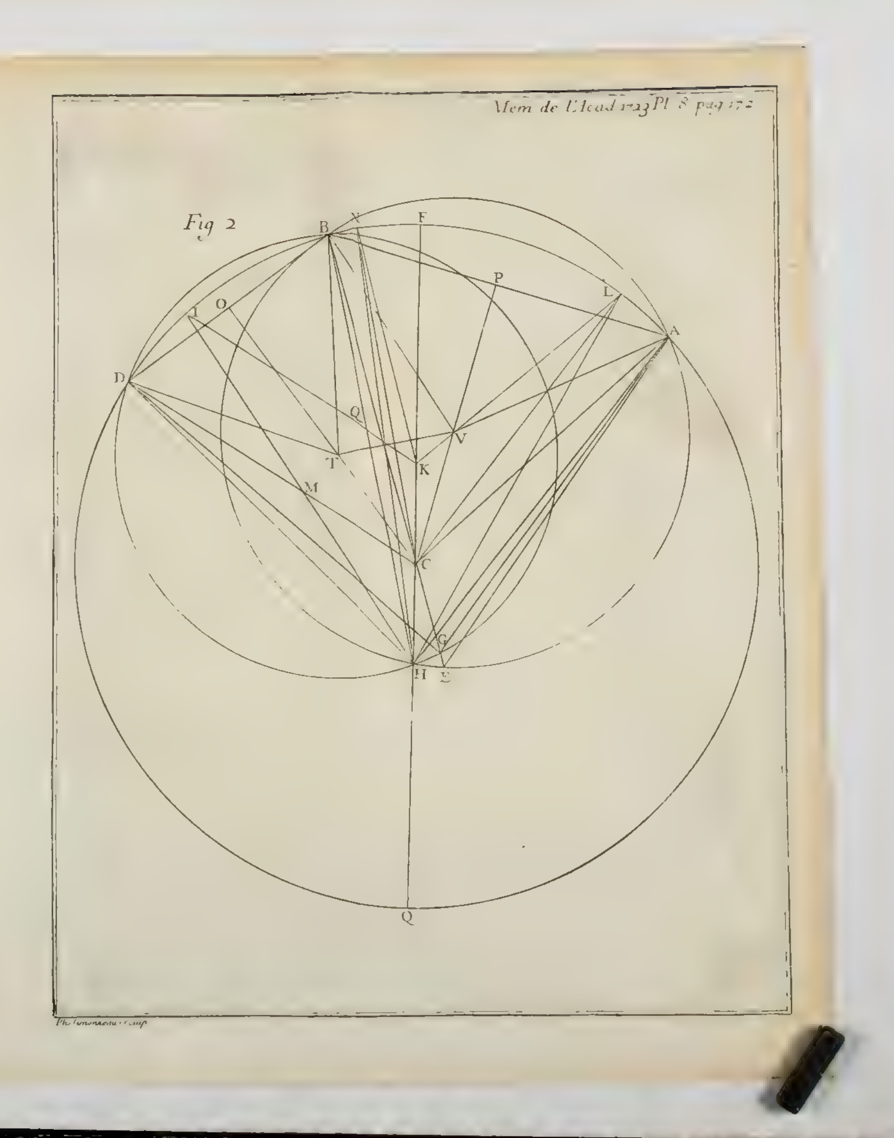
Les lieux de Saturne étant ainsi déterminés dans l'hypothese elliptique, on trouvera de la maniere qui a été enseignée par la sixieme méthode, la distance véritable de Saturne à son aphélie dans la seconde observation, suivant l'hypothese elliptique, de 25ᵈ 42′ 26″, à laquelle ajoûtant 2′ 7″, différence entre le vrai lieu de la planete suivant les deux hypotheses, on aura la distance véritable de Saturne à son aphélie, suivant l'hypothese de Kepler, de 25ᵈ 44′ 33″, qui étant retranchés du vrai lieu de la planete qui fut observé alors de 9ˢ 23ᵈ 46′ 0″, donne le vrai lieu de l'aphélie de Saturne, suivant l'hypothese de Kepler, de 8ˢ 28ᵈ 1′ 27″, plus petit de 38 minutes que si le mouvement de cette planete se fût fait suivant l'hypothese elliptique simple. On trouvera aussi l'excentricité *CS* de 57173.

Le lieu de l'aphélie de Saturne & son excentricité étant ainsi connus, on prendra la distance de cette planete à son


V
M
Q
K
C
G
F
O
R
I
X
L
T
D
N
M


Fig. 1
Fig 3


N
F
P
L
A
V
K
C
G
H
E
Q



Ph. Simonneau s. culp

aphélie, que l'on trouvera dans la premiere observation de 42^d 27' 57", dans la seconde de 25^d 44' 33", & dans la troisieme de 111^d 12' 54". On calculera ensuite, comme ci-devant, la distance de Saturne à son aphélie dans l'hypothese elliptique, que l'on trouvera dans la premiere observation de 42^d 25' 13", plus petite de 2' 44" que suivant l'hypothese de Kepler, dans la seconde observation de 25^d 42' 21", plus petite de 2' 12" que suivant l'hypothese de Kepler, & dans la troisieme observation de 111^d 14' 57"$\frac{1}{2}$, plus grande de 2' 3"$\frac{1}{2}$ que suivant l'hypothese de Kepler; ce qui ne differe que de peu de secondes de ce qui a été déterminé par le premier calcul. On cherchera ensuite par la méthode précédente la distance de Saturne à son aphélie, suivant l'hypothese elliptique que l'on trouvera dans la seconde observation de 25^d 44' 40", à laquelle ajoûtant 2' 12", différence entre le vrai lieu de la planete suivant les deux hypotheses, on aura la distance véritable de Saturne à son aphélie dans l'hypothese de Kepler de 25^d 46' 52", qui étant retranchée du vrai lieu de la planete, lequel étoit dans la seconde observation de 9^s 23^d 46' 0", donne le vrai lieu de l'aphélie de Saturne, suivant l'hypothese de Kepler, de 8^s 27^d 59' 8", plus petit de 2' 19" que par la comparaison précédente, & de 40 minutes 9 secondes que suivant l'hypothese elliptique simple. On trouvera aussi l'excentricité de Saturne de 57181, un peu plus grande que par le calcul précédent.

L'on voit par cet exemple, que la différence entre le lieu de l'aphélie qui résultoit de l'hypothese elliptique simple, & de l'hypothese de Kepler, étoit par le premier calcul de 38 minutes, & que par le second calcul on a trouvé ce lieu encore moins avancé de 2' 19", desorte que si l'on recommence ce calcul, la différence entre le vrai lieu de l'aphélie & du périhélie, suivant l'hypothese de Kepler & celui que l'on vient de déterminer, ne seroit que de quelques secondes, qui est une précision inutile dans cette recherche, puisqu'on s'estimeroit fort heureux de pouvoir en être assûré à quelques minutes près.

Cette différence de 40 minutes dans le lieu de l'aphélie & du périhélie de Saturne, déterminé ſuivant les deux hypotheſes, doit varier ſuivant les diverſes ſituations de Saturne dans ſon orbe, & on en doit trouver encore de plus grandes dans l'orbe de Mars, & principalement dans celui de Mercure, dont l'excentricité eſt beaucoup plus grande que celle des autres planetes; ce qui fait voir l'avantage que l'on peut retirer dans l'aſtronomie, d'avoir une méthode exacte & facile à pratiquer pour trouver le lieu de l'aphélie & du périhélie des planetes, ſuivant l'hypotheſe de Kepler.

E'TABLISSEMENT

D'UN NOUVEAU GENRE DE PLANTE, ſous le nom de RICINOCARPOS.

Par M. MARCHANT.

15 Juin. 1723.

LA méthode que les botaniſtes ont inventée dans le dernier ſiecle, pour établir les genres des plantes ſur leurs parties conſtantes & immuables, étant aujourd'hui reçûe comme la baſe fondamentale de la botanique, ne permet plus aux phyſiciens de donner des noms aux Plantes que par rapport à la ſtructure de leurs fleurs & de leurs fruits; & ces habiles hiſtoriens qui ont travaillé ſucceſſivement avec tant de progrès à une ſcience également utile & agréable, nous mettent en état, par leur méthode, de juger ſous quel genre doit être rangée une plante qui auroit été ci-devant inconnue, en obſervant exactement les parties qui compoſent ſa fleur & ſon fruit; ce qui nous met auſſi à portée de reconnoître, ſi dans le nombre des plantes que les Auteurs ont employées ſous un même genre, ces plantes, dis-je, appartiennent véritablement au genre ſous lequel elles ont été rangées.

Mais comme il étoit aſſez difficile que ces mêmes Botaniſtes euſſent examiné d'après nature la quantité prodigieuſe

de plantes dont ils font mention, il a fallu qu'ils s'en soient rapportés aux descriptions peu circonstanciées qui en ont été faites par les historiens qui les ont précedés, ce qui quelquefois a pû contribuer à les faire tomber dans quelques erreurs contre leur méthode même. Or comme la plante qui fait le sujet de ce mémoire, est du nombre de celles dont nous croyons que le caractere générique ne leur a pas été bien connu, nous rapporterons ici sa description amplement détaillée, en faisant remarquer les parties essentielles qui la caractérisent, & en quoi elle differe des genres où quelques Botanistes modernes l'ont employée.

La racine de cette plante *a*, se divise dès sa naissance en *Planche I.* trois ou quatre racines blanchâtres, de la grosseur de cinq à six lignes, sur environ sept à huit pouces de longueur, ridées & gercées par anneaux à leur origine, lesquelles s'étendent latéralement & jettent quantité de grosses fibres ondées, un peu situées perpendiculairement, & subdivisées en une infiniré de plus petites fibres peu chevelues qui gardent la même direction. La surface des grosses racines est une écorce spongieuse & charnue, qui couvre un corps dur & presque ligneux, sans apparence de moëlle. Toutes ces racines nous ont paru avoir quelque légere odeur aromatique.

De la racine s'éleve immédiatement une seule tige *b*, haute de deux pieds & demi ou davantage, ronde, ferme & solide, assez droite, un peu noüeuse de deux en deux pouces, laquelle s'incline diagonalement de côté & d'autre de nœud en nœud, où elle produit une grande feuille, souvent accompagnée à son aisselle d'un bouquet d'autres plus petites feuilles, en maniere de rejetton ou branche. Cette tige est couverte d'une écorce de couleur verd-grisâtre, rayée de lignes plus blanches depuis sa naissance jusques à un pied de haut, & elle est colorée de rouge-brun, & tantôt plus tantôt moins pointillée ou mouchetée de taches oblongues de couleur verd-rougeâtre dans le reste de sa hauteur. Sa base a environ un pouce de diametre; finissant tout-à-coup à quatre lignes de grosseur. La surface de cette tige est luisante, composée d'une écorce de sub-

ſtance fibreuſe & ſpongieuſe, d'une ligne d'épaiſſeur, de couleur verdâtre, ſous laquelle on trouve un autre corps plus ſolide & preſque ligneux, blanchâtre, épais de deux à trois lignes, au milieu duquel on découvre une cavité remplie de moëlle fort blanche peu compacte, & entrecoupée par des membranes feuilletées *c, c, c,* de même couleur, poſée horiſontalement le long de la cavité de la tige. Chaque nœud de cette tige produit deux appendices *d, d,* contournées en demi-cercle, dont l'une ſe jette à droite & l'autre à gauche, & qui enſemble embraſſent la circonférence de la tige, & ces appendices ſont garnies ſur leur ſurface extérieure de fibres roides *e, e, Fig. en grand,* quoique fines, douces au toucher, charnues, viſqueuſes, plus ou moins branchues à la maniere du bois de cerf, inégalement longues, & de couleur rouge-brun. Toutes ces fibres rameuſes ſont terminées par un petit bouton charnu, teint de rouge-jaunâtre, clair & tranſparent, à peu-près comme les boutons que l'on voit à l'extrémité des cornes du limaçon; ce qui nous a paru ſingulier, & que je ne ſçai point qu'on ait encore obſervé ſur aucune autre plante. Les plus grandes feuilles *f,* qui ornent la tige de cette plante, ſont ſituées vers le milieu de ſa hauteur; leur couleur en général varie aſſez, tant en deſſus qu'en deſſous. Celles-ci ſont verd-foncé en deſſus, plus clair en deſſous. Celles qui naiſſent plus haut ſont verd-rougeâtre en deſſus, moins en deſſous, & enfin celles qui occupent l'extrémité de la tige, ainſi que celles qui naiſſent par bouquets le long de la même tige, ſont quelquefois des deux côtés de couleur rouge-brun, ou de couleur verd-glacé de rouge-brun, étant toutes généralement liſſes & luiſantes, tant en leur ſurface ſupérieure qu'inférieure. Les grandes feuilles ont ſept à huit pouces de diametre, ſur cinq à ſix pouces de longueur; elles ſont profondément découpées en cinq lobes, à la maniere des feuilles de la *Staphyſagre,* mais d'une ſubſtance plus molle, larges vers le milieu, & terminées tout-à-coup en pointe un peu inclinée en embas. Beaucoup d'autres plus petites de ces feuilles ſont ſeulement découpées en 3 lobes, & chaque

Planche II.

découpure

découpure eſt garnie dans le milieu d'une groſſe fibre nerveuſe, plus ou moins rougeâtre, d'où partent quantité de petites fibres qui ſe ſubdiviſent, & tapiſſent le parenchyme de la feuille, & toutes ces fibres en général ſont beaucoup plus apparentes en-deſſous qu'en-deſſus.

Le contour des découpures des feuilles eſt légerement & inégalement dentelé en dents de ſcie, & entierement bordé d'appendices charnues très-fines, peu ou point rameuſes, reſſemblant en quelque façon à de fort petites épines, terminées par un point ou bouton charnu de couleur rougeâtre. Toutes les feuilles ſont portées par des queues de différente longueur, ſuivant la grandeur des feuilles. Ces queues ſont peu ſillonnées à leur naiſſance, & preſque rondes en-deſſus & en-deſſous, garnies de bouquets d'appendices plus branchues que celles qui bordent les découpures des feuilles, approchant davantage des bouquets qui ſont attachés aux appendices des nœuds de la tige, & ces bouquets-ci ſont ſitués régulierement & alternativement le long de la ſurface ſupérieure de la queue de la feuille ſur deux lignes preſque parallelles.

La tige de cette plante ſe termine tout-à-coup en deux ou trois petites branches droites, hautes de trois à quatre pouces, groſſes d'environ deux lignes, liſſes & luiſantes, de couleur rouge-brun, chacune terminée par quatre à cinq bouquets de fleurs, rangés alternativement, & qui, par leur port & arrangement, tiennent le milieu entre les fleurs en umbelle & les fleurs en épi.

Chaque bouquet porte huit à dix fleurs, chacune ſoûtenue par un pédicule fort court, terminé par un calice d'une ſeule piece *g*, *g*, charnu, découpé en cinq pointes aiguës, de couleur rouge-brun verdâtre, garnies par les bords d'appendices de la même ſubſtance que celles qui ſont ſur les autres parties de la plante, mais ſimples & très-courtes, paroiſſant ſeulement comme des points aux bords des découpures du calice.

De ce calice ſort une fleur en roſe *h*, de trois à quatre lignes de diametre, compoſée de cinq pétales *i* charnus, ob-

longs, terminés en pointe obtuſe, de couleur rouge-brun en-dedans & en-dehors, plus étroits à leur naiſſance, & garnis d'un onglet jaune verdâtre. Le milieu de la fleur eſt occupé par une capſule *l* verd-blanchâtre, de la groſſeur d'un pois, ſurmontée d'un piſtil *m* rougeâtre, diviſé en trois branches fourchues, terminées par de petites têtes jaunes. Cinq étamines *n* blanches, chargées de ſommets rouge-brun mêlé de jaune, ſortent de la baſe de chaque pétale & environnent la capſule. La fleur étant paſſée, la capſule groſſit & devient un fruit cylindrique *o* triangulaire, arrondi par les coins, fort ſemblable à celui du *ricinus*, & qui étant mûr, eſt environ de la groſſeur d'une noiſette, couvert d'une écorce ou enveloppe *p* brune en-dehors, cartilagineuſe, gercée & griſâtre en-dedans. Ce fruit étant parfaitement mur & ſec, ſe diviſe en trois loges ou cavités *q*, dures & preſque ligneuſes, de couleur gris fauve, liſſes en-dedans, leſquelles contiennent chacune une graine oblongue *r*, un peu applatie d'un côté, relevée & convexe de l'autre, couverte d'une écorce ſeche & cartilagineuſe, auſſi de couleur gris fauve, mais très-légérement pointillée de taches brunes, & ces graines ont à une de leurs extrémités un mammelon rouſſâtre en forme de petite tête *ſ*, cette écorce contient une amande fort blanche, dont elle ne ſe ſépare point. Au milieu du fruit eſt une membrane griſâtre triangulaire *t* fort mince, attachée par ſa baſe au pédicule de la fleur, laquelle membrane ſépare chaque loge, & c'eſt cette partie que M. Tournefort appelle *poinçon* ou *axe* dans le fruit du *ricinus*. La graine de cette plante produit d'abord deux feuilles diſſimilaires *u* ovales, ainſi que fait le *ricinus*, puis une troiſieme feuille ſemblable aux deux précédentes, à la réſerve qu'elle eſt un peu plus grande, plus allongée & bordée d'appendices charnues extrèmement fines, ainſi que les autres feuilles dont nous avons ci-devant parlé. Cette plante eſt fort aqueuſe, & jette pluſieurs gouttes d'eau clair lympide, toutes les fois qu'on en détache quelque feuille.

Les premieres feuilles qui naiſſent au bas de la tige, ſe

deſſechent & tombent ordinairement quand la plante entre en fleur. Toutes les parties de cette plante ont une ſaveur piquante, qui échauffe conſidérablement la bouche, mais particulierement la graine.

Cette plante nous eſt venue de la Guadeloupe par graines. Elle fleurit ici au mois d'Août, & veut être ſemée au Printemps ſur couche, & quoique nous l'ayons bien expoſée au chaud, elle ne nous a point produit de bonnes graines juſques à préſent, & s'eſt toûjours deſſéchée, & a péri à la fin de l'Automne.

On ne ſçait point qu'on faſſe uſage de cette plante en Medecine, mais ſa ſaveur & la reſſemblance de ſon fruit avec celui du *ricinus*, doivent faire croire qu'elle a la même qualité émétique que le *ricinus*.

Par l'examen du caractere générique de la plante dont nous venons de lire la deſcription à la Compagnie, il eſt évident qu'elle ne peut être rangée ſous le genre du *ricinus*, qui, ſuivant le rapport des Botaniſtes modernes, porte des fleurs à étamines, ſéparées & éloignées du fruit ſur le même pied. Nous ne voyons pas non plus que notre plante puiſſe être du genre du *ricinoïdes*, parce que le *ricinoïdes*, ſuivant les mêmes Hiſtoriens, donne des fleurs polypétales, auxquelles le fruit ne ſuccede point, mais que le fruit naît ſéparément en d'autres endroits de la plante, non pas comme ils le diſent, indépendamment des fleurs; mais, au contraire, ainſi que l'a fort bien remarqué M. Niſſolle, ayant obſervé ſur le *ricinoïdes* de deux ſortes de fleurs, les unes polypétales qui ſont ſtériles, & les autres à étamines qui ſont fertiles, où véritablement naît le fruit. Or comme notre plante porte une fleur à cinq pétales, d'où le fruit ſort immédiatement, & que par conſéquent elle eſt d'un caractere différent de celui du *ricinus*, & de celui du *ricinoïdes*; nous conclurrons donc, par les raiſons ſuſdites, que notre plante doit faire un genre particulier, ce qui nous engage de la nommer *ricinocarpos Americanus, floribus pentapetalis*, comme qui diroit, plante de l'Amérique, qui a le fruit ſemblable à celui du *ricinus* & la

Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences, an. 1712. *p.* 337.

fleur à cinq pétales, auquel effectivement le fruit de notre plante a une très-grande ressemblance, non-seulement par sa structure, mais aussi par les graines qu'il contient.

EXPLICATION DES FIGURES
qui représentent les différentes parties du ricinocarpos.

PREMIERE PLANCHE.

La plante réduite en petit.

a, la racine.
b, la tige.
u, la germination avec ses feuilles dissimilaires, en petit.

SECONDE PLANCHE.

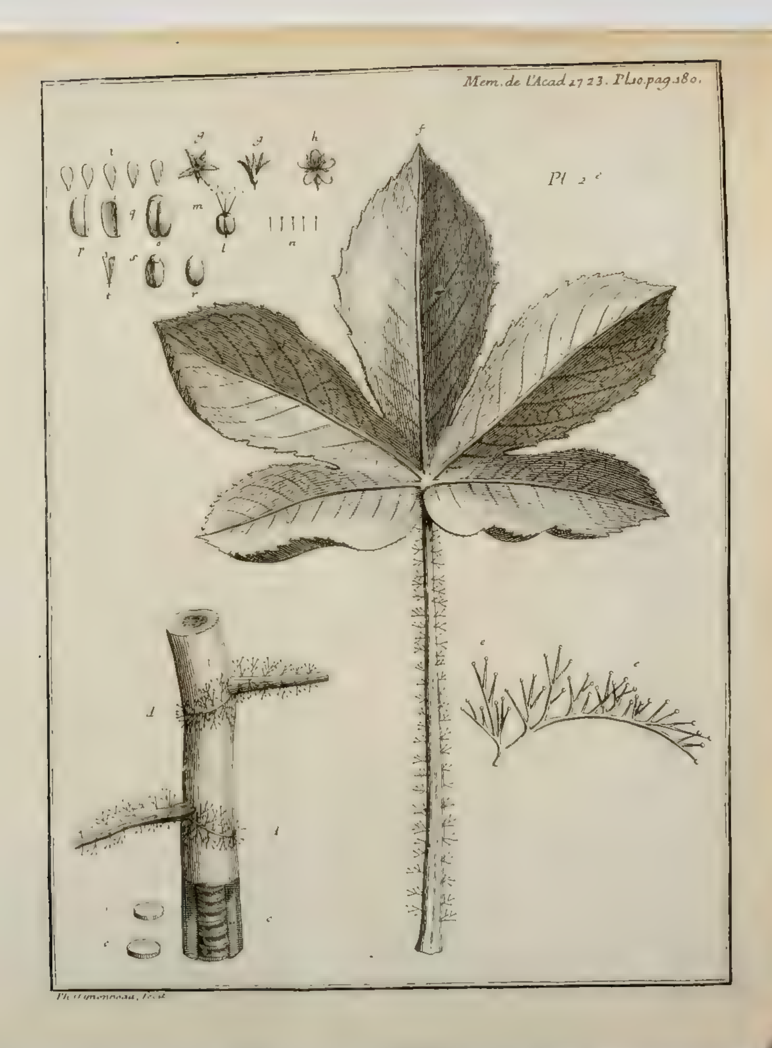
c c c, Membranes feuilletées.
d d, Appendices contournées en demi-cercle.
e e, Fibres rameuses en grand, posées sur une appendice.
f, Une des grandes feuilles au naturel.
g g, Calice de grandeur naturelle, & les figures suivantes.
h, Fleur.
i, Pétales.
l, Capsule.
m, Pistil.
n, Étamines.
o, Fruit triangulaire.
p, Écorce ou envelope du fruit.
q, Loge du fruit où est contenue la graine.
r, Graine.
s, Mammelon de la graine.
t, Membrane triangulaire située au milieu du fruit.



Ricinocarpos Americanus floribus Pentapetalis.


Pl. 1re
a
u
b
Ricinocarpos Americanus
floribus Pentapetalis
Ph. Simonneau fecit


h
f
Pl. 2.e
e
e


Pl 2
f
g
g
h
i
m
q
n
l
r
s
t
e
e
d
d
c
c
Ph. Simonneau, fecit

SECONDE SECTION DE LA SECONDE PARTIE DU CALCUL DES DIFFERENCES FINIES,

Où l'on traite des grandeurs exprimées par des fractions.

Par M. NICOLE.

ON se propose de donner dans cette Section une théorie générale des suites, dont chaque terme est exprimé par une fraction composée de tant de facteurs qu'on voudra, augmentant selon une loi quelconque. 30 Juin 1723.

PROPOSITION I.

Trouver la différence d'une grandeur algébrique fractionnaire, dont le dénominateur n'est composé que d'un facteur, quelle que soit l'augmentation qui doit arriver à ce facteur.

Soit cette expression algébrique $\frac{1}{z}$, dont on demande la différence, l'augmentation qui doit arriver à ce facteur étant n, $2n$, $3n$, $4n$, $5n$, $6n$, ou enfin m.

1°. Si l'augmentation est n, cette expression deviendra $\frac{1}{z+n}$, la différence demandée est donc $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+n}$, qui étant mise à même dénomination, devient $\frac{1.n}{z.z+n}$.

2°. Si l'augmentation est $2n$, la différence demandée sera $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2n} = \frac{2n}{z.z+2n}$. Si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par $z+n$, qui est le facteur qui manque au dénominateur, pour que tous ses fac-

teurs soient consécutifs, on aura $\frac{2n.z+n}{z.z+n.z+2n}$, qui se réduit, en décomposant, à $\frac{2n}{z+n.z+2n} + \frac{2.nn}{z\ldots z+2n}$.

3°. Si l'augmentation est $3n$, la différence demandée sera $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+3n} = \frac{3n}{z.z+3n}$, & en multipliant par $z+n$, $z+2n$, qui sont les facteurs qui manquent au dénominateur, pour que tous ses facteurs soient consécutifs, il viendra $\frac{3n.z+n.z+2n}{z\ldots z+3n}$, qui par la décomposition se réduit à $\frac{3.n}{z+2n.z+3n} + \frac{3n.2n}{z+n\ldots z+3n} + \frac{3n.2n.n}{z\ldots z+3n}$.

4°. Si l'augmentation est $4n$, on aura $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+4n}$ pour la différence demandée, qui se réduit à $\frac{4n}{z.z+4n}$ $= \frac{4n.z+n.z+2n.z+3n}{z\ldots z+4n} = \frac{4n}{z+3n.z+4n} + \frac{4n.3n}{z+2n\ldots z+4n}$ $+ \frac{4n.3n.2n}{z+n\ldots z+4n} + \frac{4n.3n.2n.n}{z\ldots z+4n}$.

5°. Si l'augmentarion est $5n$, on aura $\frac{5n}{z.z+5n}$ pour la différence cherchée, qui devient par la multiplication $\frac{5n.z+n.z+2n.z+3n.z+4n}{z\ldots z+5n}$, & se décompose en $\frac{5n}{z+4n.z+5n}$ $+ \frac{5n.4n}{z+3n..z+5n} + \frac{5n.4n.3n}{z+2n\ldots z+5n} + \frac{5n.4n.3n.2n}{z+n..z+5n}$ $+ \frac{5n.4n.3n.2n.n}{z\ldots z+5n}$.

COROLLAIRE.

Il est donc évident que la différence cherchée est

$\frac{1.n}{z.z+n}$ ... lorsque l'augmentation est ....

$\frac{2n}{z+n.z+2n} + \frac{1.2.nn}{z\ldots z+2n}$ 2

$\frac{3n}{z+2n.z+3n} + \frac{3.2nn}{z+n..z+3n} + \frac{1.2.3n^3}{z\ldots z+3n}$ 3

$\frac{4.n}{z+3n.z+4n} + \frac{6.2nn}{z+2n..z+4n} + \frac{4.2.3n^3}{z+n\ldots z+4n} + \frac{1.2.3.4n^4}{z\ldots z+4n}$ 4

$\frac{5n}{z+4n.z+5n} + \frac{10.2nn}{z+3n..z+5n} + \frac{10.2.3n^3}{z+2n..z+5n} + \frac{5.2.3.4n^4}{z+n..z+5n} + \frac{1.2.3.4.5n^5}{z\ldots z+5n}$ 5

Si l'on examine ces ſuites, on verra, 1°. qu'elles contiennent autant de termes que l'augmentation contient de fois n. 2°. Que les numérateurs de ces termes ſont compoſés des coëfficiens de la puiſſance d'un binôme, laquelle puiſſance eſt indiquée par l'augmentation, en obſervant de retrancher le premier coëfficient de chacune de ces puiſſances. 3°. Que les coëfficiens reſtans ſont chacun multipliés par le terme correſpondant de cette ſuite $1 . n$, $1 . n . 2n$, $1 . n . 2n, 3n$, $1 . n . 2n . 3n . 4n$, $1 . n . 2n . 3n . 4n . 5n$, &c. 4°. Que les dénominateurs de chacun de ces termes ſont tels, que le dernier terme a autant de facteurs $z . z+n . z+2n . z+3n . z+4n$, &c. plus un, que l'augmentation contient de fois n: que le pénultieme a tous les facteurs du dernier, excepté le premier facteur; que l'antépénultieme a tous les facteurs du précédent, excepté le premier, & ainſi de ſuite.

D'où il ſuit que ſi l'on nomme m l'augmentation, on aura cette ſuite $\frac{m}{z+m-n . z+m} + \frac{m . m-n}{z+m-2n \ldots z+m} + \frac{m . m-n . m-2n}{z+m-3n \ldots z+m} + \frac{m . m-n . m-2n . m-3n}{z+m-4n \ldots z+m} + \frac{m . m-n . m-2n . m-3n . m-4n}{z+m-5n \ldots z+m} + \text{\&c.} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+m}$ pour la différence d'une fraction dont le dénominateur n'eſt compoſé que d'un facteur, l'augmentation qui doit arriver à ce facteur étant m.

PROPOSITION II.

Trouver la différence d'une fraction $\frac{1}{z . z+n}$, dont le dénominateur eſt compoſé de deux facteurs, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant n, $2n . 3n . 4n . 5n . 6n$, ou enfin m.

1°. Si l'augmentation eſt n, cette expreſſion deviendra $\frac{1}{z+n . z+2n}$, la différence de l'une à l'autre eſt donc $\frac{1}{z . z+n} - \frac{1}{z+n . z+2n}$, qui ſe réduit, en mettant à même dénomination, à $\frac{2n}{z \ldots z+2n}$.

2°. Si l'augmentation eſt $2n$, la différence demandée ſera

$\frac{1}{z.\overline{z+n}} - \frac{1}{\overline{z+2n}.\overline{z+3n}}$, qui étant mis à même dénomination, devient $\frac{\overline{z+2n}.\overline{z+3n} - z.\overline{z+n}}{z\ldots\overline{z+3n}}$, qui ſe réduit par la premiere ſection à $\frac{2.2n.\overline{z+n}+n.2n}{z\ldots\overline{z+3n}} = \frac{4n}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+3n}}$ $+ \frac{6nn}{z\ldots\overline{z+3n}}$.

3°. Si l'augmentation eſt $3n$, l'expreſſion $\frac{1}{z.\overline{z+n}}$ deviendra par cette augmentation $\frac{1}{\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}$, la différence de l'une à l'autre eſt donc $\frac{\overline{z+3n}.\overline{z+4n} - z.\overline{z+n}}{z.\overline{z+n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}$, qui ſe réduit par la premiere ſection à $\frac{2.3n.\overline{z+n}+2n.3n}{z.\overline{z+n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}$. Si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par le facteur qui manque dans le dénominateur, pour que tous ſes facteurs ſoient conſécutifs, il viendra $\frac{2.3n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}+2n.3n.\overline{z+2n}}{z.\overline{z+n}\ldots\overline{z+4n}}$. Le premier terme du numérateur ſe réduit par la décompoſition à $\frac{2.3n}{\overline{z+2n}\ldots\overline{z+4n}}$ $+ \frac{2.3n.2n}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+4n}} + \frac{2.3n.2n.n}{z\ldots\overline{z+4n}}$. Le ſecond terme ſe réduit auſſi à $\frac{2n.3n}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+4n}} + \frac{2n.3n.2n}{z\ldots\overline{z+4n}}$. La différence demandée eſt donc $\frac{6n}{\overline{z+2n}\ldots\overline{z+4n}} + \frac{18n^2}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+4n}} + \frac{24n^3}{z\ldots\overline{z+4n}}$.

4°. Si l'augmentation eſt $4n$, l'expreſſion $\frac{1}{z.\overline{z+n}}$ deviendra par cette augmentation $\frac{1}{\overline{z+4n}.\overline{z+5n}}$, la différence de ces deux quantités eſt donc $\frac{\overline{z+4n}.\overline{z+5n} - z.\overline{z+n}}{z.\overline{z+n}.\overline{z+4n}.\overline{z+5n}}$, qui ſe réduit par la premiere ſection à $\frac{2.4n.\overline{z+n}+3n.4n}{z.\overline{z+n}.\overline{z+4n}.\overline{z+5n}}$, & en multipliant le numérateur & le dénominateur par les facteurs $z+2n$, $z+3n$ qui manque au dénominateur pour que

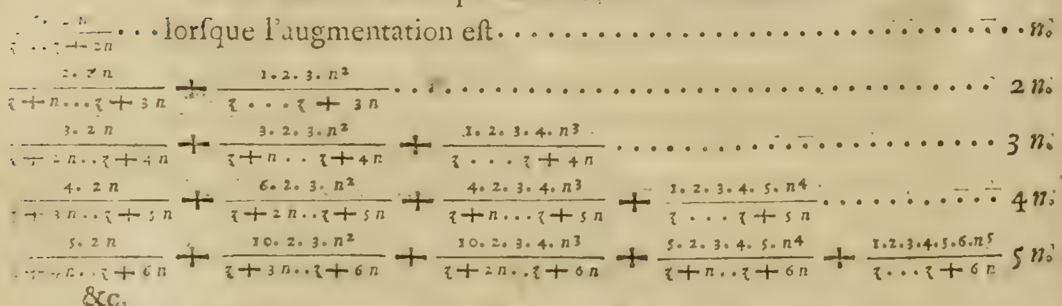
que tous ſes facteurs ſoient conſécutifs, il viendra $\frac{2.4n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}+3n.4n.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}}{z\ldots z+5n}$. Le premier terme ſe réduit par la décompoſition à $\frac{2.4n}{z+3n..z+5n}+\frac{2.4n.3n}{z+2n..z+5n}+\frac{2.4n.3n.2n}{z+n\ldots z+5n}+\frac{2.4n.3n.2n.n.}{z\ldots z+5n}$. Le ſecond terme qui vaut $\frac{3n.4n.\overline{z+n}.\overline{z+3n}}{z\ldots z+5n}(A)+\frac{3n.4n.n.\overline{z+3n}}{z\ldots\ldots z+5n}(B)$ ſe réduit de même à $\frac{3n.4n}{z+2n\ldots z+5n}+\frac{3n.4n.3n}{z+n\ldots z+5n}+\frac{3n.4n.3n.n}{z..z+5n}=A$, $\frac{3n.4n.n}{z+n\ldots z+5n}+\frac{3n.4n.n.3n}{z\ldots z+5n}=B$. Si donc l'on raſſemble toutes ces parties, on aura $\frac{8n}{z+3n\ldots z+5n}+\frac{36nn}{z+2n\ldots z+5n}+\frac{96n^3}{z+n\ldots z+5n}+\frac{120n^4}{z\ldots z+5n}$.

5°. Si l'augmentation eſt $5n$, l'expreſſion $\frac{1}{z.z+n}$ deviendra par cette augmentation $\frac{1}{z+5n.z+6n}$, la différence de l'une à l'autre eſt donc $\frac{\overline{z+5n}.\overline{z+6n}-z.\overline{z+n}}{z.\overline{z+n}.\overline{z+5n}.\overline{z+6n}}$, qui ſe réduit par la premiere ſection à $\frac{2.5n.\overline{z+n}+4n.5n}{z.\overline{z+n}.\overline{z+5n}.\overline{z+6n}}$, & en multipliant le numérateur & le dénominateur de cette fraction par $\overline{z+2n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}$, qui ſont les facteurs qui manquent au dénominateur pour qu'ils ſoient conſécutifs, on aura $\frac{2.5n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}{z\ldots\ldots z+6n}+\frac{4n.5n.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}{z\ldots z+6n}$, en décompoſant le premier terme, il vient $\frac{2.5n}{z+4n\ldots z+6n}+\frac{2.5n.4n}{z+3n\ldots z+6n}+\frac{2.5n.4n.3n}{z+2n\ldots z+6n}+\frac{2.5n.4n.3n.2n}{z+n\ldots z+6n}+\frac{2.5n.4n.3n.2n.n}{z\ldots z+6n}$. Le ſecond terme ſe réduit à $\frac{4n.5n.\overline{z+n+n}.\overline{z+2n+n}.\overline{z+4n}}{z\ldots z+6n}=\frac{4n.5n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+4n}}{z\ldots z+6n}(A)+\frac{4n.5n.2n.\overline{z+n}.\overline{z+4n}}{z\ldots z+6n}(B)+\frac{4n.5n.2n.n.\overline{z+4n}}{z\ldots z+6n}(C)$ qui

par la décomposition, deviennent $\frac{4n.5n}{z+3n\ldots z+6n}$ + $\frac{4n.5n.4n}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{4n.5n.4n.2n}{z+n\ldots z+6n} + \frac{4n.5n.4n.2n.n}{z\ldots z+6n} = A$, $\frac{4n.5n.2n}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{4n.5n.2n.4n}{z+n\ldots z+6n} + \frac{4n.5n.2n.4n.n}{z\ldots z+6n} = B$, $\frac{4n.5n.2nn}{z+n\ldots z+6n} + \frac{4n.5n.2nn.4n}{z\ldots z+6n} = C$. Si l'on rassemble toutes ces parties, on aura $\frac{10n}{z+4n\ldots z+6n} + \frac{60nn}{z+3n\ldots z+6n} + \frac{240n^3}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{600n^4}{z+n\ldots z+6n} + \frac{720n^5}{z\ldots z+6n}$ pour la différence cherchée.

COROLLAIRE.

Il est donc évident que la différence cherchée est



$\frac{1.2n}{z\ldots z+2n}$ ... lorsque l'augmentation est ... n.

$\frac{2.2n}{z+n\ldots z+3n} + \frac{1.2.3.n^2}{z\ldots z+3n}$ ... $2n$.

$\frac{3.2n}{z+2n\ldots z+4n} + \frac{3.2.3.n^2}{z+n\ldots z+4n} + \frac{1.2.3.4.n^3}{z\ldots z+4n}$ ... $3n$.

$\frac{4.2n}{z+3n\ldots z+5n} + \frac{6.2.3.n^2}{z+2n\ldots z+5n} + \frac{4.2.3.4.n^3}{z+n\ldots z+5n} + \frac{1.2.3.4.5.n^4}{z\ldots z+5n}$ ... $4n$.

$\frac{5.2n}{z+4n\ldots z+6n} + \frac{10.2.3.n^2}{z+3n\ldots z+6n} + \frac{10.2.3.4.n^3}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{5.2.3.4.5.n^4}{z+n\ldots z+6n} + \frac{1.2.3.4.5.6.n^5}{z\ldots z+6n}$ $5n$.

&c.

Si l'on examine tous ces termes & leurs coëfficiens, lesquels sont marqués par le premier chiffre de chaque terme, on verra que ces coëfficiens sont ceux des puissances d'un binome, excepté le premier terme; c'est-à-dire, par exemple, que lorsque l'augmentation est $3n$, la différence cherchée est composée de trois termes, & que les premiers chiffres de chacun de ces trois termes sont les coëfficiens du binome élevé au cube, & ainsi des autres.

D'où il suit que si l'on nomme m l'augmentation que chaque facteur doit recevoir, on aura cette suite

$$\frac{2.m}{z+m-n.z+m.z+m+n} + \frac{m.\overline{m-n}.3}{z+m-2n\ldots z+m+n}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.4}{\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-2n}.5}{\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6}{\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m+n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.\overline{m-5n}.7}{\overline{z+m-6n}\ldots\overline{z+m+n}}$$

$+$ &c. $=\frac{1}{z.\overline{z+n}}-\frac{1}{\overline{z+m}.\overline{z+n+m}}$ pour la différence d'une fraction dont le dénominateur est composé de deux facteurs, lesquels doivent augmenter de la grandeur m.

Cette suite sera composée d'autant de termes que la grandeur m contiendra de fois la grandeur n.

PROPOSITION III.

Trouver la différence d'une grandeur algébrique fractionnaire, dont le dénominateur est composé de trois facteurs, quelle que soit l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur.

Soit cette expression algébrique $\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}$ dont on demande la différence, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant n. $2n$. $3n$. $4n$. $5n$. $6n$. ou enfin m.

1°. Si l'augmentation est n, cette expression deviendra $\frac{1}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}}$, la différence de l'une à l'autre est donc

$$\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}-\frac{1}{\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}}=\frac{3n}{z\ldots\overline{z+3n}}.$$

2°. Si l'augmentation est $2n$, la différence demandée sera

$$\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}-\frac{1}{\overline{z+2n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}=\frac{\overline{z+3n}.\overline{z+4n}-z.\overline{z+n}}{z\ldots\ldots\overline{z+4n}}$$

qui se réduit par la premiere section à $\frac{2.3n.\overline{z+n}+2n.3n}{z\ldots\ldots\overline{z+4n}}$, & en décomposant à $\frac{2.3n}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+4n}}+\frac{2.3n.n}{z\ldots\overline{z+4n}}+\frac{2n.3n}{z\ldots\overline{z+4n}}$

$$=\frac{6n}{\overline{z+n}\ldots\overline{z+4n}}+\frac{12n^2}{z\ldots\overline{z+4n}}.$$

3°. Si l'augmentation est $3n$, la différence demandée sera

$$\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}-\frac{1}{\overline{z+3n}.\overline{z+4n}.\overline{z+5n}}=\frac{\overline{z+3n}.\overline{z+4n}.\overline{z+5n}-z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}{z\ldots\ldots\overline{z+5n}}$$

$$=\frac{3.3n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}+3.2n.3n.\overline{z+n}+1.2n.3n.4n}{z\ldots\ldots\overline{z+5n}}.$$ Le premier

terme se réduit, en décomposant, à $\frac{3.3n}{z+2n\ldots z+5n}$ $+ \frac{3.3n.2n}{z+n\ldots z+5n} + \frac{3.3n.2n.n}{z\ldots z+5n}$. Le second à $\frac{3.2n.3n}{z+2n\ldots z+5n}$ $+ \frac{3.2n.3n.n}{z\ldots z+5n}$. La différence cherchée est donc $\frac{9n}{z+2n\ldots z+5n}$ $+ \frac{36n^2}{z+n\ldots z+5n} + \frac{60n^3}{z\ldots z+5n}$.

4°. Si l'augmentation est $4n$, la différence demandée sera $\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}} - \frac{1}{\overline{z+4n}.\overline{z+5n}.\overline{z+6n}}$ $= \frac{3.4n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}+3.3n.4n.\overline{z+n}+3n.4n.5n}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+4n}.\overline{z+5n}.\overline{z+6n}}$. Si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur par $\overline{z+3n}$, qui est le facteur qui manque au dénominateur, pour que tous ses facteurs soient consécutifs, on aura

$$\frac{3.4n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}+3.3n.4n.\overline{z+n}.\overline{z+3n}+3n.4n.5n.\overline{z+3n}}{z\ldots z+6n}$$

Le premier terme se réduit par la décomposition à $\frac{3.4n}{z+3n\ldots z+6n}$ $\frac{3.4n.3n}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{3.4n.3n.2n}{z+n\ldots z+6n} + \frac{3.4n.3n.2n.n}{z\ldots z+6n}$. Le second à $\frac{3.3n.4n}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{3.3n.4n.3n}{z+n\ldots z+6n} + \frac{3.3n.4n.3n.n}{z\ldots z+6n}$. Le troisieme à $\frac{3n.4n.5n}{z+2n\ldots z+6n} + \frac{3n.4n.5n.3n}{z\ldots z+6n}$. La différence cherchée est donc $\frac{12n}{z+3n\ldots z+6n} + \frac{72n^2}{z+2n\ldots z+6n}$ $+ \frac{240n^3}{z+n\ldots z+6n} + \frac{360n^4}{z\ldots z+6n}$.

5°. Si l'augmentation est $5n$, la différence demandée sera $\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}} - \frac{1}{\overline{z+5n}.\overline{z+6n}.\overline{z+7n}}$ $= \frac{3.5n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}+3.4n.5n.\overline{z+n}+4n.5n.6n}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+5n}.\overline{z+6n}.\overline{z+7n}}$, & en multipliant le numérateur & le dénominateur par $\overline{z+3n}.\overline{z+4n}$, qui sont les facteurs qui manquent au dénominateur, pour que tous ses facteurs soient consécutifs, on aura

$$\frac{3.5n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}+3.4n.5n.\overline{z+n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}+4n.5n.6n.\overline{z+3n}.\overline{z+4}}{z\ldots z+7n}$$

Le premier terme se réduit à $\frac{3.5n}{z+4n \ldots z+7n} + \frac{3.5n.4n}{z+3n \ldots z+7n} + \frac{3.5n.4n.3n}{z+2n \ldots z+7n} + \frac{3.5n.4n.3n.2n}{z+n \ldots z+7n} + \frac{3.5n.4n.3n.2n.n}{z \ldots z+7n}$.

Le second se réduit à $\frac{3.4n.5n.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+4n}}{z \ldots z+7n}$ (A) $+ \frac{3.4n.5n.n.\overline{z+n}.\overline{z+4n}}{z \ldots z+7n}$ (B), dont la décomposition donne $A = \frac{3.4n.5n}{z+3n \ldots z+7n} + \frac{3.4n.5n.4n}{z+2n \ldots z+3n} + \frac{3.4n.5n.4n.2n}{z+n \ldots z+7n} + \frac{3.4n.5n.4n.2n.n}{z \ldots z+7n}$, & $B = \frac{3.4n.5n.n}{z+2n \ldots z+7n} + \frac{3.4n.5n.n.4n}{z+n \ldots z+7n} + \frac{3.4n.5n.n.4n.n}{z \ldots z+7n}$. Le troisieme terme se réduit à $\frac{4n.5n.6n.\overline{z+n}.\overline{z+4n}}{z \ldots z+7n}$ (C) $+ \frac{4n.5n.6n.2n.\overline{z+4n}}{z \ldots z+7n}$ (D), dont la décomposition donne $C = \frac{4n.5n.6n}{z+2n \ldots z+7n} + \frac{4n.5n.6n.4n}{z+n \ldots z+7n} + \frac{4n.5n.6n.4n.n}{z \ldots z+7n}$, & $D = \frac{4n.5n.6n.2n}{z+n \ldots z+7n} + \frac{4n.5n.6n.2n.4n}{z \ldots z+7n}$.

Si donc on rassemble toutes ces parties, on aura

$$\frac{15n}{z+4n \ldots z+7n} + \frac{120n^2}{z+3n \ldots z+7n} + \frac{600n^3}{z+2n \ldots z+7n} + \frac{1800n^4}{z+n \ldots z+7n} + \frac{2520n^5}{z \ldots z+7n}$$

pour la différence cherchée.

6°. Si l'augmentation est $6n$, on trouvera en suivant la même méthode

$$\frac{18n}{z+5n \ldots z+8n} + \frac{180n^2}{z+4n \ldots z+8n} + \frac{1200n^3}{z+3n \ldots z+8n} + \frac{5400n^4}{z+2n \ldots z+8n} + \frac{15120n^5}{z+n \ldots z+8n} + \frac{20160n^6}{z \ldots z+8n}$$

pour la différence demandée.

COROLLAIRE.

Il est donc évident que la différence d'une fraction dont le dénominateur est composé de trois facteurs est

$\frac{1.3.n}{z \ldots z+3n}$ .... lorsque l'augmentation est .... n.

$\frac{2.3.n}{z+n \ldots z+4n} + \frac{1.3.4.n^2}{z \ldots z+4n}$ .... $2n$.

$\frac{3.3.n}{z+2n \ldots z+5n} + \frac{3.3.4.n^2}{3+n \ldots z+5n} + \frac{1.3.4.5.n^3}{z \ldots z+5n}$ .... $3n$.

$\frac{4.3.n}{z+3n \ldots z+6n} + \frac{6.3.4.n^2}{z+2n \ldots z+6n} + \frac{4.3.4.5.n^3}{z+n \ldots z+6n} + \frac{1.3.4.5.6.n^4}{z \ldots z+6n}$ .... $4n$.

$\frac{5.3.n}{z+4n \ldots z+7n} + \frac{10.3.4.n^2}{z+3n \ldots z+7n} + \frac{10.3.4.5.n^3}{z+2n \ldots z+7n} + \frac{5.3.4.5.6.n^4}{z+n \ldots z+7n} + \frac{1.3.4.5.6.7.n^5}{z \ldots z+7n}$ $5n$.

Si l'on examine tous ces termes, & leurs coëfficiens qui sont représentés par le premier chiffre de chaque terme, on verra que la différence d'une fraction composée de trois facteurs, sera composée d'autant de termes, que l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur contient de fois n, & que les coëfficiens de ces termes sont ceux du binome élevé à une puissance égale à l'augmentation que doit recevoir chaque facteur, en observant de retrancher le premier coëfficient de cette puissance.

D'où il suit, que si l'on veut que l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur soit m, on aura cette suite

$$\frac{m.3}{\overline{z+m-n}\ldots\overline{z+m+2n}} + \frac{m.\overline{m-n}.3.4}{2.\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m+2n}}$$
$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.4.5}{2.\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+2n}} + \frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.5.6}{2.\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+2n}}$$
$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6.7}{2.\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m+2n}} + \&c. = \frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}}$$
$$-\frac{1}{\overline{z+m}.\overline{z+n+m}.\overline{z+2n+m}}$$ pour la différence cherchée.

Si l'on cherche par la même méthode, la différence d'une fraction, dont le dénominateur soit composé de quatre facteurs, & l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur soit m, on trouvera cette suite

$$\frac{m.4}{\overline{z+m-n}\ldots\overline{z+m+3n}} + \frac{m.\overline{m-n}.4.5}{2.\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m+3m}}$$
$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.4.5.6}{2.3.\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+3n}} + \frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.5.6.7}{2.3.\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+3n}}$$
$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6.7.8}{2.3.\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m+3n}} + \&c. = \frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}}$$
$$-\frac{1}{\overline{z+m}.\overline{z+n+m}.\overline{z+2n+m}.\overline{z+3n+m}}.$$

Si l'on cherche la différence d'une fraction dont le dénominateur soit composé de cinq facteurs, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant m, on trouvera cette suite

$$\frac{m.5}{\overline{z+m-n}\ldots\overline{z+m+4n}} + \frac{m.\overline{m-n}.5.6}{2.\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m+4n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.5.6.7}{2.3.\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+4n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.5.6.7.8}{2.3.4.\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+4n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6.7.8.9}{2.3.4.\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+4n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.\overline{m-5n}.7.8.9.10}{2.3.4.\overline{z+m-6n}\ldots\overline{z+m+4n}}+\&c.$$

$$=\frac{1}{z.\overline{z+n}.\overline{z+2n}.\overline{z+3n}.\overline{z+4n}}-\frac{1}{\overline{z+m}.\overline{z+n+m}.\overline{z+2n+m}.\overline{z+3n+m}.\overline{z+4n+m}}$$

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

On aura donc ces suites, pour la différence d'une fraction composée de 1. 2. 3. 4. 5. &c. facteurs, l'augmentation étant m.

$$\frac{m.1}{\overline{z+m-n}.\overline{z+m}}+\frac{m.\overline{m-n}}{\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}}{\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}}{\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}}{\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m}}$$

+ &c. pour un facteur.

$$\frac{m.2}{\overline{z+m-n}\ldots\overline{z+m+n}}+\frac{m.\overline{m-n}.3}{\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m+n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.4}{\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.5}{\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6}{\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m+n}}$$

&c. pour deux facteurs.

$$\frac{m.3}{\overline{z+m-n}\ldots\overline{z+m+2n}}+\frac{m.\overline{m-n}.3.4}{2.\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m+2n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.4.5}{2.\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+2n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.5.6}{2.\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+2n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6.7}{2.\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m+2n}}$$ &c. pour 3 facteurs.

$$\frac{m.4}{\overline{z+m-n}\ldots\overline{z+m+3n}}+\frac{m.\overline{m-n}.4.5}{2.\overline{z+m-2n}\ldots\overline{z+m+3n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.4.5.6}{2.3.\overline{z+m-3n}\ldots\overline{z+m+3n}}+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.5.6.7}{2.3.\overline{z+m-4n}\ldots\overline{z+m+3n}}$$

$$+\frac{m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}.\overline{m-3n}.\overline{m-4n}.6.7.8}{2.3.\overline{z+m-5n}\ldots\overline{z+m+3n}}$$ &c. pour 4 facteurs.

$$\frac{m \cdot 5}{z+m-n \ldots z+m+4n} + \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot \overline{z+m-2n} \ldots \overline{z+m+4n}}$$

$$+ \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot \overline{m-2n} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot \overline{z+m-3n} \ldots \overline{z+m+4n}} + \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot \overline{m-2n} \cdot \overline{m-3n} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overline{z+m-4n} \ldots \overline{z+m+4n}}$$

$$+ \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot \overline{m-2n} \cdot \overline{m-3n} \cdot \overline{m-4n} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overline{z+m-5n} \ldots \overline{z+m+4n}}$$ &c. pour cinq facteurs.

La loi de ces ſuites eſt aiſée à appercevoir, 1°. elles ont toutes le même nombre de termes quel que ſoit le nombre des facteurs, pourvû que l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur ſoit la même : par exemple, ſi $m = 4n$, le 5[e] terme de toutes ces ſuites s'évanoüit, auſſi-bien que tous les termes qui le ſuivent.

2°. Les chiffres qui, dans chaque terme de ces ſuites, multiplient les quantités $m \cdot \overline{m-n} \cdot \overline{m-2n}$ &c. expriment les nombres figurés d'une bande horiſontale du triangle arithmétique de M. Paſchal, laquelle bande eſt indiquée par le nombre des facteurs de la fraction dont on a pris la différence, c'eſt-à-dire, que ſi la fraction eſt compoſée, par exemple, de trois facteurs, ces quantités ſeront les nombres figurés du troiſieme ordre, &c. dont on excepte le premier terme. De-là il ſuit que ſi l'on nomme p le nombre des facteurs, on aura cette ſuite pour la différence d'une fraction dont le nombre des facteurs eſt p.

$$\frac{m \cdot p}{z+m-n \ldots \overline{z+m+\overline{p-1} \cdot n}}$$

$$+ \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot p \cdot \overline{p+1}}{1 \cdot 2 \cdot \overline{z+m-2n} \ldots \overline{z+m+\overline{p-1} \cdot n}} + \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot \overline{m-2n} \cdot p \cdot \overline{p+1} \cdot \overline{p+2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overline{z+m-3n} \ldots \overline{z+m+\overline{p-1} \cdot n}}$$

$$+ \frac{m \cdot \overline{m-n} \cdot \overline{m-2n} \cdot \overline{m-3n} \cdot p \cdot \overline{p+1} \cdot \overline{p+2} \cdot \overline{p+3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \overline{z+m-4n} \ldots \overline{z+m+\overline{p-1} \cdot n}} + \text{\&c.}$$

$$= \frac{1}{z \cdot \overline{z+n} \ldots \overline{z+\overline{p-1} \cdot n}} - \frac{1}{\overline{z+m} \cdot \overline{z+m+n} \ldots \overline{z+m+\overline{p-1} \cdot n}}.$$

COROLLAIRE II.

Il eſt donc évident par cette formule, que toute ſuite de fractions

fractions eſt ſommable dont les dénominateurs ſont compoſés de facteurs qui augmentent arithmétiquement, & dont chaque terme a un facteur de plus que le terme qui le précede, les numérateurs de ces fractions étant les nombres figurés du triangle arithmétique de M. Paſchal, multipliés chacun par le terme correſpondant de m, $m.\overline{m-n}$, $m.\overline{m-n}.\overline{m-2n}$, &c.

COROLLAIRE III.

Si l'on ſuppoſe $m = n$, tous les termes de cette ſuite s'évanoüiront, excepté le premier terme, l'on aura alors $\frac{pn}{z \ldots\ldots \overline{z+n+p-1.n}}$, ce qui eſt le cas du Mémoire imprimé en 1717.

COROLLAIRE IV.

Si l'on ſuppoſe $n = 0$, c'eſt-à-dire, que la fraction dont on a pris la différence ſoit compoſée de tant de facteurs égaux qu'on voudra, la ſuite deviendra

$$\frac{pm}{\overline{z+m}^{p+1}} + \frac{p.\overline{p+1}.m^2}{1.2.\overline{z+m}^{p+2}} + \frac{p.\overline{p+1}.\overline{p+2}.m^3}{1.2.3.\overline{z+m}^{p+3}} + \frac{p.\overline{p+1}.\overline{p+2}.\overline{p+3}.m^4}{1.2.3.4.\overline{z+m}^{p+4}} + \&c. = \frac{1}{z^p} - \frac{1}{\overline{z+m}^p}.$$

D'où l'on voit qu'une ſuite infinie eſt ſommable, dont tous les termes ſont les produits de chaque terme d'une progreſſion géométrique, multipliés par chaque terme d'une ſuite de nombres figurés.

Exemple. Soit cette ſuite $\frac{4.a}{\overline{b+a}^5} + \frac{10.a^2}{\overline{b+a}^6} + \frac{20.a^3}{\overline{b+a}^7} + \frac{35\,a^4}{\overline{b+a}^8} +$ &c. qui eſt formée par les termes d'une progreſſion géométrique, dont le premier eſt

$\frac{a}{\overline{b+a}^5}$, & par les nombres figurés du 4e ordre, la somme de cette suite sera $\frac{1}{b^4} - \frac{1}{\overline{b+a}^4}$.

Si l'on substitue successivement dans la suite générale pour p. m & z les valeurs que l'on voudra, il naîtra une infinité de suites qui seront toutes sommables.

Voici une autre maniere de trouver les sommes de ces suites.

Soit $\frac{a}{1-a}$, si l'on fait la division à l'infini de cette expression, on aura

$$a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + \&c.$$

jusques à l'infini.

On pourra donc substituer $\frac{a}{1+a}$ pour une telle suite; & si l'on a cette autre

$a + 2aa + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + 7a^7 + \&c.$ en la décomposant

en $a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a}{1-a}$

$+ aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{aa}{1-a}$

$+ a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^3}{1-a}$

$+ a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^4}{1-a}$

$+ a^5 + a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^5}{1-a}$

$+ a^6 + a^7 + \&c. = \frac{a^6}{1-a}$

$+ a^7 + \&c. = \frac{a^7}{1-a}$

il viendra $a + 2aa + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + 7a^7 + \&c. =$

$\frac{1}{1-a} \times a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \&c.$

$= \frac{a}{\overline{1-a}^2}$.

Si l'on a cette autre suite

$$a + 3aa + 6a^3 + 10a^4 + 15a^5 + 21a^6 + 28a^7 + \&c.$$

qui est composée des nombres figurés du 3e ordre multipliés par une progression géométrique, on la décomposera en

$$a + 2aa + 3a^3 + 4a^4 + 5a^5 + 6a^6 + 7a^7 + \&c. = \frac{a}{\overline{1-a}^{2}}$$

$$+ \; aa + 2a^3 + 3a^4 + 4a^5 + 5a^6 + 6a^7 + \&c. = \frac{aa}{\overline{1-a}^{2}}$$

$$+ \; a^3 + 2a^4 + 3a^5 + 4a^6 + 5a^7 + \&c. = \frac{a^3}{\overline{1-a}^{2}}$$

$$+ \; a^4 + 2a^5 + 3a^6 + 4a^7 + \&c. = \frac{a^4}{\overline{1-a}^{2}}$$

$$+ \; a^5 + 2a^6 + 3a^7 + \&c. = \frac{a^5}{\overline{1-a}^{2}}$$

$$+ \; a^6 + 2a^7 + \&c. = \frac{a^6}{\overline{1-a}^{2}}$$

$$+ \; a^7 + \&c. = \frac{a^7}{\overline{1-a}^{2}}$$

Donc $a + 3a^2 + 6a^3 + 10a^4 + 15a^5 + 21a^6 + 28a^7 + \&c. =$

$$\frac{1}{\overline{1-a}^{2}} \times a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \&c.$$

$$= \frac{a}{\overline{1-a}^{3}}.$$

Il est clair que dans les nombres figurés de tous les ordres, la même décomposition aura lieu

La suite $a + p.\, a^2 + \frac{p.\,\overline{p+1}}{1.\,2}.\, a^3 + \frac{p.\,\overline{p+1}.\,\overline{p+2}}{1.\,2.\,3}.\, a^4$

$$+ \frac{p.\,\overline{p+1}.\,\overline{p+2}.\,\overline{p+3}}{1.\,2.\,3.\,4}.\, a^5 + \frac{p.\,\overline{p+1}.\,\overline{p+2}.\,\overline{p+3}.\,\overline{p+4}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}.\, a^6 + \&c.$$

sera donc égale à $\frac{a}{\overline{1-a}^{p}}$.

REMARQUE I.

Si l'on fait attention à la regle générale qui a été trouvée pour prendre la différence d'une fraction composée de tant de facteurs qu'on voudra, l'augmentation qui doit arriver à chaque facteur étant aussi quelconque, on appercevra aussi ce qu'il faut faire, une différence quelconque étant donnée pour retrouver la grandeur dont elle est la différence, ou si il n'y a qu'une partie de cette différence de donnée, on découvrira ce qui manque à cette partie pour retrouver la grandeur dont elle est la différence, cette grandeur est l'intégrale de la différence donnée.

REMARQUE II.

Les grandeurs m, n & p qui entrent dans la formule générale de la différence d'une fraction quelconque, étant toutes trois indéterminées, il est clair que si l'on détermine l'une de ces trois grandeurs, ou deux quelconques, ou enfin toutes trois, & que l'on substitue dans la formule ces valeurs déterminées, cette formule recevra autant de différens changemens que ces trois grandeurs peuvent recevoir de différentes valeurs, & que dans chaque état de cette formule elle exprimera la différence finie d'une expression algébrique fractionnaire dont l'intégrale fini sera par conséquent cette fraction.

Application du Corollaire général à la recherche des sommes des suites.

EXEMPLE I.

Si l'on suppose dans la formule générale $m = 4$. $n = 2$ & $p = 3$, elle se changera en $\frac{12}{z+2 \ldots z+8} + \frac{48}{z \ldots z+8}$.

Si l'on suppose de plus que z, a successivement les valeurs, 1, 5, 9, 13, 17, 21. &c. ces deux termes seront les formules des deux suites

$$\frac{12}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{12}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{12}{11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17} + \frac{12}{15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21} + \&c.$$

& $\frac{48}{1.3.5.7.9} + \frac{48}{5.7.9.11.13} + \frac{48}{9.11.13.15.17} + \frac{48}{13.15.17.19.21} + \&c.$

Pour avoir la somme de ces deux suites il ne faut donc que prendre l'intégrale de cette formule $\frac{12}{z+2 \ldots z+8} + \frac{48}{z \ldots z+8}$, cette intégrale est $\frac{1}{z.\,z+2.\,z+4}$, puisque par la formule générale la différence de cette grandeur est $\frac{12}{z+2 \ldots z+8}$ $+ \frac{48}{z \ldots z+8}$, la somme de ces deux suites prises depuis les termes $\frac{12}{z+2 \ldots z+8} + \frac{48}{z \ldots z+8}$, jusques à l'infini est donc $\frac{1}{z.\,z+2.\,z+4}$, ce qui donne pour la somme entiere des deux suites $\frac{1}{1.\,3.\,5}$. Car alors $z = 1$.

EXEMPLE II.

Si l'on suppose $m = 4n$, $n = 3$ & $p = 5$, on aura $\frac{12.\,5}{z+9 \ldots z+24} + \frac{12.\,9.\,10}{z+6 \ldots z+24} + \frac{12.\,9.\,6.\,10}{z+3 \ldots z+24}$ pour la différence qui convient à ces suppositions, & chaque terme de cette différence sera la formule d'une suite dans laquelle z, a successivement les valeurs, 1. 13. 25. 37. 49. 61. &c. Ces suites seront donc

$\frac{12.\,5}{10.13.16.19.22.25} + \frac{12.\,5}{22.25.28.31.34.37} + \frac{12.\,5}{34.37.40.43.46.49} + \&c.$

$\frac{12.9.10}{7.10.13.16.19.22.25} + \frac{12.9.10}{19.22.25.28.31.34.37} + \frac{12.9.10}{31.34.37.40.43.46.49} + \&c.$

$\frac{12.9.6.10}{4.7.10.13.16.19.22.25} + \frac{12.9.6.10}{16.19.22.25.28.31.34.37} + \frac{12.9.6.10}{28.31.34.37.40.43.46.49}$

$+ \&c.$ dont l'intégrale est $\frac{1}{z.\,z+3.\,z+6.\,z+9.\,z+12}$ qui est la somme de ces trois suites, depuis le terme exprimé par $\frac{12.\,5}{z+9 \ldots z+24} + \frac{12.\,9.\,10}{z+6 \ldots z+24} + \frac{12.\,9.\,6.\,10}{z+3 \ldots z+24}$ jusques à l'infini, ce qui donne pour la somme entiere des trois suites $\frac{1}{1.\,4.\,7.\,10.\,13}$; car alors $z = 1$.

COROLLAIRE.

La différence d'une fraction étant composée d'autant de termes que m contient de fois n, & chacun de ces termes pouvant être la formule d'une suite, il est évident que soit que l'on considere ces termes en particulier, ou qu'on les réduise en un seul, en les mettant à même dénomination, dans l'un & l'autre cas on trouvera toûjours l'intégrale de la somme de plusieurs suites, ou d'une seule suite égale à toutes les autres.

DES MERVEILLES DES DAILS,

Ou de la lumiere qu'ils répandent.

Par M. DE REAUMUR.

2 Juin. 1723. C'EST d'après Pline que je donne le premier titre; il n'est qu'une traduction de celui du Chapitre LXI. du IXme Livre de son Histoire naturelle; aussi ce Mémoire ne sera-t-il qu'une espece de Commentaire du même Chapitre. Il s'y agit des plus curieux phénomenes que nous connoissions dans le genre des phosphores naturels; une espece de coquillage les fait voir. Tout ce que ce célebre naturaliste a fait entrer dans son immense Recueil n'est pas également certain; souvent il a eu soin d'avertir qu'il ne parloit que sur le témoignage d'Auteurs qu'il cite, ou sur des *on dit;* & il seroit à souhaiter qu'il eût rapporté, avec la même circonspection, généralement tous les faits dont il n'étoit pas assez sûr par lui-même : mais comme il a négligé de le faire, nous sommes dans la nécessité de vérifier de nouveau, au moins ce que son Histoire nous raconte d'extraordinaire & de merveilleux. J'ai regardé comme une espece de devoir de faire la vérification de ce qu'il nous apprend dans le Chapitre que je viens de citer, & c'en étoit réellement un pour moi, puisque cette vérification m'a instruit que je devois une sorte de

réparation à cet illuſtre Auteur, que je devois confirmer des faits qui, quoique vrais, ſont en apparence peu croyables, & que je puis avoir contribué à rendre encore plus douteux par la façon dont j'en ai parlé ailleurs.

J'ai raſſemblé dans différens Mémoires les obſervations que m'ont fournies pluſieurs eſpeces d'animaux de mer, & ſurtout quantité de coquillages. Dans un de ces Mémoires, imprimé parmi ceux de l'Académie en 1713. j'ai fait mention du coquillage qui eſt appellé *coutelier* ſur les côtes de Poitou, & *couteau* ſur d'autres côtes du Royaume. Rondelet, Aldrovande, Geſner, Jonſton, en un mot tous les Naturaliſtes modernes l'ont pris ſans héſiter pour celui que Pline a deſigné par les noms de *ſolen*, *aulos*, *donax*, *onix*, *dactylus*; le nom de *dactylus* eſt pourtant celui dont il s'eſt ſervi ordinairement; c'eſt à ce dactylus à qui il attribue la propriété de luire, dans des circonſtances très-ſingulieres. J'ai dit que les couteliers des côtes de Poitou n'avoient point cette propriété merveilleuſe, qu'ils n'étoient nullement lumineux, & j'ai eu raiſon de le dire, car ils ne le ſont pas. Mais j'ai appris depuis, que nous avons un autre coquillage qui produit tous les phénomenes que Pline nous a racontés du dactylus; par ſon nom même il reſſemble plus au dactylus de Pline, que les couteliers. On l'appelle *dail* ſur les côtes de Poitou, je l'ai décrit dans le Mémoire cité ci-deſſus, à la fin duquel on trouvera des Planches, où la figure de ce coquillage & celle du coutelier ſont repréſentées. Les Naturaliſtes modernes ſe ſont-ils trompés, lorſqu'ils ont pris notre coutelier pour le dactylus de Pline ? Je ne le penſe pas : mais peut-être que Pline a regardé notre dail comme une des eſpeces du genre dont ſont les couteliers : peut-être auſſi qu'il ne s'étoit pas aſſûré par lui-même de ce qu'il rapporte ſur la lumiere que donnent ces coquillages; qu'on lui avoit raconté comme propre à une eſpece, ce qui l'eſt à une autre. De quelque part qu'on ſe tourne, il y a ici de l'embarras; le coutelier reſſemble plus par ſa coquille au dactylus de Pline que le dail, & le dail a la propriété de luire que Pline a attribuée

au dactylus. Si on vouloit que cette propriété ne fût commune qu'à quelques especes du genre, on auroit peine encore à sauver Pline, qui semble l'accorder à toutes les especes de dactylus, ou qui n'a point averti qu'il y en avoit qui ne donnent pas de lumiere.

De tout cela il suit que je pourrois avec assez de vrai-semblance me disculper du reproche qu'on auroit à me faire de ce que j'ai dit, que nos couteliers ne donnent point de lumiere, puisque réellement ils n'en donnent point : mais il faut avoüer de bonne foi, que j'eusse apparemment alors nié cette propriété aux dails, comme je l'ai niée aux couteliers. J'avois observé & les uns & les autres, & je ne l'avois remarquée dans aucun ; il ne paroît pas même que je fusse fort disposé alors à la croire sur le seul témoignage de Pline. J'ai dit que ses paroles, celles qui regardent ce coquillage, valoient bien la peine d'être rapportées, je le dis aujourd'hui, mais dans un sens fort différent. Il est juste d'avoüer que j'ai eu tort alors de vouloir plaisanter.

Le Chapitre LXI. du IXme Livre de son Histoire naturelle a pour titre, *De dactylis, eorumque miraculis.* Et voici ce qu'il nous en rapporte : *Concharum è genere dactyli, ab humanorum unguium similitudine appellati. His natura in tenebris remoto lumine, alio fulgore clarere, & quanto magis humorem habeant, lucere in ore mandentium, lucere in manibus, atque etiam in solo, atque veste, decidentibus guttis ; ut procul dubio pateat succi illam naturam esse quam miramur in corpore.* La nature de ces coquillages est de luire dans les ténebres, & de luire d'autant plus, qu'ils ont plus d'eau. Ils luisent dans la bouche de ceux qui les mangent, les gouttes d'eau qui, de ces coquillages, tombent sur les mains sur les habits à terre, luisent ; d'ou il est évident que la nature de cette liqueur est semblable à celle que nous admirons dans le corps méme.

Ou je n'avois pas lû cet endroit de Pline, ou je ne l'avois pas présent, lorsque j'ai fait des observations sur les coquillages que j'ai données ailleurs, j'eusse certainement cherché à le vérifier. Depuis il m'a rendu attentif à examiner dans l'obscurité

ſcurité ceux dont je croyois qu'il pouvoit avoir voulu parler. Les couteliers, comme je l'ai dit, n'y font voir aucune lumiere, mais les dails y ſont lumineux au point & dans toutes les circonſtances que nous venons de rapporter d'après cet Auteur.

Il n'eſt preſque pas néceſſaire d'avertir que ce n'eſt pas la coquille qui eſt lumineuſe, c'eſt l'animal qu'elle couvre, qui l'eſt, & qu'il l'eſt à un degré qui lui eſt propre. On ſçait que divers poiſſons, que des chairs jettent de la lumiere dans l'obſcurité : mais elles ne produiſent ce phénomene que quand elles ſont pourries, au moins en partie ; au lieu que nos dails répandent d'autant plus de lumiere qu'ils ſont plus frais, qu'ils ont été plus récemment pêchés.

Les vers qui doivent leur nom à la lumiere dont ils brillent, les vers luiſans, n'ont qu'une partie du deſſous de leur corps qui luiſe, au lieu que la chair de nos dails luit par-tout. Je les ai entierement retirés de leurs coquilles, comme on retire des leurs les moules & les huîtres qu'on veut manger ; après quoi je les ai portés dans l'obſcurité ; toute leur ſurface a été lumineuſe, il n'y a point eu d'endroits obſcurs, il n'y en a point eu qui n'ait paru luire d'une lumiere qui lui étoit propre.

Ce n'eſt pas ſeulement aux peaux extérieures que cette proprieté eſt attachée, elle eſt commune à toute leur chair, à tout ce qui compoſe leur corps. Qu'on les déchire, qu'on les découpe, les ſurfaces qui ſont formées par ces diviſions ſont lumineuſes comme les autres l'étoient; en un mot toute leur ſubſtance eſt lumineuſe, comme le ſont tous les fragmens d'un charbon bien allumé, ou comme l'eſt par-tout le phoſphore d'urine. Nos dails ſont de vrais phoſphores naturels, qui, comme ce phoſphore artificiel, rend brillans tous les corps contre leſquels il eſt frotté ; les doigts ne ſçauroient preſque les toucher ſans devenir lumineux ; ainſi, comme l'a dit Pline, ils doivent luire dans la bouche de ceux qui les mangent, & même rendre lumineuſes la langue, les dents, & toutes les parties de la bouche contre leſquelles ils ont été appliqués.

Ce coquillage fraîchement pêché, a, comme les huîtres & les moules, beaucoup d'eau, pour peu qu'on le manie, des gouttes s'en détachent, ces gouttes elles-mêmes sont lumineuses, comme Pline l'a très-exactement rapporté. Il n'est pas possible que des particules de l'animal ne soient mêlées avec cette eau, ç'en est assez pour la rendre luisante. Après avoir touché ces poissons, j'ai, d'abord par hasard, & ensuite à dessein, lavé le bout de mes doigts dans un verre d'eau; de cela seul, cette eau paroissoit dans l'obscurité, telle que le lait nous paroît en plein jour.

La lumiere que ces poissons donnent aux corps, contre lesquels ils ont été frottés, n'est pas de longue durée, elle cesse dès que ce qu'ils ont laissé sur ces corps y est devenu sec. Quand j'ai négligé de laver mes doigts sur le champ, j'ai vû la qualité lumineuse qu'ils avoient acquise, s'affoiblir peu à peu, & enfin disparoître entierement. Mais lorsque j'ai mouillé ensuite mes doigts pour les laver, je les ai apperçûs presque aussi lumineux qu'ils l'avoient été d'abord.

Cela m'a donné envie de tenter si on ne pourroit point faire de ce poisson un phosphore durable, un phosphore qu'on conserveroit aussi long-temps qu'on voudroit. J'en ai fait sécher quelques-uns, qui en séchant, ont, comme je m'y attendois, perdu leur proprieté de luire. Au bout de quatre à cinq jours, quand ces chairs ont été bien seches, je les ai humectées, soit avec de l'eau ordinaire, soit avec de l'eau dans laquelle du sel marin étoit dissous. Alors elles ont recommencé à luire, comme je l'avois esperé: mais cette lueur ayant été beaucoup plus foible que la premiere, il m'a paru que ces poissons secs n'étoient pas propres à redevenir des phosphores bien brillans.

J'ai tenté de les conserver de quelques autres manieres, qui n'ont pas mieux réussi. J'ai mis un de ces poissons dans de l'eau de vie, il a presque perdu sur le champ toute sa proprieté de luire. J'en ai mis d'autres dans de l'eau avec du sel marin, ils y sont restés long-temps luisans, mais ils ont répandu une lumiere beaucoup plus foible que celle qu'ils

donnoient d'abord. C'eſt vers la fin de l'automne que j'ai fait ces expériences ; alors & dans tout temps où il ne fera pas fort chaud, on peut conſerver ces animaux luiſans pendant pluſieurs jours: mais à meſure qu'ils vieilliſſent, ils le deviennent moins ; & corrompus juſqu'à un certain point, ils ne le ſont plus du tout; peut-être même que de ces coquillages bien pourris, ſuffiſent pour empêcher ceux qui ſont très-frais, de luire. Une expérience m'a donné lieu de le penſer. J'ai fait pêcher devant moi des dails, qui, quand je voulus les examiner dans l'obſcurité, ne donnerent aucune lumiere. Si on a lû le Mémoire imprimé en 1712, où j'ai parlé de ces coquillages, on aura vû qu'ils vivent au milieu d'une pierre tendre, qui les environne de toutes parts ; qu'ils y ſont dans une eſpece de priſon, d'où ils ne ſortent de leur vie ; pour les avoir, on rompt cette pierre. Parmi les coquillages dont je viens de parler, & qui frais ne donnerent aucune lueur, on y en avoit mis qui étoient morts dans leurs trous, & qui même y étoient devenus exceſſivement puans. Peut-être que l'impreſſion que ceux-ci firent ſur les autres, éteignit, pour ainſi dire, toute leur lumiere. C'eſt un fait que je n'ai pû vérifier, n'ayant pas pû pour lors r'avoir de ces coquillages. Peut-être auſſi y a-t-il des temps où ces animaux paroîtront plus lumineux que dans d'autres. La fermentation qui ſe fait dans les machines animales n'eſt pas toûjours la même, & une ſorte de fermentation peut donner à des chairs la diſpoſition néceſſaire pour faire paroître la lumiere.

Le temps où les animaux s'accouplent, eſt un temps où il ſe fait une eſpece de fermentation particuliere. Il eſt probable que la lumiere que répandent les vers luiſans, doit une partie de ſa vivacité à cette fermentation. Ce n'eſt guere que dans les temps chauds qu'ils luiſent dans ce pays ici, & tous ceux qui luiſent dans ce pays ſont les femelles. On ſçait que ce ſont des inſectes ſans aîles : mais ceux qui ont lû les Auteurs qui traitent des inſectes, ſçavent de plus que le mâle de cet inſecte en a ; il eſt fort bien repréſenté dans le théatre des inſectes de Moufet. Il vole la nuit ; la

lueur que jettent les vers femelles, lui apprend de quel côté il doit voler. Je ne connoissois le mâle des vers luisans que par les Livres, il ne m'étoit point encore arrivé d'en trouver, lorsqu'un vers luisant femelle servit à m'en faire voir un mâle, il y a plusieurs années. Je tenois pendant la nuit ce vers luisant dans ma main, j'observois la vivacité de sa lumiere, lorsqu'un autre insecte vint se poser sur ma main. Je le pris d'abord pour une espece de scrarabée: mais je ne fus pas long-temps à le méconnoître; il s'accoupla sur le champ, & il resta assez long-temps accouplé. Depuis il m'est arrivé plusieurs fois de prendre d'autres mâles de vers luisans, lorsque j'en tenois de femelles dans ma main. Ils viennent aussi voler autour de la chandelle, & si elle n'attiroit point les papillons, on n'auroit aucun lieu de douter que ces insectes ne soient attirés par la chandelle, comme ils le sont par la lueur de leurs femelles. Au reste il y a des temps où les vers femelles ne luisent point, ou presque point, & peut-être sont-ce ceux où ils n'ont aucune disposition à l'accouplement.

D'auttes insectes aussi luisent en des temps particuliers. J'ai rencontré des millepieds ttès-vivans & d'especes assez communes, qui brilloient au moins autant que les vers luisans; & j'ai souvent rencontré d'autres millepieds qui m'ont paru de la même espece, qui n'étoient nullement lumineux.

Il peut donc y avoir des temps où nos dails ne luiroient pas: mais je ne suis point sûr qu'il y en ait de tels; & si j'en ai trouvé qui n'étoient pas luisans, quoique frais, les dails excessivement corrompus, avec lesquels ils étoient mêlés, peuvent avoir eu part à ce phénomene, leur avoir fait perdre sur le champ la proprieté de répandre la lumiere, comme j'ai dit que l'eau de vie l'avoit fait perdre à un autre.

Au reste c'est le seul des coquillages des côtes de Poitou à qui j'ai trouvé la propriété de luire. J'ai éprouvé si les moules, les huîtres, les couteliers, les pectongtes, & les différentes especes de limaçons de mer ne l'auroient pas, & je n'en ai pas trouvé la moindre apparence dans aucun de ces coquillages.

DE L'ORIGINE DES PIERRES APPELLÉES YEUX DE SERPENTS ET CRAPAUDINES.

Par M. DE JUSSIEU.

DANS l'obligation d'expliquer la maniere dont s'est pû faire l'impression des figures ou de plantes, ou de coquillages qui se trouvent en divers endroits de la France sur plusieurs sortes de pierres, sans que l'on puisse rencontrer dans le pays ni dans le voisinage des corps qui ayent pû servir de types à ces impressions, j'ai supposé quelques révolutions extraordinaires qui nous ont précedés de long-tems, telle que seroit celle de quelque inondation, par le moyen de laquelle les mers ayant changé de lit, auroient en certains tems abandonné notre continent qu'elles couvroient auparavant, & s'en étant retirées fort loin, y auroient laissé des dépouilles de plantes & d'animaux marins, dont la plûpart de nos terres se trouvent remplies, & qui par les découvertes qui s'en feront long-tems après nous, serviront de monumens pour confirmer la probabilité de ces révolutions.

Les exemplaires de plantes des Indes & d'Amerique, & les parties solides de poissons de ces mêmes pays, dont il nous a été permis de faire la vérification avec les impressions que j'ai remarquées qui se trouvent sur différentes pierres, & les petrifications même ressemblant en entier à ces sortes de dépouilles, ne nous laissent aucun lieu de douter que ces mêmes plantes n'ayent été transportées dans ce continent, & que ces mêmes poissons n'y ayent vécu dans le temps que la mer l'a couvert. Toute autre explication semble peu convenir à ces phénomenes. Et si nous ne trouvons aujourd'hui dans les pays & dans les mers qui nous environnent, ni les mêmes

plantes, ni les mêmes poissons, ne seroit-ce point plûtôt à l'ignorance dans laquelle nous serions de la route qu'ont tenue les eaux de ces mers, aujourd'hui si éloignées, pour se transporter dans les Indes & dans l'Amerique, qu'il faudroit nous en prendre, qu'à la vérité d'un fait qui se manifeste à nous de plus en plus chaque jour par les envois qui nous sont faits de ces pays, de ces plantes & de ces parties d'animaux.

Je crois avoir assez fait reconnoître les différentes especes de fougeres d'Amerique, le fruit & la semence de l'arbre triste des Indes, sur les pierres de Saint-Chaumont en Lyonnois, dans les Mémoires que j'ai lûs ici en 1718 & 1721.

Pag. 287.
Pap. 69.

Je me flatte d'avoir démontré, sur-tout dans ce dernier, que certaines dents fossiles que l'on découvre près de Montpellier, sont d'un poisson de la Chine : & la comparaison de celles dont je me suis servi pour preuve de cette observation, est aujourd'hui fortifiée par la figure du poisson du genre des rayes, auquel ces dents appartiennent, que M. Barrere, Medecin Botaniste du Roi à Cayenne, nous en a apportées; l'une & l'autre espece desquelles dents ressemblent à celles qui sont fossiles, & se trouvent aux environs de Montpellier; & à celles que M. Volfart * dit avoir découvertes auprès de Cassel.

* Historia naturalis hassiæ inferioris. *Pars prima. In fol. Cassel* 1716.

Et je ne doute pas que par le troisieme Mémoire, concernant cette matiere, lû en 1722, je n'aye convaincu que les pierres figurées, communément appellées *Cornes d'Ammon*, ne soient des impressions de l'intérieur & quelquefois de l'extérieur d'un genre de coquillage appellé *Nautile*, que nous sommes certains que l'on ne trouve (à l'exception d'une seule de ses especes) que dans ces mers éloignées.

J'avoüerai cependant que cette ressemblance d'une des especes de corne d'Ammon, avec la seule espece de nautile qui se trouve dans nos mers, m'a fait naître d'abord quelque scrupule que je n'attribuasse peut-être trop légerement les rapports des impressions des plantes & des figures de plusieurs petrifications que l'on découvre dans nos terres, aux figures des plantes & des parties osseuses des animaux de ces pays si éloignés de nous. Mais des màchoires d'un poisson

de la mer du Bresil, bon à manger, que les gens du pays appellent le *Grondeur*, qui en ont été apportées par M. de la Thiolais, Chirurgien de Saint-Malo, qui y a fait plusieurs voyages, me fournissent de nouvelles preuves pour la confirmation de ce système, lorsque je trouve dans les dents qui couvrent la surface de ces mâchoires, l'origine des pierres que l'on appelle *yeux de serpents* & *crapaudines*, qu'Augustin Scilla, peintre Neapolitain, a attribuées aux dents de la mâchoire de notre dorade, dans sa lettre Italienne, intitulée: *La vana speculazione disingannata dal senso*, &c. *circa i corpi marini che petrificati si trovano in varii luoghi terrestri*, imprimée à Naples en 1670.

Il est vrai que l'opinion de cet Italien * paroissoit assez vrai-semblable avant cette derniere découverte, puisqu'effectivement les unes & les autres de ces pétrifications avoient assez de rapport aux dents de la dorade: mais la vûe de celles de la mâchoire du grondeur en découvre une ressemblance assez parfaite avec ces sortes de pierres figurées, pour nous donner lieu d'assûrer que ces parties osseuses de poisson étranger ont pû également se pétrifier en France comme celles de notre dorade.

* *Tab.* 11. *pag.* 65. 66. & 64.

Quelque ressemblance qu'il y ait dans la figure & dans la disposition des dents de la mâchoire de notre dorade avec celles de la mâchoire du grondeur, & quelque raison que l'on pût avoir de dire que ce dernier poisson soit du genre de la dorade, néantmoins par la seule inspection des deux parties d'une mâchoire du grondeur, articulées ensemble par symphyse, il faut convenir que la figure de celle-ci est tout-à-fait différente de celle-là, soit par l'espece de triangle qui forme l'union de ces deux parties articulées, soit par les apophyses de chacune de ces parties tout-à-fait différentes de celles de la dorade, ensorte que si par la seule disposition & par la configuration des dents de l'une & de l'autre de ces mâchoires, on pouvoit rapporter les poissons auxquels elles appartiennent à un même genre, au moins seroit-il vrai de dire que les especes en seroient très-différentes.

L'arrangement de ces dents dans la mâchoire du grondeur eſt tel que toute la ſuperficie platte des deux mâchoires forme une maniere de pavé ſupérieur & inférieur, dont les parties les plus petites, qui ſont celles qui par la pétrification ſont priſes pour yeux de ſerpens, ſe trouvent dans les côtés de la mâchoire, & que les parties les plus grandes & les plus larges, dont ſont formées les crapaudines, ſe trouvent arrangées ſur deux lignes dans le centre de ces eſpeces de pavé ; enſorte que ces parties que l'on a qualifiées d'yeux de ſerpens, ſont celles qui ſervent à percer les alimens dont ſe nourrit ce poiſſon, & que l'uſage des larges, qui ſont les crapaudines, ſemble être déterminé à écraſer & broyer par leur figure, qui dans les unes eſt plus platte, & dans les autres plus convexe, ſoit que la forme en ſoit preſque ronde, ou approchante de l'ovale & du quarré, telle qu'on la voit dans les différentes eſpeces de crapaudines.

Chacune de ces ſortes de dents eſt articulée par gomphoſe dans la place qu'elle tient dans la mâchoire ; & lorſqu'on les en détache, on apperçoit dans leur intérieur le même vuide qui ſe trouve dans preſque toutes les crapaudines & dans la plûpart de ces prétendus yeux de ſerpents, dont la ſubſtance n'eſt que la couronne de l'une & de l'autre de ces dents. La racine qui en reſte ſur la mâchoire, la fait reſſembler, lorſque toutes ces dents en ont été ſéparées, à une eſpece de ces pierres étoilées qu'on nomme *aſtroïtes* ; & il y a apparence que cet animal change ſouvent de dents par la découverte que l'on fait aiſément au fonds de chacun de ces alvéoles, & derriere la racine des anciennes dents d'une nouvelle qui pullule pour remplacer celle qui doit tomber.

L'origine de ces prétendus yeux de ſerpens & de ces crapaudines que l'on a miſes dans le nombre des pierres précieuſes du ſecond ordre, & auxquelles on a tant attribué de vertus, n'eſt donc plus incertaine, & nous avons pour le moins autant de raiſon d'aſſûrer qu'elles ne ſont autre choſe que les dents de ce poiſſon étranger pétrifiées, que celles de la dorade qui vient dans nos mers, d'autant plus que ces

ſortes

ſortes de pierres ſe trouvent ſi enfoncées au milieu & dans des carrieres les plus dures, & tellement mêlangées avec d'autres pétrifications qui n'ont rapport qu'à des parties d'animaux étrangers, qu'on ne peut ſoupçonner qu'elles ayent pû y être placées ſans ſuppoſer quelqu'un de ces évenemens extraordinaires dont j'ai parlé.

On pourra, pour détruire ce ſyſtême, ſe ſervir des gloſſopetres ſi communes en France, dont l'origine eſt communément rapportée aux dents de la Lamie, du Marteau & du Carcharias, vulgairement appellé *Requiem* : mais quand je conviendrois que ces gloſſopetres ſont effectivement du genre de ces poiſſons, ne me reſteroit-il pas encore l'incertitude de ſçavoir ſi elles appartiennent effectivement aux eſpeces que nous connoiſſons actuellement dans nos mers, puiſque ces eſpeces ſont en très-petit nombre, & que la figure de leurs dents nous eſt aſſez connue, au lieu qu'il ſe trouve des gloſſopetres d'une infinité de figures tout-à-fait diſſemblables de celles de ces eſpeces de poiſſons, & que nous ne devons pas déſeſperer de voir un jour venir des Indes & de l'Amérique comme les dépouilles de tant d'autres qu'on trouve ici petrifiées, & qui nous ont été envoyées de ces pays-là.

EXPLICATION DES FIGURES.

FIGURE I. Portion de mâchoire d'un poiſſon des côtes du Breſil, appellé le *Grondeur*, garnie de ſes dents, de groſſeurs & de figures différentes.

FIG. II. La même portion de mâchoire renverſée.

FIG. III. *a*, *a*, *a*, *a*, Dents du Grondeur, tirées de la mâchoire ci-deſſus, & vûes à part.

b, *b*, *b*, *b*, Les mêmes dents vûes en deſſous, du côté qu'elles tiennent à leurs racines.

c, Racine d'une de ces dents, & vûe du côté qu'elle y tenoit.

d, la même racine renverſée, & vûe du côté de ſa convexité, qui eſt comme chagrinée.

e, *e*, *e*, Dents nouvelles qui ſe trouvent ſous les racines de quelques anciennes, & les ſurpouſſent.

FIG. IV. Mâchoire du Grondeur, composée de deux pieces jointes ensemble par symphyse, & vûe dépouillée de ses dents, les racines étant toutes restées dans leurs alvéoles, à la réserve de cinq qui en ont été tirées, & dont les alvéoles, par rapport à leurs profondeurs, sont marquées d'une couleur plus noire dans le dessein.

FIG. V. La même mâchoire renversée, & vûe du côté de sa partie extérieure.

SUITE DES OBSERVATIONS SUR LA FABRIQUE DU SEL AMMONIAC,

Avec sa décomposition pour en tirer le sel volatil, que l'on nomme vulgairement SEL *d'*ANGLETERRE.

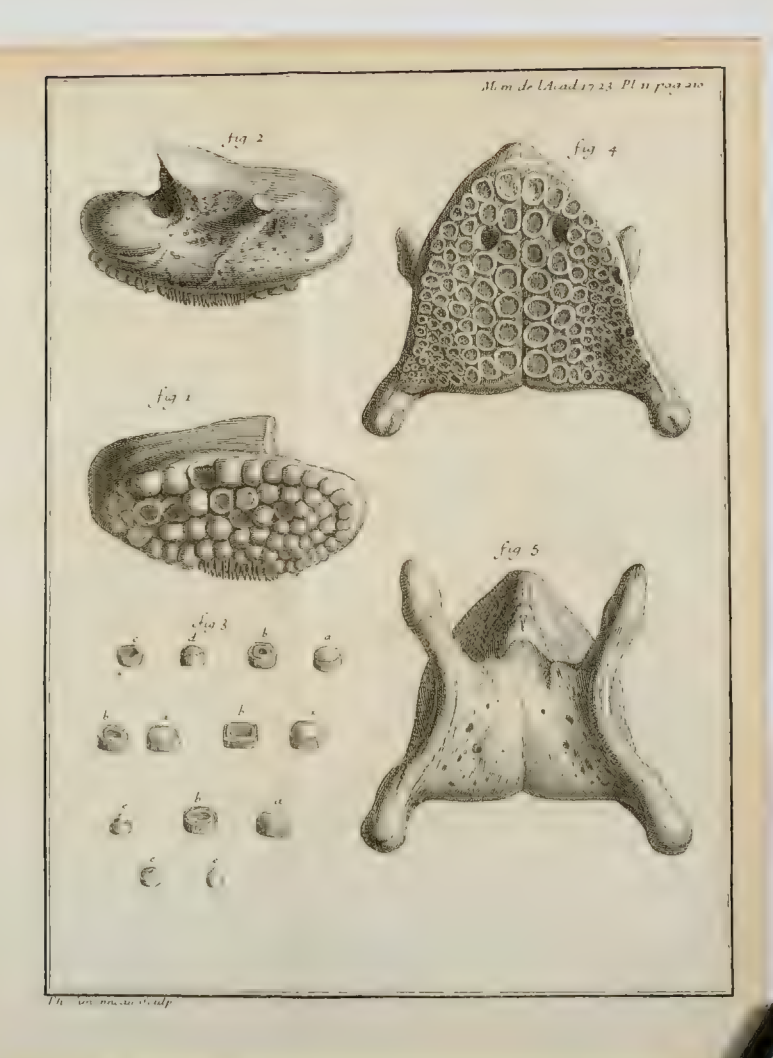
Par M. GEOFFROY le Cadet.

LORSQUE je donnai en 1716 mes conjectures sur la composition du sel Ammoniac, dans la description que je fis de ce sel, je ne parlai que de celui qui nous vient d'Égypte par le commerce du Levant, parce qu'en effet c'est le seul qui soit connu parmi les Chymistes, & décrit par les Auteurs.

Il est vrai que Pomet, dans son Histoire générale des drogues, ttaitant du sel Ammoniac, en a indiqué une autre sorte, mais par apostille seulement : *On nous apportoit autrefois de Venise & d'Hollande du sel Ammoniac fait en pain de sucre, qui étoit beaucoup plus beau que celui que nous voyons présentement.*

Il y a trente ans que Pomet écrivoit, & par le terme


fig. 4.
fig. 5.
a
a


fig 2
fig 4
fig 1
fig 5
fig 3
c
d
b
a
b
b
b
a
Ph. Simonneau Sculp

d'*autrefois*, on doit entendre plusieurs années au-delà. Il n'est donc pas surprenant que cette sorte de sel ne se fût point encore présentée à moi, & l'apostille de Pomet ne me paroissoit pas un garant assez sûr pour l'en croire sur sa parole.

Ma curiosité ne fut pas plus satisfaite par les Marchands de qui je m'en informai.

Je n'en trouvai qu'un qui m'assûra qu'il en avoit vû de cette forme, qui étoit apporté des Indes Orientales : mais j'en voulois voir de mes yeux avant que d'en parler, & avoir pieces en main pour les produire, parce qu'en fait de drogues étrangeres, il est très-facile d'en imposer.

Je n'ai pû parvenir à trouver de cette espece de sel Ammoniac que dans ces derniers temps. L'interruption du commerce du Levant arrivée par la derniere contagion, dont Marseille a été affligée, a donné occasion à cette derniere découverte ; car alors on a été obligé de tirer d'Hollande les drogues qui nous manquoient. Il nous est donc venu de ce sel, qui jusques-là ne nous étoit connu que par *oüi-dire*. Les factures font foi qu'il vient des Indes, d'où il est apporté par les Vaisseaux de la Compagnie Hollandoise. Il a véritablement la figure d'un pain de sucre dont la pointe seroit tronquée. Les plus grands de ces pains de sel Ammoniac, ont de diametre neuf pouces à la base, & trois pouces & un quart au sommet, sur onze pouces & demi de hauteur.

Ils ne sont pas solides dans toute leur masse, l'intérieur en est creux du côté de la base, & forme un cone de sept pouces & demi de diametre, & d'environ cinq pouces & demi de haut.

Il paroît par la grosseur de ces pains de sel Ammoniac, comparés avec ceux qui nous viennent d'Egypte, qu'on travaille ce sel aux Indes en bien plus grand volume. En effet ceux-ci pesent quatorze à quinze livres, pendant que les autres n'en pesent que quatre à cinq.

La consistance est à peu-près la même, ce qui montre qu'ils sont produits par une sublimation presque égale. Il n'y a de différence que la forme qu'ils ont prise du vaisseau subli-

matoire. Celui dont on se sert aux Indes est fait en cone, & il paroît qu'il est adapté au vaisseau qui contient la matiere, soit au-dessus, soit à côté. Il y a plus d'apparence que ce sel est sublimé de cette derniere façon, comme la plus commode pour une masse aussi pesante.

Nous éprouvons qu'en sublimant le sel Ammoniac dans nos cornues, il se moule de même le long du col; & qu'il s'y dispose en forme de cone.

De la maniere dont je conçois que ces vaisseaux sont ajustés, il est aisé de s'imaginer comment on peut employer une quantité suffisante de matiere pour retirer un poids de quatorze à quinze livres de sel sublimé, parce qu'on peut charger à plusieurs fois la cornue pendant la sublimation, par une ouverture faite en haut tout exprès, comme en ont nos cornues tubulées.

Les pains de sel Ammoniac qui se fabriquent en Egypte ne sont si petits que parce qu'ils se subliment au haut du vaisseau même qui contient la matiere, & ce vaisseau ne peut avoir qu'une certaine capacité assez limitée. C'est aussi ce qui leur donne la forme de coupe renversée qu'ils ont prises au haut du balon ou bombe de verre où ils sont sublimés.

Un avantage que l'on retire encore de la maniere dont le sel Ammoniac se fabrique aux Indes, c'est que sa superficie est moins chargée d'impuretés, parce que toutes les fuliginosités qui s'élevent pendant l'opération, ont plus de facilité à s'échapper vers la pointe du cone, & qu'on les en sépare aisément en tronquant cette pointe, lorsqu'on forme les pains.

On remarque sur le tour du cercle qui termine ces pains, les vestiges de cinq ou six trous, qu'on a eus la précaution de faire pendant l'opération, pour donner au sel, qui se sublime, le moyen de parvenir jusqu'au haut, & de s'y condenser solidement, en laissant échapper l'air raréfié & les fuliginosités qui pourroient arrêter la sublimation.

Les formes où ce sel se sublime sont de verre; car j'en ai trouvé des morceaux qui sont demeurés attachés à la surface des pains, comme j'en avois observé à celle des pains de sel Ammoniac ordinaire.

La ſurface extérieure de ce ſel Ammoniac des Indes, eſt formée par une croûte ſolide de cinq à ſix lignes d'épaiſſeur dans la partie la plus forte, & qui diminue inſenſiblement juſqu'à un pouce & demi de la baſe, où elle ſe réunit à celle qui enduit intérieurement le creux du pain. Cette croûte, tant interne qu'externe, eſt compoſée de lames tranſparentes, horiſontales & très-ſerrées. L'intérieure eſt plus tranſparente, comme la plus expoſée à l'action du feu qui confond deux ou trois lames enſemble : mais à meſure que ces lames s'éloignent de la croûte, elles perdent de leur tranſparence, & on obſerve facilement le nombre des couches qui compoſent le corps du pain.

Il eſt aiſé de connoître, par la gradation de ces couches, de quelle maniere elles ſe forment & s'uniſſent enſemble par la ſublimation. Les premieres qui s'élevent s'attachent aux parois du vaiſſeau, où elles ſe durciſſent par la chaleur du reverbere, dont le vaiſſeau ſublimatoire eſt recouvert ; elles ſe ſerrent enſuite & s'épaiſſiſſent par l'union des lames ſalines qui leur ſuccedent. Voilà comme ſe forme cette croûte cryſtalline dont tout le pain eſt revêtu extérieurement.

La maſſe ſaline qui s'éleve en grande quantité par la violence du feu, ſe diſpoſe en aiguilles tout autour de cette croûte : mais ces aiguilles ſe ſerrent & ſe condenſent beaucoup moins, parceque l'épaiſſeur de la maſſe, venant à augmenter conſidérablement, met les lames intermédiaires à couvert de l'action du feu. Enfin la pointe du cone ſe bouche par la quantité de la matiere qui ſe ſublime aſſez bruſquement ; de ſorte que le feu agit alors avec force ſur les dernieres couches qui ſe ſont élevées, les preſſe & les durcit extrèmement : c'eſt ce qui forme la croûte intérieure & le vuide qui reſte au centre de ce cone ſublimé. Ce vuide prend auſſi la figure de cone, parce que le feu chaſſe en haut la matiere tant qu'il peut, & l'écarte de tous côtés vers les parois du vaiſſeau. Comme elle eſt moins épaiſſe & plus ſerrée vers la baſe, il ſe forme un creux qui va toûjours en diminuant vers le haut où il ſe termine en pointe, parceque les parties n'ont pû s'écarter davantage.

En coupant un quartier de ces pains de sel Ammoniac, on peut compter entre les deux croûtes, intérieure & extérieure, jusqu'à sept à huit couches de différens degrés de densité.

Comme la plus grande épaisseur est vers la cime du pain, ce n'est pas sans raison qu'on y fait les trous que j'ai remarqués d'abord, afin de débarrasser cette partie qui se boucheroit trop promptement.

Pour établir maintenant quelque comparaison entre ces deux sortes de sels Ammoniacs, celui des Indes, & celui d'Egypte, il paroît que c'est la même composition, & que pour la qualité & l'usage qu'on en fait ordinairement, la différence ne doit pas être fort grande.

Celui des Indes a cela d'avantageux, qu'il n'est presque point chargé d'impuretés à sa surface, & qu'il n'y a que sa cime qui soit de moins bon alloi que le reste ; ce qui fait que sur la totalité de la masse, il doit y avoir moins de déchet qu'il ne s'en trouve sur les pains de sel Ammoniac d'Egypte qui sont plus chargés d'impuretés, à proportion de leur grosseur.

C'est apparemment ce qui a fait dire à Pomet, que celui qui étoit formé en pain de sucre étoit beaucoup plus estimé : peut-être étoit-il plus recherché des Teinturiers qui en employent une grosse quantité.

Au reste, il faut que ces sortes de pains ayent toûjours été assez rares, puisqu'ils sont si peu connus, & qu'on n'en trouve point de descriptions dans les Auteurs qui ont eu à traiter du sel Ammoniac.

Par sa décomposition il fournit les mêmes principes qu'on a coûtume de tirer de celui qui nous est familier, & à peu-près dans la même proportion.

Quoiqu'on trouve cette sorte de sel dans quelques listes de drogues qui se tirent des Indes, comme le marque Tavernier, il y a apparence qu'il ne vient gueres en Europe, & que les Hollandois, de qui l'on a tiré celui que j'expose aujourd'hui, n'en chargent pas beaucoup leurs Vaisseaux, & n'en font que très-peu de commerce. On sçait même qu'ils

tirent auſſi-bien que nous le ſel Ammoniac d'Egypte, par le commerce qu'ils font au Levant, & qu'il s'emploie auſſi communément chez eux pour les différens uſages à quoi il eſt propre.

Les éclairciſſemens que j'ai donnés dans mon Memoire du ſel Ammoniac, tel qu'il nous vient d'Egypte, ſur ſa fabrique & ſa compoſition, dont on n'avoit auparavant aucune connoiſſance certaine, ſembloient exiger de moi une deſcription exacte & circonſtanciée de ce nouveau ſel, qui confirmât ce que j'ai avancé, que de quelque maniere que l'Ammoniac ſe fabrique, ce doit toûjours être par la ſublimation.

Après avoir détaillé dans ce Memoire la compoſition de ce ſel, je vais dans celui-ci parler de ſa décompoſition, & donner d'abord mes obſervations ſur la maniere d'en tirer le ſel volatil urineux, ſi connu ſous le nom de *ſel d'Angleterre.*

C'eſt le même ſel qui fait la baſe du ſel volatil huileux de Silvius. Ainſi il a toûjours été connu des Chymiſtes. M. Lemery ne l'a pas omis dans ſa Chymie, même dès les premieres éditions. Ce nom de *ſel d'Angleterre* ne vient donc point de ce que les Anglois en ſont les inventeurs, mais ſeulement de ce qu'ils en ont rendu l'uſage plus fréquent, & qu'ils l'ont, pour ainſi dire, mis à la mode. En effet, ſon odeur pénétrante, ſans être deſagréable, & corrigée outre cela par les différens parfums tirés des plantes odorantes dont il prenoit le nom, comme s'il en venoit effectivement; ſa forme ſeche, qui le rend plus propre à être porté à la poche dans de petits flacons; ſon uſage pour les vapeurs & les défaillances, le mirent bien-tôt en vogue parmi les François qui aiment la nouveauté, & ſur-tout celle qui vient des Pays étrangers.

V. Chym. de Lemery, édit. 1713. pag. 478 & 481.

Dès l'année 1700 M. Tournefort publia dans les Memoires de l'Académie, que de quinze onces de ſel Ammoniac, on pouvoit tirer dix onces de ſel volatil, outre trois onces d'eſprit.

Mais ce n'eſt pas encore là tout le ſel volatil que l'Ammoniac peut donner, & j'ai trouvé, en travaillant ſur ce ſel,

qu'il en contenoit une bien plus grande quantité, que je ſuis venu à bout de développer, & de ſublimer en forme ſaline, dure, épaiſſe & tranſparente.

En effet je tire par ma méthode d'une livre de ſel Ammoniac plus de treize onces de ſel volatil en forme ſeche, c'eſt-à-dire, plus des trois quarts, au lieu que M. Tournefort n'en tiroit ſur quinze onces que les deux tiers, qui eſt cependant un point où il ſemble que nos Chymiſtes ne fuſſent point parvenus avant lui.

C'eſt un fait qui paſſe pour conſtant, que le ſel de tartre & le ſel Ammoniac étant mêlés enſemble, rendent une odeur urineuſe : cependant en prenant la précaution de les bien ſécher avant que d'en faire le mêlange, il n'en reſultera aucune vapeur urineuſe ni volatile. L'humidité de l'air ſuffit pour humecter le ſel de tartre, & le mettre en état d'agir ſur le ſel Ammoniac qui ſe fait alors ſentir par ſon odeur. Si l'on a donc ſoin de mettre ce mélange à couvert de l'humidité de l'air, on le gardera quinze jours dans un vaiſſeau bien fermé, ſans qu'il en échappe aucun eſprit urineux.

Or pour tirer du ſel Ammoniac un ſel volatil bien ſec, il faut tant qu'on peut éviter la trop grande humidité.

Laiſſant donc à part les méthodes ordinaires, qui ſont aſſez connues, je remarquerai ſeulement que M. Lemery avoit eu raiſon de dire que l'eſprit de vin, bien loin de diſſoudre le ſel volatil, contribuoit beaucoup à le conſerver, au lieu que l'eau ne fait que le réſoudre en eſprit.

Ce n'eſt pas que pour tirer du ſel volatil bien ſec, il faille rejetter abſolument toute ſorte d'humidité; car alors on ne retireroit que de ſimples fleurs qui ne ſeroient point une maſſe ſolide.

Voici donc la méthode qui m'a le mieux réuſſi. Je prends une partie de ſel Ammoniac du plus purifié, pulvériſé trés-fin ; d'une autre part je prends du ſel alkali, comme ſel de tartre, ſel de cendres gravelées, ou autre pareil, que l'on a purifié par calcination, leſſive & évaporation ; après quoi je le calcine de nouveau pour le priver d'humidité autant qu'il

eſt

est possible. On le pulvérise ensuite, & on le passe chaud par le tamis. Je fais pareillement bien sécher le sel ammoniac, jusqu'à le faire fumer. J'en pese alors une partie, & trois fois autant de sel alkali encore chaud. En cet état, ces deux sels se peuvent mêlanger exactement, sans rien déveloper de volatil. On les met dans une cornue, que l'on bouche très-soigneusement, & on les y laisse ving-quatre heures sans qu'il en émane rien qui approche de ce qui sort ordinairement du mêlange du sel ammoniac avec le sel de tartre. Je verse dans la cornue deux onces & demie d'esprit-de-vin bien rectifié pour chaque livre de sel ammoniac, avec la précaution de tenir aussi-tôt la cornue exactement bouchée, pour arrêter les sels volatils, qui ne manquent pas de s'échapper, dès que l'humidité qu'apporte l'esprit-de-vin se répand dans les sels.

Il est à propos de laisser le tout digérer en quelque sorte, quoiqu'à froid, & de remuer les sels dans la cornue pour donner lieu à l'esprit-de-vin de s'étendre, de pénétrer autant qu'il est possible les parties salines, & d'exciter une sorte de fermentation. Après douze heures de digestion, on peut déboucher la cornue, & y adapter deux balons, dont le premier a deux ouvertures pour communiquer de la cornue au second balon. On en lute bien les jointures, & le temps de sécher les luts est un surcroît de digestion. Alors on mene le feu par degrés, pour opérer la sublimation à feu de reverbere très-doux. Il sort premierement un peu d'esprit en vapeur, mais qui se condense presqu'aussi-tôt aux parois du premier balon. Ce qu'il en passe dans le second demeure liquide, & enfin tout le premier balon se garnit de sel volatil qui s'attache fermement aux parois en une croûte plus ou moins épaisse, selon la quantité de sel qu'on sublime.

Lorsqu'il ne sort plus rien, on délute les vaisseaux, on sépare la liqueur qui est contenue dans le dernier balon, & celle qui peut être restée dans le premier. Le tout ensemble rend à peu-près la quantité d'esprit-de-vin qu'on a employé. Tout le sel volatil a pris une forme seche très-solide, à la

réserve d'une petite portion qui paroît comme de la neige, parce qu'elle s'est trouvée dans le balon mêlée avec l'esprit-de-vin. Il reste encore du sel volatil dans cet esprit; car au bout de quelques jours il en dépose en forme d'aiguilles, comme il arrive aux crystallisations de sels dans les opérations ordinaires. Et si l'on survuide cette liqueur dans une autre bouteille, il s'en déposera encore à la longue en crystaux solides de différentes figures, au lieu que les premiers sont très-fins.

Ce sel, ainsi que les autres sels volatils, peut souffrir une rectification. La façon la plus commode pour toutes sortes de sels volatils, c'est de les rectifier dans les mêmes vaisseaux de verre au bain-marie, dont la chaleur est très-douce & très-égale, & en cela préférable à celle du bain de sable.

En faisant cette rectification, il est bon de joindre à ce sel les huiles essentielles dont on veut le parfumer, parce que de cette maniere il n'en prend que les parties les plus subtiles & les plus agréables à l'odorat.

La méthode que je viens de décrire, pour tirer le sel volatil en forme seche dans la plus grande quantité possible, est aussi la plus propre pour déterminer au plus près, combien le sel ammoniac contient de volatil, & la portion de sel acide avec laquelle ce volatil étoit embarrassé.

C'est ce que je vais faire voir, en comparant ce que j'ai employé de matiere avec le produit de mon opération.

J'ai pris trois livres de sel alkali, une livre de sel ammoniac, & deux onces & demie d'esprit-de-vin. Le tout ensemble fait une masse de quatre livres deux onces & demie.

J'ai retiré en forme seche treize onces trois gros de sel volatil, & de plus une once cinq gros & demi d'esprit, outre une once demi-gros qui s'est imbibé dans les papiers dont j'ai garni les jointures des vaisseaux. Cela fait en tout seize onces un gros de sel volatil, dont il faut déduire les deux onces & demie d'esprit-de-vin que j'ai employées. Reste pour treize onces cinq gros de volatil qu'a fourni une livre de sel ammoniac par mon opération.

D'autre part le *caput mortuum* resté dans la cornue, a pésé trois livres une once, quoique je n'eusse employé que trois livres de sel alkali pour intermede, d'où j'ai droit de conclurre que cette once de surplus est le poids du sel acide contenu dans la livre de sel ammoniac, & qui s'en est séparé en s'unissant au sel alkali fixe.

Or les seize onces un gros de volatil qui se sont trouvées dans les balons avec les trois livres une once qui sont restées dans la cornue, ne font que quatre livres une once un gros ; & tout ce que j'avois employé pésoit quatre livres deux onces & demie.

Il s'en faut donc une once trois gros que je ne retrouve mon poids. Déchet qui ne peut venir que du volatil qui m'est échapé, & dont je n'ai pû éviter la perte malgré toutes mes précautions.

Joignant ce poids d'une once trois gros avec treize onces cinq gros de sel volatil, qui se sont trouvées tant en forme seche qu'autrement, cela fait en tout quinze onces de sel volatil qui s'est élevé par mon opération. Je puis donc en conclurre que dans une livre de sel ammoniac il y a quinze onces de sel volatil uni & incorporé par la sublimation, avec une once seulement de sel acide marin. Cette grande quantité de volatil que je trouve contenue dans le sel ammoniac, paroîtra peut-être un paradoxe en Chimie.

M. Tournefort, qui a été plus loin que les autres, n'a tiré, comme je l'ai remarqué, de quinze onces d'ammoniac, que dix onces de sel & trois onces d'esprit, qui ne peuvent guere contenir que six gros de sel volatil. Mais outre que par sa méthode il n'a pas tiré autant de sel volatil qu'il le pouvoit, pour n'avoir pas mis assez d'intermede, il a manqué à tenir compte de ce qu'il a dû perdre de volatil en opérant.

On peut m'opposer que cette quantité extraordinaire de sel volatil que je tire de l'ammoniac n'y étoit pas absolument contenue, & que peut-être vient-elle du sel alkali qui a servi d'intermede, & dont une partie s'est volatilisée pendant l'opération.

Mais puisqu'il est impossible de retirer du sel volatil ammoniac sans un intermede alkali, celui qu'on retire par les autres méthodes, quoiqu'en moindre quantité, a-t-il plus droit de passer pour le sel volatil de l'ammoniac seul ?

De plus, par la vérification de mes pesées, que j'ai faites avec la derniere exactitude, je trouve dans ma cornue le poids de l'alkali que j'ai employé pour intermede, & une once en sus pour le sel acide qui pouvoit être contenu dans l'ammoniac. Il n'y a donc pas d'apparence que l'intermede alkali se soit volatilisé, puisqu'en ce cas j'en trouverois le poids diminué dans le résidu. Je ne crois pas non plus qu'on puisse dire que cette diminution ait été suppléée par le sel acide de l'ammoniac qui devroit être de plus d'une once sur une livre, puisque M. Tournefort, qui avoit retiré par son opération beaucoup moins de volatil, n'a trouvé qu'une demi-once pour le poids du sel acide, ce qui certainement n'est point assez pour quinze onces de sel ammoniac, comme il s'en est bien apperçû. Aussi en trouvai-je le double presque sur la même quantité. C'est un demi-gros de sel acide par once, & par les observations que j'ai faites, il ne paroît pas qu'il s'en puisse séparer davantage.

En voici la preuve : c'est que la calcination de mon mélange de sel de tartre avec l'ammoniac m'a donné précisément la même proportion de ce même sel acide que j'avois trouvé après la sublimation, comme je vais le faire voir.

J'ai pris, pour plus grande précaution, deux creusets pareils, dans chacun desquels j'ai mis trois gros de sel de tartre avec un gros de sel ammoniac, tels que je les avois employés dans ma sublimation, & la quantité d'esprit-de-vin proportionnée. Je les ai poussés à feu ouvert, pour en chasser tout ce qu'il pouvoit y avoir de sel volatil. En pésant le résidu, je l'ai trouvé, tant dans l'un que dans l'autre creuset, augmenté précisément de trois grains.

D'autre part j'avois mis dans un troisieme creuset six gros du même sel de tartre tout seul, & après une calcination pareille aux autres, puisqu'elle a été faite en même-temps &

au même feu, j'ai trouvé le résidu diminué de trois grains juste, c'est un grain & demi de diminution que la calcination a opéré sur trois gros.

Mais dans la calcination, dont je viens de parler, du mêlange du sel de tartre avec l'ammoniac, bien-loin d'avoir un grain & demi de diminution, j'ai trouvé une augmentation de trois grains. Donc le résidu de cette calcination est augmenté du poids de quatre grains & demi. Or ces quatre grains & demi ne peuvent être que le poids du sel acide contenu dans le gros de sel ammoniac que j'ai employé, & dont il fait précisément la seizieme partie. Je puis donc assûrer que la composition du sel ammoniac est telle, que de seize parties il n'y en a qu'une qui reste embarrassée dans l'intermede, & qu'il y en a quinze de volatils, comme je l'avois déja éprouvé par ma sublimation.

Je n'ai pris pour la calcination qu'une petite quantité de matieres, afin d'en avoir le poids plus juste, & le résidu de cette opération se rapporte, comme on voit, avec la derniere précision au poids que le résidu de la sublimation m'avoit fourni sur une masse considérable.

Cette augmentation de poids dans l'intermede, provient d'une portion de l'acide du sel marin qui étoit contenu dans l'ammoniac, puisque par les lotions on tire du résidu de cette calcination un sel crystallisé en forme cubique, qui est la forme particuliere aux crystaux de sel marin.

Que si l'on vient présentement à m'opposer que cet acide marin, qui étoit mêlé dans l'ammoniac, a pû se volatiliser lui-même en partie, je m'en tiendrai à mes observations, qui m'assûrent qu'en décomposant le sel ammoniac, tout devient volatil, à la réserve d'une seizieme partie qui est retenue par l'intermede dont on s'est servi.

EXPLICATION DES FIGURES.

La FIGURE I. représente un pain de sel ammoniac des Indes, formé en maniere de cone, dont le sommet seroit tronqué.

La FIG. II. représente le même pain coupé verticalement, pour montrer le creux intérieur qui est au bas du pain.

La FIG. III. représente le même pain coupé horisontalement, où l'on fait voir l'épaisseur de la croûte qui envelope tout le pain & l'arrangement des couches qui en forment la masse intérieure.

La FIG. IV. représente un quartier de l'intérieur de ce pain, détaché d'en haut, qui fait voir que les couches sont moins serrées vers le haut du pain que vers le bas.

Les FIG. V. & VI. représentent un pain de sel ammoniac ordinaire, tel qu'il nous vient d'Egypte, vû par dessus & par dessous.

DERNIERES REMARQUES
SUR UN CAS SINGULIER
DU
PROBLEME DES TANGENTES.

Par M. SAURIN.

28 Juin 1724.

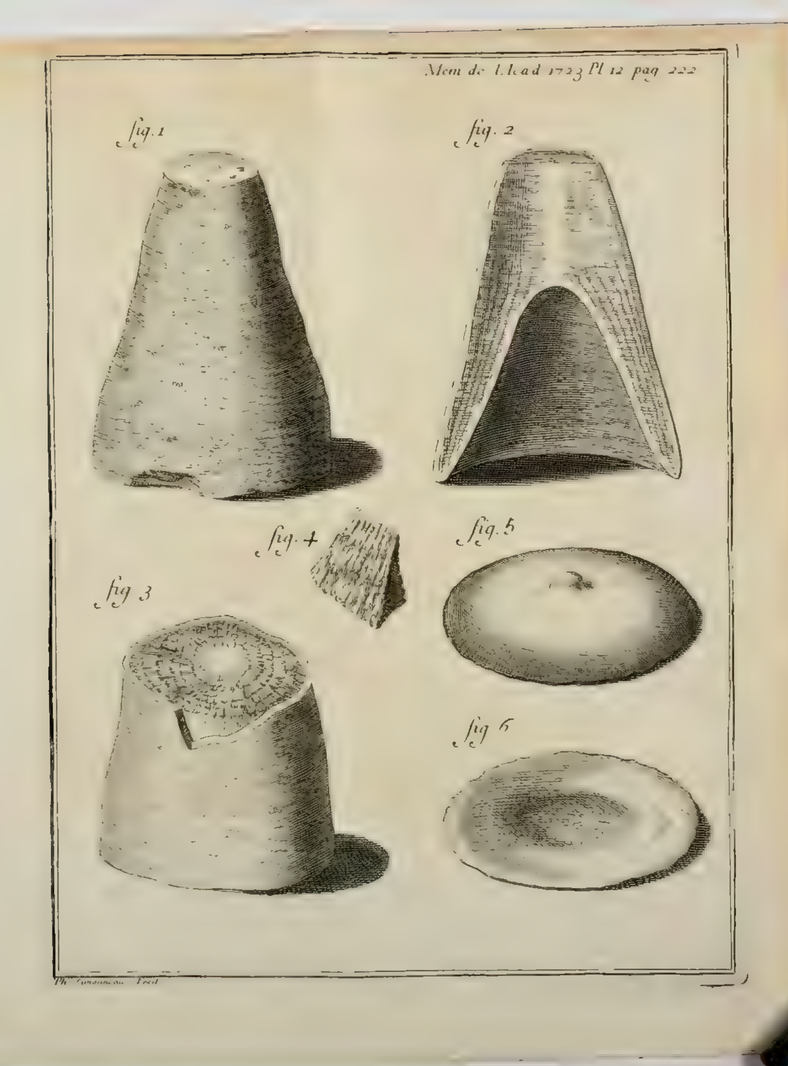
EN commençant mes remarques sur le Problème général des tangentes, je les réduisis à quatre articles. J'ai traité les trois premiers dans deux Mémoires précédens, imprimés parmi ceux de 1716. Voici le quatrieme & dernier.

Suivant mon engagement, je dois donner pour la résolution du cas singulier dont il s'agit, une méthode nouvelle qui s'étende à tous les exemples qui peuvent être proposés, & qui s'y applique immédiatement, sans exiger ni transformation d'axe, ni aucune autre préparation. J'ai quelque grace à demander là-dessus. Il s'étoit présenté à mon esprit une idée légere de la regle en question; & sur cette premiere vûe, je me hâtai de la promettre comme nouvelle : mais en l'examinant, j'ai d'abord reconnu qu'elle n'est pas différente de celle

fig. 2.

fig. 5.

fig. 6.


Mem de l'Acad 1723 Pl 12 pag 222
fig. 1
fig. 2
fig. 4
fig. 5
fig 3
fig 6

qui a fait le ſujet des deux Mémoires précédens, & qu'elle n'en eſt proprement qu'un abrégé : elle ne l'abrege même que très-peu, lorſque les valeurs données de l'appliquée & de l'abſciſſe ſont réelles ; mais elle la rend conſidérablement plus courte & plus aiſée, quand au point donné les valeurs des co-ordonnées ſont l'une & l'autre égales à zéro. La voici appliquée aux exemples mêmes propoſés dans les premiers Mémoires.

Soit donc $y^4 - 8aayy + aaxx = 0$, l'équation de la
$\quad\quad - 6axyy$
courbe à quatre rameaux, rapportée à deux axes qui ſe coupent perpendiculairement au point d'interſection de deux de ces rameaux : on demande les tangentes à ce point-là, point d'origine des co-ordonnées, & où par conſéquent elles ſont l'une & l'autre égales à zéro.

Il ne s'agit que de trouver en ce point le rapport du dy au dx, ou la valeur de $\frac{dy}{dx}$. La regle générale ordonne de différentier l'équation, & de répéter les différentiations, en ne prenant que les premieres différences, juſqu'à ce que les x & les y diſparoiſſent. Les termes venus de ces différentiations, étant rangés en différentes colonnes, ſuivant le degré des dimenſions des différences dy, dx; on ſubſtitue dans chaque colonne les valeurs données de x & de y, en commençant par celles où les différences ne ſont qu'au premier degré, & paſſant ainſi de l'une à l'autre, juſqu'à ce qu'on en ait trouvé une dont les termes ne ſoient pas détruits par la ſubſtitution. C'eſt des termes non détruits de cette colonne que l'on tire la valeur cherchée de $\frac{dy}{dx}$.

Au lieu de tout cela, qui ſeroit long à faire dans l'exemple propoſé, & incomparablement plus dans d'autres; je dis, les co-ordonnées x & y paſſent par le dx & le dy avant que de venir à leur valeur donnée ; c'eſt-à-dire, dans notre exemple, qu'elles deviennent dx & dy avant que de devenir égales à zéro. Sur ce principe je ſubſtitue partout dans l'équation propoſée dx & ſes puiſſances, au lieu de x & de ſes puiſſan-

ces, & de même dy & ses puissances, au lieu de y & de ses puissances.

Ainsi au lieu de $y^4 - 8aayy - 6axyy + aaxx = 0$; j'ai tout d'un coup $dy^4 - 8aady^2 - 6adxdy^2 + aadx^2 = 0$; ce qui me donne, en négligeant dy^4 & $6adxdy^2$, $8aady^2 = aadx^2$; & $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{8}$, ou $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Soit encore $x^4 - ayxx + by^3 = 0$, une courbe dont il faille trouver les tangentes au point qui donne $x = 0$ & $y = 0$; suivant mon principe, cette équation devient au point proposé $dx^4 - adydx^2 + bdx^3 = 0$; & négligeant dx^4, on a $bdy^3 = adydx^2$. D'où l'on tire $dy = 0$; & $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{b}{a}$, ou $\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$.

L'équation du *folium* de M. Descartes, les deux axes étant les deux tangentes au point d'intersection, est celle-ci, $x^3 - 3pyx + y^3 = 0$; on demande la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en ce point-là, où les co-ordonnées sont l'une & l'autre $= 0$. Ma méthode me donne $dx^3 - 3pdydx + dy^3 = 0$; d'où il vient $dydx = 0$; & en effet dans le point d'interfection des tangentes, qui sont les deux axes, le dy est nul par rapport au dx, à l'égard de l'une des branches; & le dx est nul par rapport au dy, à l'égard de l'autre branche; & c'est ici une remarque que nous aurons occasion de rappeller plus bas.

Si l'on prend pour les deux axes de la même courbe une parallele à son asymptote, passant par le point d'intersection, & la perpendiculaire à cette parallele au même point; l'équation, en se servant des mêmes lettres, sera $\sqrt{2} \times x^3 - 3pxx + 3\sqrt{2} \times yyx + 3pyy = 0$, qui devient au point donné $\sqrt{2} \times dx^3 - 3pdx^2 + 3\sqrt{2} \times dxdy^2 + 3pdy^2 = 0$; & l'on a $3pdy^2 = 3pdx^2$, & $dy^2 = dx^2$; ce qui est évident par soi-même, les tangentes faisant entr'elles un angle droit, & faisant avec les deux axes des angles de 45 degrés.

Si, au lieu de la parallele à l'asymptote, on prend l'asymptote même, on aura pour l'équation $x^3 - 3\sqrt{2} \times pxx + \frac{9}{2}ppx + 3yyx - \sqrt{2} \times p^3 = 0$; qui, en prenant $\frac{1}{2}a$ pour $\frac{p}{\sqrt{2}}$

se

se changera en celle-ci, $4x^3 - 12axx + 9aax + 12yyx - 2a^3 = 0$; & si le point d'intersection est encore le point donné, où y étant toûjours $= 0$, x devient $= \frac{1}{2}a$, selon mon principe il faudra toûjours substituer dans l'équation, au lieu de y & ses puissances, dy & ses puissances : mais selon le même principe, x devenant ici $= \frac{1}{2}a - dx$ avant que de devenir $= \frac{1}{2}a$, il faut substituer, au lieu de x & ses puissances, $\frac{1}{2}a - dx$ & ses puissances. En faisant cette substitution, on aura, après avoir effacé ce qui se détruit, $4dx^3 - 12dy^2dx - 6adx^2 + 6ady^2 = 0$; & négligeant $4dx^3 - 12dy^2dx$, il reste $6ady^2 = 6adx^2$, & $dy^2 = dx^2$; ce qui fait voir, comme auparavant, que les tangentes font avec les axes des angles de 45 degrés.

Soit encore ici $y^4 - 4ay^3 + 4aayy + 12aaxy + aaxx - 6axyy - 8a^3x = 0$, la courbe de notre premier exemple, mais rapportée à d'autres axes qui donnent au même point déja proposé, $x = y = a$. Suivant le principe établi, y devient $= a - dy$ avant que de devenir $= a$; & de même on a $x = a - dx$ avant que de l'avoir $= a$; je substitue donc d'abord dans l'équation $a - dy$ & ses puissances, au lieu de y & ses puissances; $a - dx$ & ses puissances, au lieu de x & ses puissances, & par cette substitution l'équation se trouve réduite à celle-ci, $dy^4 - 6adxdy^2 - 8aady^2 + aadx^2 = 0$; d'où l'on tire, en négligeant $dy^4 - 6adxdy^2$, $8aady^2 = aadx^2$, $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{8}$, & $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$, comme on l'a déja trouvé.

La regle générale, expliquée dans mes autres Mémoires, se forme, en substituant dans l'équation $y - dy$, ou $y + dy$, & $x - dx$, ou $x + dx$ & leurs puissances, à la place de y & de x & de leurs puissances. Après cette substitution il en faut faire une autre des valeurs de x & de y dans les termes venus de la premiere, & rangés en différentes colonnes, selon les différentes dimensions de dy & dx. Il est évident que la substitution que je fais d'abord, renfermant celle des

valeurs données, fait évanoüir dans le réſultat tous les termes qui ſe détruiſent par la ſeconde ſubſtitution de la regle générale; & c'eſt par-là qu'elle ſe trouve abrégée : mais, ainſi que je l'ai dit dès le commencement, beaucoup moins que lorſque les valeurs données ſont l'une & l'autre égales à zéro.

Au reſte cette regle que nous avons tant examinée, & que nous venons d'abréger, n'eſt point abſolument néceſſaire, & l'on peut réſoudre le cas propoſé des points à pluſieurs tangentes par la ſeconde ſection de l'analyſe des infiniment petits, ſans recourir à l'article 163. de la 9me. Il n'y a qu'à faire évanoüir dans la fraction donnée par la premiere différenciation une des inconnues, & diviſer enſuite le nouveau numérateur, & le nouveau dénominateur par le plus grand commun diviſeur. C'eſt ce que je vais faire voir dans le dernier exemple même auquel je viens d'appliquer mon abrégé; & comme, en le propoſant à nos méthodes, on n'y a pas gardé la loi des homogenes, je le mettrai ici tel qu'il nous a été propoſé.

Soit donc l'équation $A \ldots y^4 - 8y^3 \begin{matrix} - 12xyy \\ + 16yy \end{matrix} + 48xy \begin{matrix} + 4xx \\ - 64x \end{matrix} = 0$, l'équation propoſée d'une courbe dont il faut trouver les tangentes au point qui donne $y = x = 2$. On a par la ſection 2. de l'analyſe des infiniment petits, $\frac{dy}{dx} = \frac{3yy - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x}$; je vais faire évanoüir l'inconnue y, en ſubſtituant partout dans cette fraction ſa valeur en x.

Comme l'équation a quatre racines, & que y, par conſéquent y a quatre valeurs; ſçavoir,

$$\left\{\begin{matrix} y = 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x} \\ y = 2 - \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} y = 2 + \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x} \\ y = 2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x} \end{matrix}\right. ;$$

il faut prendre pour la ſubſtitution une de celles où $y = 2$ donne auſſi $x = 2$; je prends donc celle-ci $y = 2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x}$, & j'ai $3yy = 24 + 18x - 12\sqrt{4x} + 12$

$\sqrt{4+2x} - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}; - 12y = - 24 + 12\sqrt{4x} - 12\sqrt{4+2x}$; donc $3yy - 12y = 18x - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; & $3yy - 12y - 2x + 16 = 16x - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x} + 16$; cette derniere quantité eſt le nouveau numérateur de la fraction.

$y^3 = 32 + 36x - 16\sqrt{4x} + 16\sqrt{4+2x} - 12\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x} - 6x\sqrt{4x} + 14x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2$; $- 6yy = - 48 - 36x + 24\sqrt{4x} - 24\sqrt{4+2x} + 12\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x}$; $+ 8y = 16 - 8\sqrt{4x} + 8\sqrt{4+2x}$; $- 6xy = - 12x + 6x\sqrt{4x} - 6x\sqrt{4+2x}$: Donc $y^3 - 6yy + 8y - 6xy = - 12x + 8x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2$; & $y^3 - 6yy - 8y - 6xy + 12x = 8x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2$, quantité du nouveau dénominateur. On a donc $\frac{dy}{dx} = \frac{16x - 6\sqrt{4x} \times \sqrt{4+2x} + 16}{8x\sqrt{4+2x} - 2\sqrt{4x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2}$

$= \frac{16x - 12\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x} + 16}{8x\sqrt{4+2x} - 4\sqrt{x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2}$; & diviſant par 4; $\frac{dy}{dx}$

$= \frac{4 + 4x - 3\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}}{2x\sqrt{4+2x} - \sqrt{x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2} = \frac{4 + 2x + 2x - 3\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x}}{2x\sqrt{4+2x} - \sqrt{x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2}$

$= \frac{\overline{\sqrt{4+2x}}^2 - 3\sqrt{x} \times \sqrt{4+2x} + 2x}{2x\sqrt{4+2x} - \sqrt{x} \times \overline{\sqrt{4+2x}}^2}$. Il eſt évident que cette fraction eſt diviſible haut & bas par $\sqrt{4+2x} = 2\sqrt{x}$, & que cette diviſion donne $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4+2x} - \sqrt{x}}{- \sqrt{4+2x} \times \sqrt{x}} =$ (en mettant pour x ſa valeur 2) $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{- \sqrt{8} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{- \sqrt{16}} = \frac{\sqrt{2}}{- \sqrt{16}}$; donc $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$; & $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ce qu'il falloit trouver.

Soit cette autre équation $P \ldots y^4 - 2by^3 - 2axyy + bbyy - 2abxy + aaxx = 0$, pour avoir les tangentes au point

de cette courbe où les co-ordonnées y & x sont égales à zéro. La regle propoſée dans ce Mémoire donnera tout d'un coup $bbdy^2 - 2abdxdy + aadx^2 = 0$, & $dy - \frac{dx}{b} = 0$, & $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$. Mais ſans avoir recours à cette regle ; ſi l'on fait évanoüir l'une des inconnues par la ſubſtitution de ſa valeur en l'autre, on trouvera la même choſe, en ne ſe ſervant que de la méthode ordinaire des *infiniment petits*. Suivant cette méthode, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{2ayy + 2aby - 2aax}{4y^3 - 6byy - 4axy - 2abx + 2bby}$. L'équation P peut être réduite ſous les ſignes radicaux à cette forme, $y - \sqrt{ax} - \sqrt{by} = 0$; ou $\sqrt{ax} = y - \sqrt{by}$; d'où l'on tire $x = \frac{yy + by \pm 2y \times \sqrt{by}}{a}$. En ſubſtituant cette valeur de x en y dans la fraction différentielle $\frac{2ayy + 2aby - 2aax}{4y^3 - 6byy - 4axy - 2abx + 2bby} = \frac{dy}{dx}$, on aura celle-ci,

$$\frac{2ayy + 2aby - 2ayy - 2aby \mp 4ay\sqrt{by}}{4y^3 - 6byy - 4y^3 - 4byy \mp 8yy\sqrt{by} - 2byy - 2bby \mp 4by\sqrt{by} + 2bby}$$

qui étant corrigée, ſe réduit à $\frac{\mp 4ay\sqrt{by}}{12byy \mp 8yy\sqrt{by} \mp 4by\sqrt{by}}$ = (en diviſant par le commun diviſeur $4y\sqrt{by}$) $\frac{\mp a}{3\sqrt{by} \mp 2y \mp b}$, ou mettant pour y ſa valeur donnée zéro, il vient enfin $\frac{\mp a}{\mp b} = \frac{dy}{dx}$. Ce qu'il falloit trouver.

Soit pour dernier exemple l'équation $Q \ldots y^3 - 3ayy + 3aay - axx + 2aax - 2a^3 = 0$; on cherche les tangentes de la courbe exprimée par cette équation au point qui donne $y = x = a$. Suivant la méthode de la ſection 2. des infiniment petits, il vient $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay - 3aa} = \frac{0}{0}$, en ſubſtituant pour x & pour y leur valeur commune a: mais ſi avant cette ſubſtitution, on y fait celle de y en x, ou de x en y, enſorte que l'une ou l'autre s'évanoüiſſe, on trouvera le rapport réel de dy à dx. Prenons la valeur de y;

l'équation réduite aux ſignes radicaux, donne $y = a + \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\overline{a-x}^{2}}$; donc $yy = aa + 2a\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\overline{a-x}^{2}} + \sqrt[3]{aa} \times \sqrt[3]{\overline{a-x}^{4}}$; ſi l'on met ces deux valeurs de y & de yy dans le dénominateur de la fraction $\frac{2ax-2aa}{3yy-6ay+3aa}$, on aura

$$\frac{2ax-2aa}{3aa+6a\sqrt[3]{\overline{a-x}^{2}}+3\sqrt[3]{aa}\times\sqrt[3]{\overline{a-x}^{4}}-6aa-6a\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{\overline{a-x}^{2}}+3aa};$$

ôtant ce qui ſe détruit, il viendra $\frac{2ax-2aa}{3\sqrt[3]{aa}\times\sqrt[3]{\overline{a-x}^{4}}}$

$$= \frac{-2a \times \overline{a-x}}{3\sqrt[3]{aa}\times\sqrt[3]{\overline{a-x}^{4}}} = \frac{-2\times\sqrt[3]{a^3}\times\overline{a-x}}{3\sqrt[3]{aa}\times\sqrt[3]{\overline{a-x}^{4}}};$$

& diviſant par le commun diviſeur $\sqrt[3]{aa} \times \overline{a-x}$, on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}} = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{0}$, en mettant pour x ſa valeur a. Ce qui donne une tangente commune à deux rameaux, & perpendiculaire à l'axe des x.

Il n'eſt pas néceſſaire d'ajoûter d'autres exemples : on voit aſſez que toutes les fois qu'ayant les racines de l'équation, on pourra faire évanoüir dans la fraction différentielle une des inconnues, & diviſer le réſultat de cet évanoüiſſement par le plus grand commun diviſeur, on aura le rapport véritable du dy au dx, & par conſéquent les tangentes requiſes. Ce n'eſt en effet que ce commun diviſeur égal à zéro, qui rend égaux à zéro le numérateur & le dénominateur de la fraction, & ce commun diviſeur s'y trouve toûjours dans les points de concours de pluſieurs rameaux, ſoit points d'interſection, ſoit points d'attouchement, parce que les inconnues de l'équation ayant l'une & l'autre dans ces points-là autant de racines égales qu'il y a de rameaux, la premiere différenciation n'en ôte qu'une, & en laiſſe une autre, s'il y en avoit deux; ou deux, s'il y en avoit trois; ou trois, s'il y en avoit quatre, &c. Et ce ſont ces racines qui reſtent dans le numérateur & dans le dénominateur qui les rendent égaux à zéro,

ainsi que je l'ai déja expliqué dans mon premier Mémoire sur cette matiere.

C'est pour n'avoir pas fait assez attention à cette raison que j'ai donnée du cas où l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, que feu M. Guinée; fort habile d'ailleurs, est tombé dans un paralogisme, dont il est surprenant qu'il ne se soit point apperçû. Ce paralogisme qui entraîne après lui bien des absurdités, fait grand tort à un Mémoire, à cela près excellent, que l'on a de cet Auteur parmi ceux de l'année 1706. Le Mémoire a pour titre, *Observations sur la Méthode* de maximis & minimis, *&c.* Et le paralogisme mérite d'autant plus d'être relevé, qu'il a été une occasion de chûte au sçavant Commentateur de l'*Analyse des infiniment petits* de M. le Marquis de l'Hôpital, en lui donnant lieu de faire plusieurs remarques plus subtiles que solides, non-seulement sur l'endroit particulier où est le paralogisme, & sur quelques autres du Mémoire, mais aussi en général sur toute la matiere *de maximis & minimis.*

On avoit proposé à M. Guinée quelques difficultés sur la sect. 3. des infiniment petits, où l'Auteur de ce Traité donne l'usage du calcul différentiel dans les questions des plus grandes & des plus petites appliquées. Comme les points des courbes, où se terminent ces appliquées, se trouvent par la supposition du rapport des différences dy, dx, donné dans ces points-là, M. Guinée a crû devoir expliquer les divers rapports que ces différences peuvent avoir dans les différens points des courbes: & d'abord il les réduit à ces trois genres; rapport fini, rapport infini, & rapport *indéterminé.* Le rapport fini est lorsque les différences sont entr'elles comme deux quantités finies; le rapport infini est celui où l'on a $\frac{dy}{dx} = \frac{m}{0}$, ou $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{m}$ (m étant une quantité finie quelconque); le rapport *indéterminé* est notre $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. Il l'appelle *indeterminé*, parce que, pour me servir de ses propres termes, $\frac{0}{0}$ *peut être égal à une quantité quelconque* p; *puisque* p *multipliée par le dénominateur zéro, produit le numérateur*

zéro. Cette application du rapport indéterminé, fait entendre, ce me semble, que dans les points où la fraction différentielle le donne tel, il peut être réellement un rapport déterminé, soit fini, soit infini, & que la fraction, dans ce cas, ne le donne indéterminé qu'à cause d'un multiplicateur commun = o, qui s'y trouve dans le numérateur. Jusqu'ici tout va bien : mais ce qui suit ne va pas de même.

Personne n'ignore, dit M. Guinée, après cette courte exposition, *qu'il ne se rencontre entre les différences* d x *&* d y *des co-ordonnées des courbes, des rapports finis & infinis dans différens points des mêmes courbes : mais on ne sçait peut-être pas si généralement qu'il s'y rencontre quelquefois certains points où le rapport de* d x *&* d y *est indéterminé ; c'est pourquoi*, ajoûte-t-il, *j'ai jugé à propos de le démontrer ici.*

Les difficultés de feu M. Rolle sur ces points-là, & les solutions données à des difficultés, avoient déja fait connoître, & le rapport & les points où il se présente. Quoi qu'il en soit, voici comme est énoncé le Théorème que M. Guinée se propose de démontrer.

Le rapport des différences d x *&* d y *des co-ordonnées des courbes est indéterminé dans tous les points d'intersection (qui seront dans la suite appellés* nœuds*) de deux rameaux où les tangentes ne sont pas paralleles aux co-ordonnées ; ou, ce qui est la même chose, aux axes conjugués, soit que l'on suppose* d x *ou* d y = o.

Ce Théorème, ainsi énoncé, est plein d'équivoques & d'erreurs, c'est une vérité de fait, & qui n'a pas besoin de démonstration que dans les points d'interfection, ou *nœuds*, comme les appelle M. Guinée, l'équation différentielle d'où l'on tire le rapport des différences, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. 1°. S'il y a quelque chose à démontrer, c'est la raison pourquoi le rapport de dy à dx, étant réellement déterminé dans ces points-là, il ne laisse pas de se présenter dans la fraction différentielle sous la forme du rapport indéterminé $\frac{o}{o}$. 2°. M. Guinée restraint ce rapport indéterminé aux points d'inter-

ſection ; erreur conſidérable, le rapport des différences ſe préſentant également indéterminé dans tous les points de rencontre de pluſieurs rameaux, ſoit points d'interſection, ſoit points d'attouchement, quoique réellement déterminé dans les uns & dans les autres. 3°. A l'égard des ſeuls points, même d'interſection, M. Guinée ſe renferme encore dans ceux *où les tangentes ne ſont point paralleles aux co-ordonnées, ou aux arcs conjugués;* autre erreur, d'autant plus remarquable, que dans les points d'interſection en particulier où les rameaux ſe coupant à angles droits, les tangentes ſe trouvent paralleles aux axes conjugués, non-ſeulement l'équation différentielle donne $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$ à cauſe du concours des racines égales : mais réellement dans ces points-là dy eſt = à zéro par rapport à dx, à l'égard de l'un des rameaux, & dx à ſon tour eſt égal à zéro par rapport à dy, à l'égard de l'autre rameau; ce que je ferai voir bien-tôt, ainſi que je l'ai promis au commencement même de ce Mémoire. 4°. C'eſt une pure brouillerie que ces mots qui finiſſent l'énoncé du Théorème, *ſoit que l'on ſuppoſe* dy *ou* dx = o. Ce n'eſt pas la ſuppoſition de dy ou $dx = o$ qui fait que dans les points dont il s'agit, l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$: mais c'eſt parce qu'on y trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$, que la ſupppoſition de $dy = o$ & de $dx = o$ donne ces mêmes points. Que ſi M. Guinée veut dire, comme en effet on verra tout-à-l'heure qu'il le veut dire, que dans les points d'interſection où les tangentes ne ſont pas paralleles aux axes conjugués, l'une des différences ne peut pas devenir égale à zéro que l'autre ne le devienne auſſi; il ne dit rien qui ſoit particulier aux points d'interſection, rien qui ne convienne à tous les points pris ſur un ſeul rameau, & où le rapport des différences eſt un rapport fini, & donné fini par la fraction différentielle.

Le dernier ſens que je viens de donner à cette fin de l'énoncé, *ſoit que l'on ſuppoſe* dy *ou* dx = o, paroît évidemment dans la nouvelle expoſition que M. Guinée fait de ſon

son théorème, en l'appliquant à l'exemple de la courbe *KADBL*, & dans la démonstration qui la suit.

Soit, dit-il, *la courbe* KADBL *qui a un nœud en* D, *dont les axes conjugués sont* AB, AC; *& les co-ordonnées* AP *ou* AQ, x, PM, *ou* QN, y; *il faut démontrer que si les tangentes au point* D, *ne sont pas paralleles aux axes conjugués* AB, AC, *les différences* dx *&* dy *deviendront toutes deux égales à zéro au point* D, *par la supposition de l'une des deux* = o.

Voilà ce que M. Guinée se réduit à démontrer, & ce qu'en effet il démontre de cette sorte.

Par un point quelconque *M*, pris sur le rameau *AD* » soient menées les droites, *FMN* parallele à *AB*, qui ren- » contrera le rameau *BD* en *N*; *MP*, *NQ* & *DE* paralleles » à *AC*. Si l'on suppose présentement que le point *M* s'appro- » che de plus en plus à l'infini du point *D*; *MN*=*PQ* devien- » dra enfin *dx*, & *OD dy*; de sorte que par la supposition de » *MN* ou *OD* = o, le point *M* tombera en *D*; les points *O* » & *N* tomberont aussi en *D*, & par conséquent *MN* & » *OD*, *dx* & *dy* seront nulles, ou = o, parce que le point » d'intersection en *D* est un point mathématique, l'angle » *MDN* étant d'une grandeur finie; *ce qui n'arriveroit pas de* » *même, si les rameaux* AD, BD, *se touchoient en* D, *car* MN » *devenant nulle*, OD *demeureroit égale au petit côté de l'attouche-* » *ment, & par conséquent infinie par rapport à* MN. Il est donc » constant que dans les nœuds le rapport de *dx* à *dy* est in- » déterminé, ou = o par la supposition de *dx* ou *dy* = o. »

M. Guinée a donc ici démontré que *si les tangentes au point* D, *ne sont pas paralleles aux axes conjugués* AB, AC, *les différences* dx *&* dy *deviendront toutes deux égales à zéro par la supposition de l'une des deux* = o; & c'est à quoi il s'étoit réduit: mais c'est de quoi il n'étoit nullement question dans le cas où l'on trouve $\frac{dy}{dx} = \frac{o}{o}$. Dans tout point de courbe, comme je l'ai déja dit, où le rapport de *dx* à *dy* est un rapport fini, soit que ce soit un point d'intersection, ou que ce soit un point particulier à un seul rameau, il est

évident que si l'une des différences devient $= 0$, l'autre le devient aussi, & qu'elles s'évanoüissent ensemble en tombant sur le point. Supposons le point *D* pris sur le seul rameau *K A D H*, ne pourrai-je pas faire à l'égard du point *D* ou de tout autre pris à volonté sur le même rameau; ne pourrai-je pas faire, dis-je, le même raisonnement que fait M. Guinée dans sa démonstration? Ne sera-t-il pas vrai dans ce cas comme dans le sien que le point *O* tombant en *D*, le point *M* y tombera aussi, & que *O D* (dy) étant égal à zéro, *M N* (dx) sera aussi égal à zéro?

C'est indépendamment de toute supposition de $dy = 0$, ou de $dx = 0$, que l'on trouve au point d'intersection *D*, $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; on le trouve ainsi sans faire tomber ni *O D* (dy) ni *M O* (dx) *sur le point mathématique* D: on le trouve ainsi, non parce que le point *D* est *un point mathématique*, mais parce que c'est un point de concours de plusieurs racines égales: on le trouveroit de même *si les rameaux* A D, B D, *se touchoient en* D, quoique M N *y devenant nulle*, O D *demeurât égale au petit côté de l'attouchement*. Encore une fois soit dans les points d'interfection, soit dans les points d'attouchement, le rapport des différences est réellement déterminé: mais dans les uns & dans les autres il se montre indéterminé à cause de la pluralité des racines égales; d'où naît dans la fraction différentielle un commun multiplicateur $= 0$, qui la rend par conséquent $= \frac{0}{0}$; & c'est pour l'ôter qu'il faut ou répéter les différentiations, ou faire évanoüir une des inconnues, & diviser ensuite la fraction résultante par le plus grand commun diviseur; comme je l'ai exécuté dans ce Mémoire à l'égard de la courbe même *K D B L* prise ici pour exemple par M. Guinée.

Commentaire. page 114.

Je viens au Commentaire sur les infiniment petits, la démonstration de M. Guinée y est combattue: mais par un raisonnement moins recevable encore que la démonstration même *M. Guinée*, dit-on, *pose en fait que si la supposition de* $dy = 0$, *& celle de* $dx = 0$, *donnent la même valeur au*

lieu d'un maximum *ou d'un* minimum, *ou à un nœud.*

L'Auteur de ce Commentaire, dont le mérite dans les ſciences eſt ſi connu, & que je fais profeſſion d'honorer parfaitement, ayant trouvé cette regle en défaut dans pluſieurs exemples, où la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ donne d'autres points que des points d'interſection, a jugé avec raiſon qu'il falloit que la prétendue démonſtration de la regle fût fauſſe ou défectueuſe : mais n'ayant ni aſſez conſidéré la nature des points donnés par la ſuppoſition, ni aſſez compris que la démonſtration de M. Guinée n'étoit point du tout au fait de la queſtion, il paroît avoir crû que la regle ſeroit démontrée, ſi l'on convenoit que dans le point d'interſection *D* de la courbe propoſée, les différences *dy* & *dx* tombant ſur le point même *D*, devenoient l'une & l'autre égales à zéro : c'eſt ce qui l'a jetté dans une ſubtilité qu'il trouvera lui-même frivole, pour peu qu'il veuille y penſer. Cette ſubtilité eſt de regarder les deux rameaux qui ſe coupent comme ayant de la largeur ; d'où il réſulte, ſuivant ſa penſée, que ces deux rameaux ſe coupant obliquement au point *D*, ce nœud a quelque étendue, & n'eſt pas un point mathématique, & qu'ainſi il y a réellement au point *D* un *dy* & un *dx*. Après avoir rapporté la propoſition de M. Guinée que l'on a vûe ; *on pourroit,* dit-il, *lui faire quelques difficultés ſur la preuve qu'il apporte de ſa propoſition.* LBNDS *&* KAMD *ſe croiſent bien en* D ; *& au point* D, NO (x) *&* OD (y) *s'évanoüiſſent ; mais il ne s'enſuit pas qu'en* D *il n'y ait ni* dx *ni* dy ; *car* SDN *coupe obliquement* DM, *& par conſéquent leur nœud a quelque étendue : & comme* NDS *n'eſt pas perpendiculaire ſur* AMD, *elle eſt couchée ſur plus d'un point, & l'on peut concevoir une* dy *qui réponde à ſon élévation le long de l'oblique* MD. *Ibidem.*

C'eſt un paradoxe qu'on ne reçoit point en Géométrie qu'un nœud qui a de l'étendue. Tout point d'interſection de deux lignes, ſoit droites, ſoit courbes, eſt un point mathématique, les lignes elles-mêmes étant mathématiques & ſans

aucune largeur. Mais quelle néceſſité d'avoir recours à ce paradoxe, pour trouver au point *D* un dx & un dy? Qui ne voit qu'en ce point les valeurs de x & de y étant l'une & l'autre $= a$ dans l'équation de M. Guinée, elles paſſent, ainſi qu'on l'a dit ſi ſouvent dans ce Mémoire, x par $a - dx$, & y par $a - dy$, avant que de venir $= a$, en tombant ſur le point *D*? Et en effet mes ſolutions précédentes ont montré qu'on y a réellement $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, ou $= \frac{1}{a\sqrt{2}}$, en prenant a pour 2, comme a fait M. Guinée dans ſon équation. M. Guinée n'ignoroit pas ce rapport réel & déterminé des différences dans ce point, & il n'avoit garde de rien avancer de contraire dans ſa démonſtration; ce qu'il y avance, & qui eſt très-vrai, c'eſt que ſi l'on ſuppoſe le $dx = 0$, en le faiſant tomber ſur le point *D*, le dy tombant avec le dx ſur le même point, devient auſſi $= 0$.

L'illuſion de M. Guinée eſt d'avoir crû trouver en cela, & démontrer par cela, la raiſon qui fait que les valeurs de x & de y qui conviennent aux points d'interſection, étant ſubſtituées dans l'expreſſion générale du rapport des différences dx & dy tirée de l'équation différentielle de la courbe, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; & réciproquement que les points d'interſection ſont donnés par la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$.

Si l'idée du concours des racines égales dans les points de rencontre de pluſieurs rameaux s'étoit préſentée à M. de Crouzas, ſa pénétration ordinaire lui auroit fait aiſément découvrir que dans les exemples qu'il oppoſe à la propoſition de M. Guinée, les points donnés par la ſuppoſition de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, ne ſont pas à la vérité des points d'interſection, mais que ce ſont des points d'attouchement, & par conſéquent toûjours des points de rencontre de pluſieurs rameaux. Parmi ces exemples il n'en auroit pas mis dans leſquels il ſuppoſe des points d'interſection, qui cependant ne ſont pas donnés par le rapport de $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; de ſorte que ſelon lui, la regle

proposée non-seulement donne des points d'intersection où il n'y en a pas, mais encore elle manque d'en donner où il y en a. Enfin il n'auroit pas pris occasion de-là de recommander si souvent l'attention au sujet que l'on traite, en l'opposant en quelque sorte au calcul exact de l'équation qui en renferme la nature & les propriétés. Rapportons quelques-uns des endroits les plus remarquables.

C'est l'article 49. des *infiniment petits* qui a donné lieu aux difficultés proposées à M. Guinée, & aux observations qu'il a faites pour les éclaircir. L'exemple que M. le Marquis de l'Hôpital y présente à sa méthode *de Max. & Min.* est mon exemple *Q*, le dernier de ceux auxquels j'ai appliqué les remarques données dans ce Mémoire, & le premier que M. de Crouzas oppose à la regle de M. Guinée. Il est proposé dans l'analyse des infiniment petits sous les signes radicaux, comme on le voit ici en *H*.

$$H \ldots y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}.$$

Après que M. de Crouzas a expliqué comment de cette équation différentiée sous cette forme, on tire $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$; il montre selon les idées, & par les raisonnemens de M. Guinée, qu'outre le *Minimum* de M. le Marquis de l'Hôpital, que la supposition de $dx = 0$ donne au point où $x = a$, il y a encore dans cette courbe deux *Maxima* au point où (la courbe étant supposée continuée à l'infini) y est infiniment grand par rapport à a, & x infiniment grand encore par rapport à y; point indiqué par la supposition de $dy = 0$. Ces *Maxima* infinis de M. Guinée, & particulierement le raisonnement qu'on fait sur le -2 qui multiplie $\sqrt[3]{a}$ dans le numérateur, demanderoient de n'être point passés sans réflexion: mais je ne m'y arrête pas ici, pour suivre M. de Crouzas.

Il reprend l'équation $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, & l'ex-

primant par ſon équivalente $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, il tire de la différentiation de cette équation équivalente, $\frac{dy}{dx} = \frac{2a - 2x}{3\sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}}$, où trouvant la même valeur de $x = a$, donnée par l'une & l'autre ſuppoſition de $dy = 0$, & de $dx = 0$, il en forme une objection contre M. Guinée, dont la regle devroit donner ici un point d'interſection, qui n'y eſt pas. *M. Guinée,* dit-il, *prétend que c'eſt-là une preuve d'un faux* Maximum, *ou d'un nœud. Mais ce caractere eſt équivoque ; il faut ſe rendre attentif au ſujet dont il s'agit, & non pas aux ſignes, pour faire un juſte diſcernement.*

Ce caractere eſt équivoque, il eſt vrai, par rapport au *nœud*, le point donné par les deux ſuppoſitions pouvant être un point d'attouchement, & non pas un point d'interſection: mais c'eſt toûjours une marque infaillible d'un point de rencontre de pluſieurs rameaux, qui eſt néceſſairement, ou point d'attouchement, ou point d'interſection.

La courbe dont il s'agit dans cet exemple, eſt la parabole cubique, dont le point D, point de rencontre des deux rameaux, eſt un point d'attouchement ; & ce point eſt donné en effet par la valeur de $x = a$. Mais ce point commun des deux rameaux, conſidéré ſur un ſeul des deux, & pris ſéparément, ceſſe d'être un point de rencontre ; & c'eſt auſſi pourquoi l'équation propoſée $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$ n'exprimant qu'un ſeul rameau ; les deux ſuppoſitions $dy = 0$, & $dx = 0$ dans ſon équation différentielle $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}}$, ne donnent point une même valeur ; c'eſt de la ſuppoſition ſeule de $dx = 0$ que l'on tire $x = a$.

Si M. de Crouzas ne s'étoit pas trompé par mégarde, en différentiant ſon équation équivalente, $y - a = \sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}$, il ne lui ſeroit pas venu l'équation différentielle qu'il en a tirée, $\frac{2x - 2a}{3\sqrt[3]{a^3 - 2aax + axx}} = \frac{dy}{dx}$;

mais celle-ci, $\frac{2ax - 2aa}{3\sqrt[3]{\overline{a^3 - 2aax + axx}^2}} = \frac{-2a \times \overline{a - x}}{3\sqrt[3]{aa \times \overline{a - x}} \times \sqrt[3]{a - x}}$; & divisant par le commun diviseur $\sqrt[3]{aa \times \overline{a - x}}$, on a comme auparavant $\frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}} = \frac{dy}{dx}$; ce qui anéantit l'objection.

Que si l'on s'arrête à la fraction $\frac{-2a \times \overline{a - x}}{3\sqrt[3]{aa \times \overline{a - x}} \times \sqrt[3]{a - x}}$ sans diviser par le commun diviseur $a - x$; il est clair que le numérateur étant le même qu'on auroit, en différenciant l'équation délivrée des signes radicaux, il convient alors à la courbe entiere composée des deux rameaux; & que dans cet état les deux suppositions $dy = 0$, & $dx = 0$ doivent donner une même valeur, en vertu du commun diviseur $\overline{a - x}$ qui reste, & par conséquent indiquer un point de concours de racines égales, qui est le point d'attouchement *D*. Et en effet cette action est précisément la même que celle qui vient de l'équation délivrée des signes radicaux, quand on a fait évanoüir dans cette fraction l'inconnue y par la substitution de sa valeur en x, comme on le peut voir plus haut dans l'exemple *Q*.

Nous ne dirons pas ici avec M. de Crouzas qu'*il faut se rendre attentif au sujet dont il s'agit, & non pas aux signes, pour faire un juste discernement*: mais nous dirons qu'il faut se rendre bien attentif aux signes, pour se rendre attentif au sujet, puisqu'il n'est connu que par les expressions algébriques qui le présentent à l'esprit. On ne découvre point ce que renferme l'équation donnée d'une courbe par la considération de la courbe encore inconnue : mais on connoît la nature de la courbe, & l'on développe tout ce qui lui convient, par le calcul exact de l'équation donnée qui l'exprime.

M. de Crouzas vient enfin à l'équation dégagée de signes; $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + axx$, dont la

différentiation lui donne, comme à nous dans notre exemple Q, $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$. Si dans cette équation differentielle on ſuppoſe $dy = 0$, on a $x = a$; & ſi l'on y ſuppoſe $dx = 0$, on a $y = a$; de ſorte que dans l'équation non différenciée $y = a$ donnant $x = a$, & $x = a$ donnant $y = a$, les deux ſuppoſitions $dy = 0$ & $dx = 0$ ſe trouvent donner un même point; ce qui marqueroit, ſelon M. Guinée, un *nœud*, que la courbe n'a pas.

$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ ne donne donc pas ici un point d'interſection, & M. Guinée a tort: mais c'eſt toûjours un point de concours de pluſieurs rameaux qui eſt donné, & tel eſt le point d'attouchement D de la courbe propoſée.

Je ſuis fâché de trouver, après cette objection, une nouvelle réflexion de M. de Crouzas ſur le même ton que la P. 112. précédente. *On voit encore dans cet exemple*, dit-il, *qu'un peu d'attention à la nature de la courbe, fait connoître le rapport de* d y *&* d x, *& découvre par-là ſi c'eſt le numérateur ou le dénominateur qu'on doit égaler à zéro. Si on néglige cette conſidération, & qu'on ſe contente de calculer une équation, ſans ſe former une juſte idée des quantités qu'elle renferme, non-ſeulement on pourra ſe trouver embarraſſé, mais on pourra même ſe tromper.*

Il ſemble que M. de Crouzas veuille rendre le calcul reſponſable de la mépriſe de M. Guinée, & du défaut de ſa regle. Il ſe fait une affaire ſérieuſe de nous avertir d'être ſur nos gardes, & de ne nous fier qu'à bonnes enſeignes à nos calculs équivoques, & ſujets à tromper; il nous exhorte d'avoir grand ſoin d'appeller à notre ſecours, contre leur incertitude ou leur obſcurité, la lumiere des raiſonnemens, & la conſidération attentive de la nature de la courbe propoſée. Crainte frivole, & dangereux avis. Ce n'eſt que le calcul qui développe les quantités que renferme une équation, & qui nous fait connoître la nature de la courbe qu'elle exprime, ainſi que je l'ai déja dit: ce n'eſt jamais le calcul qui nous trompe, quand il eſt bien fait; il n'a pas beſoin d'être appuyé par des raiſonnemens: mais d'ordinaire ce ſont les raiſonnemens

mens qui nous trompent, & qui ne doivent nous déterminer qu'autant qu'ils ſont indiqués, ou appuyés par le calcul. M. Guinée ne s'eſt point trompé *pour s'être contenté de calculer une équation :* mais c'eſt un faux raiſonnement indépendant du calcul qui l'a jetté dans l'erreur.

Pour juſtifier la réflexion que j'oppoſe à celle de M. de Crouzas, je le prends ici lui-même ſur le fait; c'eſt dans ſon raiſonnement ſur — 2 qui multiplie $\sqrt[3]{a}$ dans le numérateur de la fraction différentielle $\frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}} = \frac{dy}{dx}$. Je l'ai paſſé plus haut : mais un petit déſir de vengeance en faveur du calcul contre ſa remarque, me fait ſaiſir l'occaſion préſente de le rappeller. En faiſant $dy = 0$, il trouve après M. Guinée, comme on l'a déja dit, un *Maximum* infini, c'eſt-à-dire, une tangente infinie au point de la courbe continuée à l'infini. Sur cela je n'ai rien à dire : mais voici ce qu'il ajoûte de lui-même : *le nombre 2 qui précede* $\sqrt[3]{a}$, *avertit même que de côté & d'autre du point* E, *il ſe trouve une telle tangente.*

Sûrement le nombre 2 n'avertit point de cela. Quand on fait $dx = 0$, & qu'on trouve un *Minimum* au point où l'on a $x = a$, le nombre 3 qui *précede* $\sqrt[3]{a-x}$, nous marque-t-il trois points de la courbe, qui ayent chacun leur *Minimum ?* Le nombre 2 du numérateur n'a nul avantage ſur le nombre 3 du dénominateur; & ſi l'un nous donnoit deux *Maxima*, il faudroit que l'autre nous donnât trois *Minima.* D'où vient que M. de Crouzas trouve dans l'un un avertiſſement qu'il ne trouve pas dans l'autre ? Ce n'eſt pas le calcul qui mene-là. Par le calcul, $dy = 0$ donne tout ſimplement $2\sqrt[3]{a} = 0$, comme $dx = 0$ donne tout ſimplement auſſi $3\sqrt[3]{a-x} = 0$; on pourroit même ôter 3 du dénominateur, & mettre $\frac{2}{3}$ dans le numérateur, & alors M. de Crouzas n'auroit que deux tiers de tangente. Qu'eſt-ce donc qui l'a porté à faire dire au nombre 2, ce que certainement il ne dit pas, & ne doit pas dire ? C'eſt qu'ayant conſidéré la courbe qu'il

avoit ſous les yeux, il a vû que du point *D* elle jettoit deux rameaux, qui, s'éloignant l'un de l'autre, s'étendoient à l'infini des deux côtés de ce point, & par conſéquent que ſa tangente infinie devoit auſſi s'étendre de part & d'autre, pour aller toucher les deux rameaux chacun dans leur point infiniment éloigné. Ces deux points où dy eſt égal à zéro, donnés par la nature de la courbe, s'étant ainſi préſentés à lui avec la double tangente, & trouvant 2 dans le numérateur de la fraction différentielle, il lui a paru que cela s'ajuſtoit fort bien, & que ce 2 n'étoit là que pour déſigner les deux points & les deux tangentes.

Mais, outre ce que nous avons déja dit ſur ce 2, M. de Crouzas nous permettra d'ajoûter qu'il n'a pas pris garde que ſi ce nombre marquoit deux tangentes dans la fraction où il ſe trouve, il marqueroit faux; puiſqu'il les marqueroit dans un ſeul rameau, l'équation différentielle $\frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}} = \frac{dy}{dx}$ étant tirée de l'équation radicale $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$, qui n'exprime qu'un des rameaux.

On voit donc ici ce que je voulois faire voir, que le raiſonnement de M. de Crouzas eſt une mépriſe qui vient de la conſidération mal entendue ou mal appliquée de la courbe décrite, & d'un défaut d'attention au calcul, à qui l'on fait dire, non ce qu'il dit, mais ce que l'on croit, & que l'on croit par erreur, qu'il doit dire.

Je reviens à la page 112, d'où j'étois remonté à la page 110. M. de Crouzas y ajoûte encore quelques réflexions ſur l'article 49me des *infiniment petits*. Il y a du faux, & n'y a rien d'exact dans ces réflexions. Je les rapporterai, parce qu'elles ſerviront à confirmer de plus en plus ce que j'ai établi; & que M. de Crouzas s'y trouve encore en faute, pour être plus attentif à donner aux expreſſions du calcul la ſignification qui l'accommode, que de recevoir celle qu'elles ont, & qu'elles préſentent à ceux qui ſçavent, ou qui veulent bien les entendre.

Si AE, dit-on, = a = x; *le rameau* * MmD *finit en* D *vis-à-vis du point* E; *& ce rameau, à proprement parler, n'a point de* minimum; *car on appelle la plus petite appliquée, celle qui, de côté & d'autre, en a de plus grandes; ce qui n'a pas lieu dans les appliquées d'un seul rameau.* * Fig. 1.

M. de Crouzas dit la même chose à l'égard de l'autre rameau, qui, non plus que le précédent, & par la même raison, n'a, selon lui, *aucun* minimum.

J'attaque d'abord la raison donnée; & je dis que pour qu'une appliquée soit la plus grande, il n'est pas nécessaire qu'elle ait après elle une suite décroissante d'appliquées, il suffit, pour être un *maximum*, qu'elle soit la derniere d'une suite croissante qui la précede. Qu'il y en ait, ou qu'il n'y en ait point après elle de plus petites, pourvû qu'il n'y en ait point de plus grandes, c'est toûjours un véritable *maximum*. Il en est de même d'une plus petite appliquée; qu'il y en ait, ou qu'il n'y en ait pas après elle de plus grandes, pourvû qu'il n'y en ait pas de plus petites; c'est un véritable *minimum*.

Ainsi il ne manque rien au *minimum* que M. le Marquis de l'Hôpital & M. de Crouzas même après lui ont tiré de l'équation du rameau *MmD*, en faisant $dx = o$ dans le dénominateur de la fraction différentielle, & qu'ils auroient aussi tiré de l'équation particuliere de l'autre rameau *mMD*; il ne lui manque rien, dis-je, pour être un véritable *minimum*; & il ne devient celui de la courbe, que parce que le *minimum* d'un rameau tombant au point d'attouchement sur le *minimum* de l'autre, les deux *minima* égaux n'en font qu'un seul *DE* commun aux deux rameaux; & comme ce *minimum* dans chaque rameau n'est que le petit côté du rameau prolongé jusqu'à la rencontre de l'axe des *x AE* sur lequel il est perpendiculaire; ce qui fait qu'au point *D* de chaque rameau pris séparément, dy est infini par rapport à dx; il est évident que les deux petits côtés des deux rameaux étant appliqués l'un sur l'autre, le dy au point *D* devenu point commun, est de même infini par rapport au dx, & que le

minimum y doit être donné par la même supposition de $dx = 0$, qui le donne dans l'un & l'autre rameau pris séparément.

On est surpris sans doute de l'explication que je viens de donner d'une chose qui s'offre d'elle-même à des yeux ouverts : mais ce qu'ajoûte M. de Crouzas va faire cesser la surprise à l'égard de l'explication. Après avoir dit, comme on a vû, que les deux rameaux, pris séparément, n'ont aucun *minimum*, il poursuit ainsi : *mais si l'on fait évanoüir les signes radicaux, on aura une équation qui conviendra également aux deux rameaux. En ce cas, il y a un* minimum, *& l'appliquée* E D *en a de côté & d'autre de plus grandes qu'elles.* Cela pourroit passer, en quelque sorte, à la faveur d'un, *à proprement parler*, qu'on a mis plus haut. Voici l'étonnant : *mais aussi*, ajoûte M. de Crouzas, *en cherchant le* minimum, *ou la plus petite appliquée, on le trouve dans le numérateur.*

C'est dans le dénominateur qu'on a trouvé le *minimum*, considéré dans un seul rameau, où il n'est que précédé de plus grandes appliquées, & n'en a point après lui. Dans la courbe entiere au point d'attouchement des deux rameaux, il est & précédé, & suivi de plus grandes appliquées, & c'est pour cela, dit-on, qu'on le trouve dans le numérateur. Les calculateurs d'équations auront peine à appercevoir le fin de ce raisonnement, il leur paroîtra peu propre à éclaircir leurs calculs.

Puisqu'on le trouve dans le numérateur, on le trouve donc en faisant $dy = 0$ au point D : mais n'y est-il pas réellement infini, comme dans chacun des rameaux ? Et n'est-ce plus dans les deux points infiniment éloignés sur les deux rameaux qu'il est égal à zéro ? Ne doit-il pas donner dans la courbe entiere la double tangente infinie qu'on lui a fait donner dans un des rameaux ?

Ces contradictions sont échapées à M. de Crouzas dans ces momens de distraction, & d'attention lassée qu'éprouvent quelquefois ceux qui pensent le plus, & qui travaillent beaucoup : mais ce qui a aidé à l'y faire tomber, c'est de

n'avoir pas assez bonne opinion de nos calculs, & de vouloir les faire dépendre de raisonnemens étrangers qui ne sont pas sûrs, & qui trompent souvent. Cette prévention, jointe à un défaut d'attention à la nature des points de concours, l'a empêché de voir que dans la fraction différentielle $\frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa} = \frac{dy}{dx}$, qui se tire de l'équation de la courbe délivrée des signes radicaux, les suppositions de dy & de $dx = 0$, donnoient également le point D, non comme point à *minimum*, mais comme point de concours de racines égales; & que ce point étant ici un point d'attouchement qui a un *minimum*, & non pas un point d'intersection, il se trouve, par ce hasard, que tant $dy = 0$ que $dx = 0$ donnent le *minimum* en donnant le point. Et quoique de cette maniere même on ne le trouve pas plus dans le numérateur que dans le dénominateur; M. de Crouzas a été plus frappé du numérateur, où l'on voit clairement qu'en supposant $dy = 0$, on a $x = a$, valeur qui lui étoit déja connue pour celle qui donnoit le *minimum*. Ainsi ayant oublié que dy étoit réellement infini au point D, & que le seul dx y étoit $= 0$; il s'est arrêté au numérateur. Mais s'il avoit divisé la fraction par le plus grand commun diviseur $\overline{a - x}$, comme on l'a déja fait, au lieu de $\frac{2ax - 2aa}{3yy - 6ay + 3aa}$, il auroit eu $\frac{-2\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a - x}} = \frac{dy}{dx}$; ce qui lui auroit sauvé les méprises où ses raisonnemens l'ont jetté.

Une remarque solide de M. de Crouzas, sur laquelle j'ai déja beaucoup appuyé dans un de mes deux Mémoires de 1716, & qui me fournira encore la matiere d'un nouveau Mémoire, est celle-ci: *On pourroit alléguer une infinité d'exemples d'expressions en termes radicaux qui désignent des courbes sans* maximum: *mais dès qu'on a élevé les signes à leur puissance, il se trouve que cette puissance renferme d'autres racines, en vertu desquelles elle est l'expression d'une courbe à* maximum. *De sorte qu'attaquer la nouvelle méthode par les prétendus em-*

barras où jettent des exemples de cette nature, est un pur sophisme d'équivoque.

En voulant éclaircir cette remarque par un exemple très-simple, M. de Crouzas tombe encore dans quelques fautes qui regardent le sujet de ce Mémoire. L'exemple est l'équation d une hyperbole équilatérale, $xx - ax = yy$; en différentiant, on a $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - a}{2y}$; $dy = 0$, donne bien $x = \frac{1}{2}a$; & si la courbe avoit une appliquée qui répondît à cette valeur de x, elle seroit un *maximum* ou un *minimum*; mais n'ayant aucune appliquée le long de tout l'axe, elle n'y peut avoir ni *maximum* ni *minimum*; au lieu que si l'équation est élevée au quarré $x^4 - 2ax^3 + aaxx = y^4$, elle renfermera l'équation du cercle $ax - xx = yy$; car ce quarré de l'équation $xx - ax = yy$, est aussi le quarré de l'équation $ax - xx = yy$, comme encore le produit de l'une par l'autre; & en vertu de cette combinaison de l'hyperbole équilatere avec le cercle, la supposition de $dy = 0$ dans la fraction différentielle que l'on tire de cette équation quarrée, donnant encore $x = \frac{1}{2}a$, on a une appliquée y qui répond à cette valeur de x, & qui est un vrai *maximum*. Tout cela est fort bien dit par M. de Crouzas. Mais il se trompe, & se trompe par rapport à mon sujet, en cherchant les valeurs de x dans le numérateur de la fraction différentielle.

Cette fraction est $\frac{4x^3 - 6axx + 2aax}{4y^3} = \frac{dy}{dx}$; ainsi $dy = 0$ donne $4x^3 - 6axx + 2aax = 0$; ou $2x^3 - 3axx + aax = 0$; d'où l'on tire ces trois valeurs de x; $x = 0$, $x = a$, $x = \frac{1}{2}a$. Les fautes dont je reprends ici M. de Crouzas, c'est d'avoir dit que la valeur de $x = a$ lui donnoit *une absurdité*, & de n'avoir rien dit de $x = 0$; il est vrai que ces deux valeurs ne donnent ni *maximum* ni *minimum*, mais elles ne donnent aucune absurdité l'une ni l'autre, puisqu'elles servent à indiquer deux points de rencontre de deux branches. Car si l'on fait $dx = 0$, on aura $4y^3 = 0$, ou $y = 0$; or $y = 0$ dans l'équation quarrée donne $x = 0$, & $x = a$; ainsi ces mêmes valeurs sont données par $dy = 0$,

& par $dx = 0$. Voilà donc deux points de concours de deux branches donnés ; aussi voit-on dans la courbe composée des deux hyperboles opposées, & du cercle, telle qu'elle est représentée dans la Figure 3. que le point où l'on a $x = a$, & $y = 0$, est le point d'attouchement *B* du cercle & de l'hyperbole ; & que celui où l'on a $x = 0$, & $y = 0$, est l'autre point d'attouchement *A* du cercle & de l'hyperbole opposée. Ainsi le calcul fait évanoüir l'absurdité admise par le raisonnement de l'Auteur.

Il peche plus bas contre la judicieuse remarque qu'il venoit de faire, & que nous avons rapportée tout-à-l'heure, en opposant à la regle de M. Guinée l'exemple $y = \frac{\overline{a - x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{a}}$; *c'est l'équation, dit-il, d'une* courbe qui a un* nœud *là où* x = a ; * Fig. 4. & la différenciant ensuite, il en tire $\frac{dy}{dx} = \frac{a - 3x}{2\sqrt{ax}} = \frac{-2a}{\pm 2a}$ dans le point où $x = a$. Puis il ajoûte ; *or dans cette courbe qui a un nœud*, $\frac{dy}{dx}$ *n'est pas* $= \frac{0}{0}$.

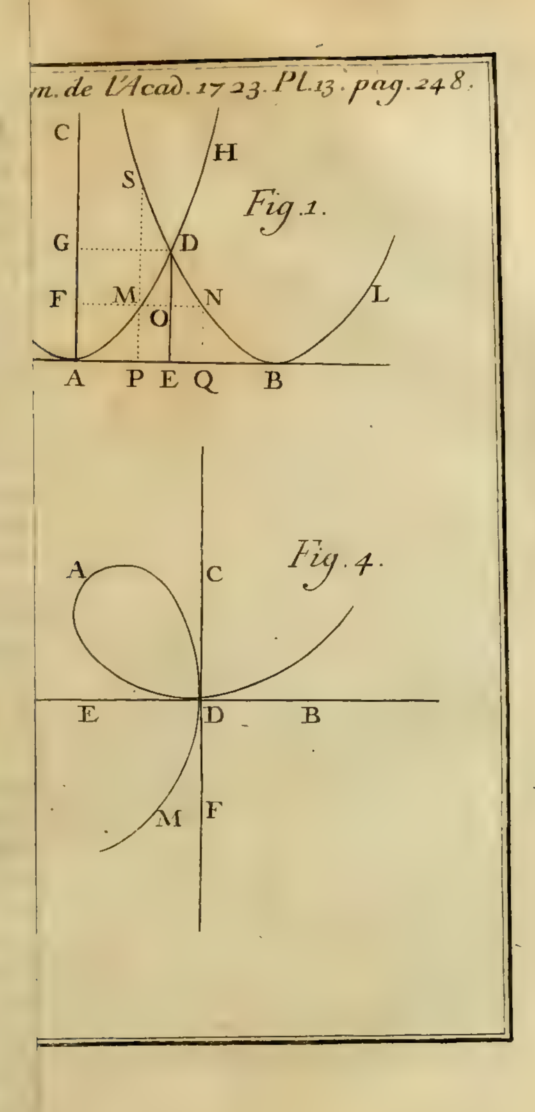
Quand on ne prend qu'une branche de la courbe, comme fait ici M. de Crouzas, il n'y peut avoir ni nœud ni autre point de rencontre, qui suppose toûjours plusieurs branches ; ainsi on ne doit pas avoir $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$: mais si on éleve l'équation proposée à la puissance du signe radical, elle se changera en celle-ci ; $ayy = x^3 - 2axx + aax$; d'où il viendra $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx - 4ax + aa}{2ay}$; & dans le point donné où l'on a $x = a$, on a $y = 0$; & par conséquent on aura $\frac{dy}{dx} = \frac{3xx - 4ax + aa}{2ay} = \frac{0}{0}$.

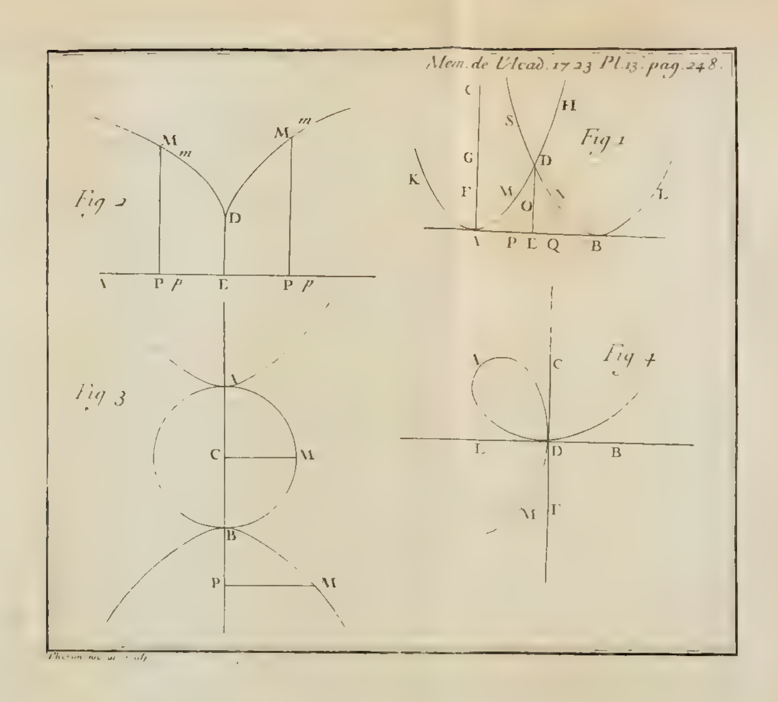
M. de Crouzas répete ici ce qu'il avoit déja avancé au sujet de la démonstration de M. Guinée. *Il est vrai*, dit-il, *que si on suppose* dy = 0, *il faudra en dire autant de* dx = dy ; *& cette égalité de* dx *& de* dy *vient de ce que les deux rameaux se coupent à angles droits, & que l'intersection n'est dans l'un ni dans l'autre que de la largeur précise de la courbe.*

Je ne dis rien sur ce raisonnement répété: mais je prends cette occasion de faire voir ce que j'ai promis, que dans les courbes qui se coupent à angles droits comme celle-ci & le *Folium* de M. Descartes; si l'on prend les deux tangentes au point d'intersection pour les deux axes, les différences dy & dx y seront réellement l'une & l'autre $= 0$, & l'une & l'autre réellement = à l'infini, & cela en les considérant par rapport aux deux branches prises séparément. Car soit les deux tangentes CF, BE, les deux axes de la branche ADM qui n'a que CF pour tangente au point D, & soit CF l'axe des x, & BE celui des y; il est évident que la tangente de cette branche se confondant avec l'axe CF, le dx est égal au petit côté de la branche, quand le dy tombe sur le point D; donc on a à l'égard de ce rameau $dy = 0$ par rapport à dx.

Les deux mêmes droites étant aussi les axes de la branche ADM, qui a pour sa tangente l'axe BE, il est évident encore que le dy est égal au petit côté de cette branche, quand le dx tombe sur le point D; donc à l'égard de cette branche, on a $dx = 0$, par rapport à dy. Voilà donc en D, point commun des deux branches dy & $dx = 0$, tour à tour l'un par rapport à l'autre, & tour à tour aussi l'un par rapport à l'autre, égaux à l'infini; ce que je devois montrer, & qui est conforme à la doctrine établie, que la supposition de dx égal à l'infini, ou de $dy = 0$, sert à trouver tous les points des courbes où les tangentes sont paralleles à l'axe des x; & de même que la supposition de dy égal à l'infini, ou de $dx = 0$, sert à trouver tous les points où les tangentes sont paralleles à l'axe des y.

M. de Crouzas fait revenir encore l'exemple de l'art. 49. des *infin. pet.* C'est apparemment un oubli, d'en avoir déja fait une difficulté à M. Guinée. Il en propose aussi plusieurs autres qu'il seroit inutile & ennuyeux de rapporter; je dirai seulement que ce sont toûjours des points d'attouchement de plusieurs rameaux, donnés par $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$: mais au lieu que celui


m. de l'Acad. 1723. Pl. 13. pag. 248.
Fig. 1.
C
H
S
G
D
F
M
N
L
O
A
P
E
Q
B
Fig. 4.
A
C
E
D
B
M
F


Fig 1
C
H
S
G
D
K
F
M
N
L
O
A
P
E
Q
B
Fig 2
M
m
M
m
D
A
P
p
E
P
p
Fig 3
A
C
M
B
P
M
Fig 4
A
C
L
D
B
M
F

celui que nous avons examiné eſt un point de rebrouſſement, les nouveaux qu'il a pris dans l'*analyſe* qu'il commente, ſont les points d'inflexion.

Il y a un petit nombre d'autres endroits qu'il retouchera ſans doute dans une ſeconde édition, & qui ont en effet beſoin d'être retouchés; il me ſemble qu'il fait trop valoir & répete trop ſouvent ſes réflexions ſur le calcul, qu'il regarde preſque comme fait ſans lumiere, & au ſecours duquel il appelle toûjours, & veut qu'on appelle les raiſonnemens, après tant de répétitions, & à la ſuite de toutes les remarques qu'on a vûes, & de pluſieurs autres qu'il dit avoir tirées de M. Guinée. *Je les ai ſimplement*, ajoûte-t-il encore, *éclaircies par des exemples aiſés, & par des raiſonnemens un peu étendus. J'ai ſouvent remarqué qu'il eſt très-important de s'accoutûmer à éclairer ſes calculs par le raiſonnement; ſans quoi un cas un peu nouveau vous laiſſe tout d'un coup dans l'embarras.*

Les philoſophes, & ceux qui ont fait leur principale étude des hautes ſçiences, font honneur à la géometrie, quand ils daignent s'y appliquer : mais pleins de confiance en leurs lumieres, ils veulent d'abord tout éclairer, comme ſi tout étoit obſcur. Avec les plus grandes lumieres, & les meilleures intentions, ils pourroient tout gâter, en donnant trop, non à la raiſon, mais aux raiſonnemens.

Ils me permettront donc de répéter ici ce que j'ai déja dit pluſieurs fois, que nos calculs n'ont pas tant de beſoin qu'on penſe d'être éclairés; ils portent avec eux une lumiere ſuffiſante, une lumiere propre; & c'eſt d'ordinaire de leur ſein même que ſort toute celle qu'on peut répandre ſur eux, & que peut recevoir le ſujet qu'on traite. Je ne ſçai qu'une exception à ma remarque; c'eſt un ouvrage ſublime que le public verra bien-tôt avec admiration, & dont l'Auteur eſt d'un mérite au deſſus de tout éloge.

A l'égard de M. de Crouzas, la connoiſſance que j'ai de ſon caractere & de ſon amour pour la vérité, m'a mis au large avec lui; je n'ai point craint qu'il fût bleſſé de la maniere libre avec laquelle j'ai examiné & repris quelques en-

droits de son commentaire ; & c'est un honneur que je rends aux sentimens de son cœur, d'oser assûrer qu'il sera bien-aise que la matiere traitée dans ce mémoire ait été éclaircie, même aux dépens de ses remarques.

OBSERVATIONS ET REFLEXIONS

Sur la COMETE *qui a paru au mois d'Octobre* 1723.

Par M. MARALDI.

13 Nov. 1723.

LE 18 du mois d'Octobre dernier, un peu avant 7 heures du soir, le Ciel étant serein, nous découvrîmes du côté du midi, une comete qui paroissoit à la vûe simple comme une étoile nebuleuse. Elle étoit placée proche de trois petites étoiles qui sont dans l'épaule du capricorne, fort proche du tropique, & par conséquent peu élevée sur l'horison.

L'ayant regardée avec une lunette de 16 pieds, on voyoit au milieu une lumiere blanchâtre & assez claire, dont le diametre étoit fort petit: mais elle avoit autour une grande chevelure, dont l'éclat & la densité alloient en diminuant jusqu'aux bords, qui étoient confus & mal terminés. On détermina d'abord sa situation, en la comparant avec trois étoiles, à l'égard desquelles elle étoit située, & en observant ensuite son passage par le méridien & sa hauteur méridienne. Ces observations que nous fîmes à 7 heures, étant comparées avec celles que l'on continua de faire jusqu'à 10, firent connoître que la comete avoit un mouvement assez sensible qui la portoit vers les parties septentrionales du ciel, & par conséquent qu'elle venoit des méridionales; ce qui a été confirmé par la suite des observations que nous avons faites.

Nous donnerons une autrefois le détail de ces observa-

tions, il suffira présentement de rapporter ce qui en résulte.

Par les observations du 18 Octobre, comparées avec celles du 19, faites à la même heure, on trouve que le mouvement que faisoit la comete en 24 heures sur le cercle qu'elle a décrit, étoit de 5 degrés & 5 minutes.

Ayant ensuite comparé le mouvement qui résulte des observations faites entre le 19 & le 21, on trouve qu'en deux jours il a été de 7 degrés & 2 minutes d'un grand cercle; d'où il paroît que ce mouvement alloit en diminuant, ce qu'il a continué de faire de plus en plus jusqu'à la fin des observations. Cette diminution continuelle de mouvement de la Comete fait connoître qu'elle avoit passé son périgée, & qu'elle s'éloignoit de la terre.

On suppose que toutes les cometes, pendant qu'elles sont visibles, parcourent une portion de cercle fort excentrique à la terre, qui n'est pas sensiblement différente d'une ligne droite. Dans cette ligne on imagine un point le plus proche de nous, appellé périgée. Ce point partage en deux parties égales le chemin que fait la comete pendant qu'elle est visible; elle en parcourt une partie avant que d'arriver au périgée, l'autre après l'avoir passé. Pendant qu'elle parcourt la premiere partie, son mouvement accélere de jour en jour, son diametre apparent augmente, & elle approche en même temps de la terre jusqu'à ce qu'elle arrive au perigée, qui est l'endroit où le mouvement est le plus vîte, & le diametre apparent le plus grand. Après avoir passé le périgée, le mouvement propre de la comete se ralentit, & le diametre apparent diminue à peu-près avec les mêmes degrés qu'il avoit augmenté.

On suppose que toutes les cometes ont ces mêmes propriétés, & si l'on en a observé plusieurs, seulement lorsque leur mouvement diminuoit, cela vient de ce qu'on ne les a pas apperçûes quand il accéleroit; ce qui peut dépendre de quelques causes accidentelles.

Suppofant donc que la comete, pendant qu'elle a été visible, ait décrit une portion de cercle qui n'est point sensible-

ment différente d'une ligne droite ; par la méthode de feu M. Caſſini, expliquée dans le traité de la Comete, imprimé à Rome en 1664, nous avons calculé le temps auquel elle eſt arrivée au périgée, le lieu du ciel où il s'eſt rencontré, le mouvement qu'elle faiſoit en cet endroit, & celui qu'elle fait avant & après.

Pour avoir toutes ces connoiſſances, nous avons employé trois obſervations, faites le 18, le 21 & le 26 d'Octobre, & par les calculs qui en réſultent, on trouve que la comete eſt arrivée à ſon périgée le 14 d'Octobre, à deux heures après midi, & qu'en cet endroit ſon mouvement apparent étoit de 20 degrés par jour, & par conſéquent dans la premiere obſervation que nous fimes le 18 d'Octobre, il y avoit quatre jours qu'elle avoit paſſé par le point de ſon cercle le plus proche de la terre, & elle en étoit éloignée d'un arc d'un grand cercle de 57 degrés $\frac{1}{4}$.

Cette diſtance entre la premiere obſervation & le périgée, étant portée ſur un grand cercle qui paſſe par les lieux où la comete s'eſt trouvée dans toutes les obſervations, & qui repréſente auſſi la trace qu'elle a décrite avant que d'y arriver, donne la ſituation du périgée dans la partie du ciel qui eſt entre la conſtellation du phenix & la belle étoile appellée *Canopus*, dans l'extrémité méridionale de l'Eridan ; ainſi le périgée de la comete ſe trouve dans l'hémiſphere auſtral du ciel, qui ne ſe leve point ſur notre horiſon, & qui par conſéquent nous eſt toûjours caché ; elle n'a donc pas pû être viſible, lorſque ſon mouvement étoit le plus grand.

De la conſtellation du phenix la comete a paſſé ſur celle de la grue, qui n'eſt pas non plus viſible ſur notre horiſon. Le 17 Octobre elle ſe trouva avec les étoiles de poiſſon méridional, qui commencent à paroître ſur l'horiſon de Paris : mais ce jour-là le ciel étant couvert, nous ne pûmes pas l'obſerver.

Elle fut obſervée le même jour à Albano proche de Rome par M. Bianchini Prélat-Domeſtique du Pape. Suivant ſon obſervation, elle avoit une queue fort petite, tournée à

l'orient, qui se voyoit à la vûe simple, mais qui se perdoit de vûe avec la lunette de 16 pieds; on voyoit cependant avec la même lunette une grande chevelure, au milieu de laquelle il y avoit une lumiere plus vive, semblable aux étoiles les plus petites. Il détermina sa situation par son passage par le méridien & par sa hauteur méridienne, & par diverses distances des étoiles qu'il observa.

Le 18 Octobre elle se trouva sur la constellation du Capricorne, où nous la vîmes pour la premiere fois; ainsi à cause de la situation particuliere de la route de la comete par rapport à notre horison, & à cause des nuages qui couvrirent le ciel le 17 Octobre, on ne pouvoit pas la voir plûtôt que le 18, le jour même que nous l'observâmes.

Le jour suivant 19, elle coupa l'écliptique au 8me. degré d'*aquarius*; ce jour-là le soleil étant au 26me. degré de *libra*, étoit éloigné de 102 degrés du lieu où étoit la comete, ce qui ne favorise pas le sentiment de ceux qui les font venir du soleil; la direction du mouvement de la comete du midi au septentrion ne leur est pas non plus favorable.

Le 21 la comete se trouva proche de l'étoile la plus occidentale de deux qui sont dans la main précédente d'*aquarius*; de-là elle a passé entre deux étoiles les plus occidentales qui sont au dessous de la main d'Antinoüs, & continuant ensuite sa route, elle traversa l'équinoctial entre le premier & second jour de Novembre au 301me. degré d'ascension droite. Nous en avons continué les observations jusqu'au 4 & 5 Novembre qu'elle paroissoit encore assez belle avec la lunette, malgré la clarté de la lune qui étoit ce jour-là dans son premier quartier: mais les nuages qui ont couvert le ciel pendant trois jours de suite, & le clair de lune qui a succédé, n'ont pas permis de l'observer plus long-temps.

Il paroît par toutes ces observations, aussi-bien que par les premieres, que la comete avoit un mouvement qui la portoit du midi au septentrion, & que pendant 18 jours qu'elle a été visible, elle a suivi assez précisément la portion d'un grand cercle, qui à l'égard de l'écliptique, décline de

14 degrés vers l'occident. Depuis le 18 Octobre jusqu'au 5 Novembre, qui est le dernier jour que nous l'avons observée, elle a fait sur sa route 25 degrés 49 minutes, & depuis le périgée, elle en a fait 83. Dans le dernier jour de son apparition, le mouvement de la comete étoit si fort diminué, qu'elle ne parcouroit plus en 24 heures qu'un tiers de degré, ce qui n'est que la 60me. partie du mouvement qu'elle doit avoir fait dans le périgée. Cette diminution de mouvement vient de la grande obliquité qu'avoit à notre égard la ligne, que parcouroit alors la comete, & dans cette situation elle étoit sept ou huit fois plus éloignée de nous que dans le périgée.

Il y a long-temps qu'on n'a point vû des cometes dont le mouvement, quand il est plus vîte, ait été de 20 degrés, & par conséquent aussi grand que celui de la comete de cette année.

On observe dans les planetes, que celles qui sont plus proche de nous ont leur mouvement plus vîte. Si les cometes gardoient la même regle que les planetes, il y auroit lieu de croire que celle de cette année, qui dans son périgée avoit un mouvement plus grand que celui de la lune, auroit été aussi plus proche de la terre que n'est la lune : mais nous ne sçavons pas si les cometes ne sont pas des corps d'un ordre différent que les planetes.

Son mouvement qui la portoit du midi vers le septentrion, ne nous a pas donné la commodité de chercher sa parallaxe & sa distance à la terre en parties de son diametre, parce que la comete ne s'est pas rencontrée pendant longtemps dans le parallele d'une même étoile fixe.

On auroit pu encore chercher si sa parallaxe étoit sensible le 4 & le 5 Novembre, lorsque le mouvement de la comete se faisoit dans la direction des deux étoiles un peu éloignées l'une de l'autre, & visibles dans la même ouverture de la lunette, comme je me l'étois proposé : mais le ciel ne fut pas favorable à notre dessein à cause des nuages. Nous avons cependant une observation qui pourroit faire connoître si sa

parallaxe est sensible, supposé qu'on ait fait la même observation en quelques autres Villes éloignées.

Le soir du 19 Octobre, pendant que j'observois la comete avec une lunette de 16 pieds, je vis à $8^h\ 38'$ une petite étoile qui ne paroissoit pas cinq ou six minutes auparavant. Mais je commençai de la voir si proche du milieu du disque, qu'elle s'y confondoit de sorte que je crus que c'en étoit une partie, & je ne fus assûré que c'étoit une étoile fixe que lorsque la comete par son mouvement en fut un peu éloignée, quoique l'étoile fût encore plongée dans la partie la plus dense de l'atmosphere qui environnoit la comete.

On tire de cette observation deux conséquences. La premiere, que le corps qui forme la comete est fort petit par rapport à l'atmosphere ou à la chevelure qui l'environne, parce que nous vîmes l'étoile fort proche du milieu de la comete. La seconde, que cette chevelure est transparente dans l'endroit même où elle est plus dense & plus épaisse, puisqu'on voyoit l'étoile fixe à travers, assez près du milieu de l'apparence que formoit la comete.

Dans l'hypothese que les cometes décrivent des cercles fort excentriques à la terre, elles doivent retourner à se rendre visibles après certains intervalles de temps plus ou moins longs, selon la grandeur des cercles qu'elles décrivent, & selon le mouvement plus ou moins vîte avec lequel elles le parcourent.

Suivant cette idée que nous avons des cometes, ayant comparé celle de cette année avec une autre qui a paru en 1707, nous avons trouvé entr'elles un rapport qui mérite d'être remarqué.

Nous observâmes avec M. Cassini la comete de 1707, & les observations en sont rapportées dans les Mémoires de l'Académie de la même année. Elle fut vûe par M. Manfredi à Bologne, quelques jours avant nos premieres observations, à cause qu'il eut le temps plus favorable. Cet habile astronome vit la comete de 1707 le 25 Novembre au 4me. degré & demi d'*Aquarius* avec une latitude méridionale de 5

degrés ; cette ſituation n'eſt éloignée que de 4 degrés vers l'occident de celle où a été la comete de cette année le 18 Octobre. Celle de 1707 paſſa l'écliptique le 26 Novembre au 6^{ne}. degré d'*Aquarius*, celle de cette année a traverſé le même cercle le 19 Octobre au 8me. degré du même ſigne à deux degrés de diſtance de la premiere ; l'une & l'autre a paſſé proche de l'étoile qui eſt dans la main occidentale d'*Aquarius*, ce qui fait voir que depuis les premieres obſervations les traces décrites par le mouvement de ces deux cometes ſe ſont approchées & ſe ſont croiſées enſuite. La comete de cette année a continué ſon chemin un peu plus à l'orient à l'égard des étoiles par où paſſa celle de 1707.

Il paroît donc que ces deux cometes ſont venues des parties auſtrales du ciel, & ont continué leur chemin vers les ſeptentrionales ; qu'elles ont coupé l'écliptique dans le même ſigne du Zodiaque, à deux degrés près l'une de l'autre. La premiere ſuivit preſque un cercle de latitude, & n'avoit que 4 degrés d'inclinaiſon à l'égard de l'écliptique ; la derniere en a une de 14 degrés environ, deſorte que le cercle qu'elle a décrit a fait avec l'écliptique un angle de 76 degrés vers l'Orient.

Par les calculs dont les principes ſont rapportés dans les Mémoires de 1707, le périgée de la comete de cette annéelà ſe rencontre entre les conſtellations de la grue & celle de l'indien, qui eſt une partie du ciel qui n'eſt point viſible ſur notre horiſon ; le perigée de la comete de cette année ſe rencontre, comme nous avons dit, proche de la conſtellation du phenix, qui eſt auſſi un endroit du ciel qui n'eſt point viſible dans notre climat. Ces deux endroits ſont éloignés entr'eux de 30 degrés d'un grand cercle ; le périgée de la derniere étant plus méridional que celui de la premiere.

Par les calculs qui repréſentent aſſez bien les obſervations que nous fîmes de la comete de 1707, ſon mouvement apparent dans le périgée étoit de 10 degrés par jour ; & par des calculs ſemblables que nous avons faits à l'égard de la comete de cette année, ſon mouvement dans le perigée étoit de 20 degrés

degrés par jour, par conséquent le double plus vîte que celui de l'autre.

Voilà en quoi les hypotheses de ces deux cometes conviennent, & en quoi elles sont différentes. Si l'on vouloit supposer que la comete de cette année est la même que celle de 1707, & qu'après 16 ans elle est retournée au même endroit du Ciel, ce que je n'oserois pourtant pas assûrer, il ne seroit pas nécessaire de donner aucun mouvement au nœud, puisque l'une & l'autre a coupé l'écliptique au même endroit, à deux degrés près. Ces deux cometes ayant donc le même nœud, conviennent entr'elles dans ce principe, comme fait la même planete, quand après avoir fait une ou plusieurs révolutions, elle retourne au même endroit du Ciel. Mais ces deux cometes ne s'accordent pas si bien ensemble dans les autres principes; car elles n'ont pas eu la même inclinaison, ni le même mouvement à égale distance du périgée, ni la même situation du périgée; cependant on pourroit représenter la différente situation de leur périgée, en donnant à ce terme un mouvement qui seroit beaucoup plus petit que celui qu'on donne au périgée de la lune, pour représenter la diversité du mouvement qu'elle fait en différens temps, en différens endroits du Zodiaque.

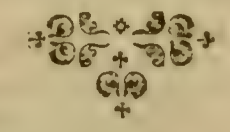
La variation de l'inclinaison qu'il faudroit donner à l'orbite de ces deux cometes, en supposant que c'est la même, n'est pas non plus sans exemple dans quelques planetes, aussi-bien que dans la lune : mais celle de la variation de l'excentricité qu'il faut supposer pour représenter la diversité des mouvemens que ces deux cometes ont eus dans le périgée est plus particuliere, & n'a pas d'exemples aussi sensibles & aussi assûrés dans les planetes que les variations précédentes.

Pour avoir une certitude plus grande, que la comete de cette année est la même que celle de 1707, il faudroit qu'elles eussent la même inclinaison à l'écliptique, le même mouvement à égale distance du périgée, & la même intersection dans le même degré du zodiaque. C'est principalement à ces marques que les anciens ont reconnu les planetes, & les ont

distinguées les unes des autres ; c'est aussi par ces principes que feu M. Cassini conjectura que la comete de 1680 pouvoit être la même qui avoit paru en 1577.

Quand deux différentes cometes n'ont pas la même inclinaison, le même mouvement à l'égard du périgée, & la même intersection avec l'écliptique, mais seulement une de ces choses, comme il arrive à l'égard des deux cometes de cette année & de 1707, il ne s'ensuit pas qu'elles ne puissent pas être une même comete, parce que nous voyons que la même planete varie aussi un peu dans son mouvement & son nœud, quand elle retourne dans les mêmes parties du Ciel ; ce que peut faire aussi la même comete, quand, après un certain nombre d'années, elle retourne à se rendre visible. Mais dans ce cas on n'a pas de preuves suffisantes pour dire qu'elle peut être une même comete.

Pour en avoir des conjectures plus assûrées, il faudroit avoir plusieurs observations des retours des cometes qui eussent entr'elles quelques-unes des convenances que nous avons remarquées ; pour lors on pourroit comparer les variations qui seroient arrivées, soit au mouvement, soit au nœud, soit à l'inclinaison. Si dans cette comparaison les variations se font avec quelque regle dans les différens retours, & qu'elles soient à peu-près proportionnelles aux intervalles de temps dans lesquelles les cometes ont paru, pour lors il y auroit lieu de croire que ce sont les mêmes : mais comme nous n'avons que depuis 150 ans des observations un peu exactes & circonstanciées des cometes, on n'en a pas un assez grand nombre pour faire cette comparaison.



OBSERVATION DU PASSAGE DE MERCURE DANS LE SOLEIL.

Du 9 Novembre 1723.

Par M. CASSINI.

IL y avoit long-temps que l'obſervation du paſſage de Mercure dans le Soleil, du 9 Novembre de cette année 1723 avoit été prédite. Dès l'année 1691, M. Halley, célebre Aſtronome Anglois, l'avoit miſe, dans les tranſactions philoſophiques, au nombre de celles qui devoient paroître ſur notre horiſon. 13 Nov. 1723.

M. Manfredi en avoit déterminé les phaſes dans ſes éphémérides, imprimées à Bologne en 1715. M. Deliſle le jeune avoit donné à l'Académie le détail du calcul de cette obſervation, fondé ſur les Tables de M. de la Hire. M. des Places l'avoit marquée dans ſon état du Ciel; & il y en a un Mémoire fort détaillé dans les Journaux de Trevoux du mois de Juillet de cette année. Ainſi les Aſtronomes étoient dans l'attente de cette obſervation, pour reconnoître les hypotheſes qui s'y accorderoient le mieux.

Heureuſement le Ciel a été ſerein, & il nous a réuſſi de faire cette obſervation avec des circonſtances très-favorables, ayant vû l'entrée de Mercure dans le ſoleil, & ayant ſuivi cette planete juſqu'à ſon coucher avec le ſoleil.

Quoique Mercure faſſe ſa révolution autour du Soleil en 88 jours, & qu'il paſſe entre le ſoleil & la terre environ tous les quatre mois, il s'en faut bien qu'on puiſſe l'appercevoir dans toutes ſes révolutions.

Cette planete, vûe de la terre, peut s'éloigner de part & d'autre de l'écliptique de près de cinq degrés, & comme le

demi-diametre du Soleil, dont le centre est toûjours sur l'écliptique, n'est que de 15 à 16 minutes, il doit arriver le plus souvent que Mercure dans sa révolution passe dessus ou au dessous du soleil, où il est impossible de le distinguer à cause de la grande lumiere, qui l'environne. Souvent même ces éclipses arrivent sous notre horison; principalement dans cette saison où le Soleil ne paroît que pendant un peu plus de la troisieme partie de sa révolution journaliere. Aussi dans l'espace de 26 ans, depuis le 3 Novembre de l'année 1697 jusqu'au 9 Novembre de cette année, il ne nous a pas réussi de faire aucune de ces sortes d'observations qui sont très-importantes pour déterminer les mouvemens de cette planete, sa figure, sa grandeur, & les principaux élemens de sa théorie.

La premiere observation de Mercure dans le soleil, dont on ait connoissance, fut faite le 7 Novembre de l'année 1631 par M. Gassendi. Comme il s'attendoit à le voir occuper un espace considérable sur le disque du soleil; il crut d'abord que c'étoit une tache: mais ayant remarqué que son mouvement étoit beaucoup plus vîte que celui que l'on apperçoit dans les taches, il reconnut que c'étoit Mercure, qu'il continua d'observer jusqu'à sa sortie du disque du soleil.

Le second passage de Mercure dans le Soleil fut observé le 3 Novembre de l'année 1651 par Shakerlæus, Astronome Anglois, qui alla exprès à Surate pour y faire cette observation, qui devoit arriver de nuit en Europe.

La troisieme observation fut faite le 3 Mai de l'année 1661 à Londres par Mrs. Huggens, Mercator & Streete, & à Dantzick par M. Hevelius.

La quatrieme arriva le 7 Novembre de l'année 1677. Elle fut faite à Avignon par Mrs. Gallet & de Beauchamp, & dans l'Isle de Sainte-Helene par M. Halley.

La cinquieme observation fut faite le 10 Novembre de l'année 1690 à Canton dans la Chine, par le P. Fontenay Jesuite.

Le sixieme passage de Mercure dans le soleil est arrivé le

3 Novembre de l'année 1697. Il fut obſervé à Paris par mon Pere & M. Maraldi. J'étois alors en Hollande, où je l'obſervai à Rotterdam.

Ainſi l'obſervation dont nous faiſons le rapport, eſt la ſeptieme qui ait été faite juſqu'à préſent.

Je m'étois préparé à la faire avec une lunette de 8 pieds, qui avoit au foyer commun de ſes verres quatre fils qui ſe coupoient à angle de 45 degrés. Cette lunette étoit placée ſur une machine parallactique pour ſuivre aiſément le mouvement journalier du ſoleil & de Mercure. J'avois auſſi dreſſé une lunette de 16 pieds, afin de pouvoir diſtinguer plus facilement Mercure, que nous ſçavions devoir paroître fort petit.

A $2^h\ 50'\ 52''$ j'apperçûs avec la lunette de 16 pieds, ſur le bord oriental du Soleil, Mercure qui y formoit une petite échancrure.

A $2^h\ 51'\ 48''$ Mercure étoit entierement entré, & ſon bord oriental raſoit celui du Soleil.

A $2^h\ 53'\ 6''$ Mercure étoit éloigné du bord oriental du ſoleil exactement de la grandeur de ſon diametre, qu'il avoit par conſéquent parcouru dans l'eſpace d'une minute 18 ſecondes, d'où l'on a conclu ſon entrée dans le ſoleil à $2^h\ 50'\ 30''$, 22 ſecondes auparavant qu'on l'ait apperçû.

Il paroiſſoit fort noir, de figure exactement ronde, ſans aucune nébuloſité qui l'environnât, comme on l'avoit ſoupçonné en 1697, ce que l'on continua d'obſerver juſqu'à la fin.

Pour déterminer ſon cours dans le ſoleil, je le plaçai dans la lunette de 8 pieds, de maniere que par ſon mouvement journalier il parcourût exactement un des fils, & j'obſervai ſon paſſage par le centre & celui des bords du ſoleil par les fils horaires & les obliques. Dans d'autres obſervations le bord du ſoleil parcouroit un des fils, & je remarquois le paſſage du ſoleil par le fil horaire, & celui de Mercure par le fil horaire & les obliques.

La premiere de ces méthodes, qui conſiſte à faire paſſer Mercure par le centre, & les bords du ſoleil par le fil oblique

& les horaires, a cet avantage, lorſque cette planete eſt proche du parallele du centre du Soleil, qu'on a par ce moyen ſa ſituation au temps de ſon paſſage ſans aucune réduction ſenſible ; au lieu que par la méthode ordinaire, on a à la vérité exactement la ſituation de la planete par rapport au cercle horaire au temps de ſon paſſage par ce cercle : mais à l'égard de la diſtance au parallele, qui ſe meſure qar le paſſage entre les fils obliques, il faut avoir égard au mouvement de Mercure dans l'intervalle de ce paſſage qui eſt ſenſible dans l'eſpace de quelques minutes.

On a auſſi par cette méthode la ſituation de la planete dans le diſque du ſoleil par l'interſection de trois fils, ſçavoir le fil horaire & les deux obliques, ce qui donne le moyen de reconnoître les obſervations les plus exactes, lorſque l'interſection eſt dans un même point.

Fig. 1. Pour faire uſage de cette méthode, il faut circonſcrire au cercle qui repréſente le diſque du Soleil, un quarré *ABED*, & tirer à l'un des côtés *AB* le diametre parallele *FG*, on diviſera les arcs *FX*, *FI*, qui ſont chacun de 90 degrés en deux parties égales aux points *L* & *M*, d'où l'on menera les tangentes *MN*, *LN*, qui couperont le diametre *FG* prolongé en *N*. On diviſera les côtés *AB*, *DE*, en autant de parties que le diametre du ſoleil a employé de ſecondes à paſſer par le fil horaire. On prendra de *A* vers *B*, comme en *O*, & de *D* vers *E*, comme en *P*, la différence entre le paſſage de Mercure & du bord occidental du ſoleil par le fil horaire, & l'on menera *OP*. On prendra auſſi la différence entre le paſſage de Mercure & du bord du ſoleil par le fil oblique ſupérieur qu'on portera de *N* vers *G*, comme en *R*, & l'on menera *QH* parallele à *NV*. On prendra enfin la différence entre le paſſage de Mercure & du bord occidental du Soleil par le fil oblique inférieur qu'on portera de *N* vers *G*, comme en *S*, & l'on tirera *SV* parallele à *NM*. Les trois lignes *OP*, *QH*, *SV*, doivent ſe couper au poiut *T* qui marque la ſituation de Mercure au temps de ſon paſſage par le centre de la lunette.

La raiſon de cette opération eſt que Mercure étant placé au point *T* dans le diſque du ſoleil, la ligne *TV* repréſente le fil oblique ſupérieur, lorſqu'il paſſe par le centre de la lunette, & la ligne *TQ* le fil oblique inférieur. D'où il réſulte que cette planete parcourant la ligne *XT* parallele à *FG*, l'intervalle entre ſon paſſage par le centre & celui du bord par le fil oblique ſupérieur, doit être meſuré par *TY* égal à *NR*, & la différence entre ce paſſage & celui du bord par le fil oblique inférieur, doit être meſurée par *TX* égale à *NS*.

On peut auſſi, pour une plus grande facilité, prendre la différence en ſecondes entre le paſſage de Mercure par le centre, & celui des bords par les obliques, qui eſt meſuré par *RS*, dont la moitié *RZ*, eſt égale à la diſtance *TZ* de Mercure au fil horiſontal *FG*; car dans les triangles *TZR*, *TZS*, rectangles en *Z*, les angles *TRZ*, *TSZ*, ſont égaux à l'angle *XTR* de 45 degrés que le fil horiſontal *TX* fait avec le fil oblique *TQ*. Les angles *RTZ*, *STZ*, ſont donc chacun de 45 degrés, & par conſéquent *TZ* eſt égal à *RZ* ou *SZ*, c'eſt-à-dire à la moitié de *RS*.

Voici la premiere obſervarion qui a été faite du paſſage du ſoleil & de Mercure par les fils de la lunette.

A $2^h\ 55'\ 15''$ le premier bord au fil horaire.
2 57 28 Mercure au centre.
2 57 31 le ſecond bord au fil horaire.
57 55 le ſecond bord au fil oblique inférieur.
58 1 le ſecond bord au fil oblique ſupérieur.

Le paſſage du ſoleil par le fil horaire, dans cette obſervation, eſt de $2'\ 16''$, qui converties en minutes de degré, font 34 minutes du parallele que le Soleil décrit, & qui étant réduites en degrés d'un grand cercle, font $32'\ 32''\ \frac{1}{2}$. La différence entre le paſſage de Mercure & du ſecond bord du ſoleil par le fil horaire eſt de 3 ſecondes d'heure, ou de 45 ſecondes de degré, qui étant retranchés du demi-diametre du ſoleil ſur le parallele qui a été obſervé de 17 minutes,

donne la différence d'ascension droite entre le centre du soleil & Mercure de 16′ 15″ vers l'occident, qui étant ajoûtées à l'ascension droite du soleil au temps du passage de Mercure par le centre qui étoit de 224d 12′ 16″, donne l'ascension droite de cette planete à 2h 57′ 28″ de 224d 28′ 31″.

La différence entre le passage du bord oriental du soleil par les fils obliques est de 6 secondes, dont la moitié 3 secondes d'heure ou 45 secondes est la distance de Mercure au parallele du soleil vers le midi, à cause que le bord inférieur du soleil a passé le premier. Réduisant cette distance mesurée sur un parallele en secondes d'un grand cercle, on aura 43 secondes trois tierces, qui étant ajoûtées à la déclinaison du soleil, qui étoit alors de 16d 51′ 10″, donne la déclinaison de Mercure de 16d 51′ 53″. L'ascension droite de cette planete ayant été déterminée pour le temps de cette observation, de 224d 28′ 31″, on trouvera la longitude de 7s 16d 55′ 55″, dont retranchant la longitude du soleil de 7s 16d 40′ 48″, reste de la distance de Mercure au soleil en longitude de 15′ 7″ vers l'Orient. On calculera aussi la latitude de Mercure, qu'on trouvera de 3′ 44″ vers le Septentrion.

Nous ne rapporterons pas ici le détail de toutes les observations suivantes. Il suffira de remarquer qu'à 3h 13′ 33″ la différence entre le passage du bord oriental du soleil & de Mercure par le fil horaire étoit de 9 secondes, & que ce bord passa dans le méme instant par le fil oblique supérieur & par l'inférieur, ce qui montre que la déclinaison de cette planete étoit la méme que celle du soleil qui étoit alors de 16d 51′ 24″. Convertissant les 9 secondes d'heure en minutes d'un dégré, on aura 2′ 15″, qui étant retranchées de 17 minutes donne 14′ 45″, différence entre l'ascension droite du soleil & celle de Mercure, qu'il faut ajoûter à l'ascension droite du soleil qui étoit alors de 224d 12′ 56″ pour avoir celle de Mercure de 224d 27′ 41″. L'ascension droite & la déclinaison de cette planete étant ainsi connues, on aura sa longitude de 7s 16d 55′ 1″, dont retranchant celle du soleil, qui étoit alors de 7s 16d 41′ 29″, reste la distance de Mercure au

au soleil en longitude à $3^h\ 13'\ 33''$ de $13'\ 32''$, on l'avoit trouvée à $2^h\ 57'\ 28''$ de $15'\ 7''$; le mouvement de Mercure en longitude à l'égard du centre du soleil a donc été dans l'espace de 16 minutes 5 secondes de $1'\ 35''$, ce qui est à raison de $5'\ 54''$ par heure. On calculera aussi la latitude septentrionale de Mercure au temps de cette observation de $3'\ 58''$, plus grande de $14''$ que par la premiere observation, ce qui donne le mouvement horaire apparent de cette planete en latitude de $52''\ 15'''$.

Comme l'intervalle entre cette observation & la premiere est trop petit pour pouvoir en déduire le mouvement de Mercure avec quelque exactitude, nous avons employé la pénultieme observation, qui a été faite avec toute l'exactitude possible, & que nous avons préferée à la derniere, à cause que le soleil étoit alors dans les vapeurs où ses bords paroissoient mal terminés.

Le passage de Mercure par le centre de la lunette y fut observé à $4^h\ 21'\ 52''$, l'intervalle entre son passage & celui du bord oriental du soleil par le fil horaire étoit de 35 secondes, & l'intervalle entre le passage de ce bord par les obliques de 26 secondes; d'où l'on a tiré la distance en longitude de Mercure au centre du soleil de $6'\ 41''\frac{1}{2}$, plus petite de $8'\ 25''\frac{1}{2}$ que dans la premiere observation, & sa latitude de $5'\ 14''$, plus grande de $1'\ 30''$ que dans cette observation.

L'intervalle entre ces deux observations est de $1^h\ 24'\ 24''$: c'est pourquoi l'on fera comme $1^h\ 24'\ 24''$ est à une heure, ainsi $8'\ 25''\frac{1}{2}$ sont au mouvement horaire de Mercure à l'égard du soleil qu'on trouvera de $6'\ 0''\frac{1}{4}$.

On fera aussi comme $8'\ 25''\frac{1}{2}$ sont à la distance de Mercure au centre du soleil dans la pénultieme observation qui est de $6'\ 41''\frac{1}{2}$; ainsi $1^h\ 24'\ 24''$ sont à $1^h\ 7'\ 4''$, qui étant ajoûtés à $4^h\ 21'\ 52''$, donne le temps de la conjonction de Mercure à $5^h\ 28'\ 56''$. On fera de même comme $8'\ 25''$ sont à $6'\ 41''\frac{1}{2}$, ainsi $1'\ 30''$, différence en latitude entre les deux observations, sont à $1'\ 11''\ 32'''$,

qui étant ajoûtés à 5′ 14″, latitude de Mercure au temps de la derniere observation, donne sa latitude au temps de sa conjonction avec le soleil de 6′ 25″ 32‴. On fera enfin comme le sinus de 8′ 25″ ½ est à la tangente de 1′ 30″; ainsi le sinus total est à la tangente de 10ᵈ 5′ 46″ qui mesure l'obliquité de la route de Mercure à l'égard de l'écliptique.

Cette obliquité étant connue, on trouvera la latitude septentrionale de Mercure au temps de son passage par le milieu du soleil, de 6′ 19″ 36‴, & la différence entre le lieu de Mercure au temps de sa conjonction, & son lieu au temps de son passage par le centre du soleil, de 1 minute 6 secondes 32 tierces de degré, qui, converties en temps, supposant le mouvement horaire de Mercure de 6′ 0″, font 11′ 5″, qui étant retranchés du temps de la conjonction qui a été déterminé à 5ʰ 28′ 56″, donne le temps du passage de Mercure par le milieu de son cours dans le disque du soleil à 5ʰ 17′ 51″. On a déterminé son entrée à 5ʰ 50′ 30″, la différence est 2ʰ 27′ 21″ dont le double 4ʰ 54′ 42″, mesure le temps que Mercure a dû employer à passer par le disque du soleil.

Pour déterminer la situation du nœud de Mercure, nous avons employé une observation du passage de cette planete dans le disque du soleil, faite à Paris le 3 Novembre 1697, dans laquelle la conjonction arriva à 5ʰ 58′ du matin, la longitude de Mercure, vûe du soleil, étant de 1ˢ 11ᵈ 33′ 50″, & sa latitude de 10′ 42″ vers le midi, contraire à celle que l'on a observée le 9 Novembre de cette année, où la conjonction est arrivée à 5ʰ 29′, la longitude de Mercure étant de 1ˢ 16ʰ 47′ 10″, & sa latitude de 6′ 25″ ½ septentrionale.

Fig. 2. Pour représenter ces observations, soient les cercles *HILM*, *OPRS* qui représentent le soleil, dont les centres *D* & *C* sont éloignés l'un de l'autre de l'intervalle *CD* qui mesure sur l'écliptique la différence entre le vrai lieu de Mercure dans ces deux observations, qui est de 5ᵈ 13′

20″. Ayant tiré les diametres *IM*, *PS* perpendiculaires à *DC*, soit pris *CE* de 10′ 42″ vers le midi égal à la latitude méridionale de Mercure, vûe de la terre dans la premiere observation, & *DB* ou *CA* de 6′ 25″ ½ vers le septentrion égal à la latitude septentrionale de Mercure dans cette derniere observation, soit mené *AB*, parallele à *DC* & *BE* qui coupe *DC* au point *N*. Il est clair que l'intersection *N* de ces deux lignes marque le vrai lieu du nœud de Mercure, supposé qu'il n'ait eu aucun mouvement sensible dans l'intervalle entre les deux observations. Car *CE*, latitude de Mercure, vûe de la terre dans la premiere observation est à *DB*, latitude de cette planete dans l'observation de cette année, comme la vraie latitude de Mercure, vûe du soleil dans la premiere observation, est à sa vraie latitude dans l'observation de cette année; mais les latitudes des planetes sont entr'elles comme les sinus de leurs distances à leur nœud. Donc *CE* est à *BD*, comme le sinus de *CN* au sinus de *DN*, & *CE* plus *DB* ou *AE*, somme des deux latitudes qui est de 17′ 7″ ½, est à *CE* 10′ 42″, comme le sinus de *DN*, plus *NC* ou *DC* de 5^d 13′ 20″, est au sinus de *CN*, qu'on trouvera de 3^d 15′ 41″, & qui étant ajoûté au vrai lieu de Mercure dans la premiere observation qui étoit de 1^s 11^d 33′ 50″, donne la longitude du point *N* de 1^s 14^d 49′ 31″ qui est le lieu du nœud de Mercure supposé fixe.

Pour déterminer le temps auquel le nœud de Mercure supposé mobile est arrivé au point *N*, on fera comme *BA* ou *DC*, de 5^d 13′ 20″ est à *CN*, qui a été trouvé de 3^d 15′ 41″, ainsi 26 ans & 6 jours, temps que le nœud a employé à se mouvoir entre les deux observations, est à 16 années & 99 jours, qui étant ajoûtés au 3 Novembre de l'année 1697, donne le 10 Février de l'année 1714 pour le temps que le nœud de Mercure est arrivé au point *N*, sa longitude étant de 1^s 14^d 49′ 31″.

Pour rendre raison de cette opération, soit *CV*, la latitude véritable de Mercure au temps de la premiere observation, & *DT* cette latitude au temps de la seconde observation,

soient faits les angles *CVG*, *DTF*, égaux au complément de l'inclinaison véritable de Mercure, ensorte que les angles *CGV*, *DFT*, mesurent l'inclinaison véritable de cette orbite. *VG* représentera la distance de Mercure à son nœud au temps de la premiere observation, *TF* cette distance au temps de la seconde observation, & *GF* le mouvement de ces nœuds pendant l'intervalle entre les deux observations.

Dans les triangles *VNG*, *TNF*, les angles *VNG*, *TNF* sont égaux de même que les angles *GVN*, *FTN*, différence entre les angles égaux *CVN*, *DTN* & *CVG*, *DTF*; c'est pourquoi l'on aura *GN*, mouvement du nœud, depuis la premiere observation jusqu'à ce qu'il soit arrivé en *N*, est à *NF*, mouvement du nœud depuis cette intersection jusqu'à la seconde observation, comme *VN* est à *TN*, & composant *GF* est à *GN*, comme *TV* est à *VN*, comme *TQ* ou *CD* est à *CG*; mais *GF* est à *GN* comme le temps que le nœud a employé à se mouvoir de *G* vers *F* dans l'intervalle, entre les deux observations est au temps que ce nœud a employé à parcourir l'arc *GN* depuis la premiere observation jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point *N*. Donc *CD* est à *CN* comme le temps que le nœud a employé à se mouvoir entre les deux observations est au temps que le nœud a employé à parcourir l'arc *GN*, depuis la premiere observation jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point *N*. Ajoûtant ce temps à celui de la premiere observation, on aura le temps que le nœud de Mercure est arrivé au point *N*. Ce qu'il falloit trouver.

Pour déterminer le mouvement du nœud de Mercure, on comparera de la même maniere l'observation du 3 Novembre 1697, avec celle du 7 Novembre 1677, dans laquelle la longitude de Mercure étoit de $1^s\,15^d\,43'\,3''$, & sa latitude de $4'\,40''$ septentrionale, de dénomination contraire à celle que Mercure avoit le 3 Novembre 1697, & l'on trouvera que le lieu du nœud étoit le 4 Decembre 1683 de $1^s\,14^d\,27'\,26''$; on l'a trouvé le 10 Février 1714

de $1^s\ 14^d\ 49'\ 31''$; le mouvement du nœud a donc été de $22'\ 5''$ en 30 années 68 jours, ce qui eſt à raiſon de 44 ſecondes par année, & de $7'\ 23''$ pour 9 années 272 jours, intervalle entre le 10 Février 1710 & le 9 Novembre 1723. Ajoûtant ces 7 minutes $23''$ au lieu du nœud du 10 Février 1710 qui a été trouvé de $1^s\ 14^d\ 49'\ 31''$, on aura le lieu du nœud le 9 Novembre 1723 de $1^s\ 14^d\ 56'\ 54''$.

Voilà ce qui réſulte du calcul de la premiere & pénultieme obſervation.

Pour employer toutes les autres qui ont été faites depuis l'entrée de Mercure dans le ſoleil juſqu'à ce que l'on a ceſſé de le voir, on a décrit une figure qui repréſente le diſque du ſoleil, dans laquelle on a placé le lieu de Mercure, ſuivant toutes les obſervations qui en ont été faites, de la maniere qui a été enſeignée ci-deſſus, ayant égard à l'effet de la réfraction dans ces différentes obſervations. On a tiré enſuite par le plus grand nombre des lieux qui ont été ainſi déterminés, une ligne droite qui repréſente la route que Mercure a décrite dans le ſoleil. Cette ligne occupe dans le ſoleil 30 minutes 10 ſecondes, dont le diametre du ſoleil eſt de 32 minutes 32 ſecondes. La portion de cette route que Mercure a décrite depuis l'entrée de ſon centre dans le ſoleil, qui eſt arrivée à $2^h\ 51'\ 10''$ juſqu'à $4^h\ 26'\ 52''$, temps de la pénultieme obſervation, eſt de $9'\ 10''$, ce qui donne le mouvement horaire de Mercure à l'égard du ſoleil, vû de la terre de $6'\ 4''$, aſſez conforme à celui que l'on a déterminé ci-deſſus de $6'\ 0''$.

Le mouvement horaire apparent de Mercure étant de $0^d\ 6'\ 4''$, & la route que Mercure a décrite dans le ſoleil de $30'\ 10''$, on déterminera le temps que Mercure a employé à paſſer par le ſoleil, de $4^h\ 58'\ 38''$, dont la moitié $2^h\ 29'\ 19''$ étant ajoûtée à $2^h\ 51'\ 10''$, temps de l'entrée de ſon centre dans le ſoleil, donne ſon paſſage par le milieu du ſoleil à $5^h\ 20'\ 19''$, ce qui s'éloigne peu du calcul de M. Halley, qui donne le temps de ſon paſſage à $5^h\ 26'\ 0''$.

Ayant tracé dans la figure du soleil l'écliptique par rapport au parallele dont elle déclinoit dans le temps de l'observation, de $10^d\ 34'$, on trouve que la route de Mercure décline de l'écliptique de 8 degrés & un quart vers le septentrion, ce qui differe d'un degré 50 minutes de celle que l'on avoit déterminée par le calcul, & qui provient, selon les apparences, de ce que dans les dernieres observations le soleil étant près de l'horison, la différente réfraction des bords du soleil doit avoir fait varier la situation véritable de Mercure par rapport à l'écliptique. Cette obliquité apparente de la route de Mercure s'accorde assez exactement à celle qui résulte des tables de M. de la Hire de $8^d\ 12'\ 53''$.

A l'égard de la latitude, on la trouve de $6'\ 0''$, plus petite de 25 secondes que par la premiere comparaison, ce qui peut provenir de la même cause que nous avons expliquée ci-dessus.

Suivant cette latitude on trouvera par la méthode expliquée ci-dessus le mouvement annuel du nœud de Mercure de 54 secondes, & le lieu de son nœud de $1^s\ 15^d\ 3'\ 12''$, plus avancé de $6'\ 18''$ que par la précédente détermination. On peut aussi par cette observation déterminer immédiatement le lieu du nœud de Mercure ; car l'obliquité apparente de la route de Mercure étant connue de $8^d\ 12'\ 53''$, & sa latitude au temps de la conjonction de $6'\ 0''$, on aura la distance apparente de Mercure à son nœud au temps de sa conjonction de $42'\ 0''$.

Le mouvement véritable de Mercure, vû du soleil, est de $15'\ 17''$, dont retranchant le mouvement vrai du soleil, qui est de $2'\ 31''$, reste le vrai mouvement de Mercure à l'égard du soleil de $12'\ 46''$; c'est pourquoi l'on fera comme $6'\ 4''$ mouvement de Mercure, vû de la terre, sont à $12'\ 46''$; ainsi $42'\ 0''$, distance apparente de Mercure à son nœud au temps de sa conjonction avec le soleil, sont à $1^d\ 28'\ 26''$, distance véritable de Mercure à son nœud au temps de sa conjonction. Les retranchant du vrai lieu de Mercure, vû du soleil dans sa conjonction, qui est de $1^s\ 16^d\ 47'\ 10''$,

on aura le vrai lieu du nœud de Mercure de $1^s\ 15^h\ 18'\ 44''$, plus avancé de $15'\ 32''$ que par le calcul précédent.

On déterminera auſſi par le moyen de l'obliquité apparente de la route de Mercure & de ſa latitude, la diſtance du milieu de ſa route dans le ſoleil, au lieu de ſa conjonction de 51 ſecondes & demie de dégré, qui converties en heure, font $8'\ 31''$, qui étant ajoûtées à $5^h\ 20'\ 19''$, paſſage de Mercure par le milieu de ſa route dans le ſoleil, donne le temps de ſa conjonction à $5^h\ 28'\ 50''$, qui ne differe que de 6 ſecondes du calcul précédent.

On peut auſſi par le moyen de cette obſervation déterminer aſſez exactement la grandeur véritable de Mercure; car le temps que cette planete a employé à s'éloigner du bord du ſoleil, de la grandeur de ſon diametre, ayant été obſervé de $1'\ 18''$, on fera comme le temps que Mercure a employé à parcourir le ſoleil eſt au temps qu'il a employé à parcourir ſon diametre : ainſi les minutes & ſecondes compriſes dans la route de Mercure, ſont à la portion de cette route qui a été parcourue par ſon diametre apparent, qu'on trouvera de 7 ſecondes 53 tierces, & qui repréſenteroient le diametre de Mercure, vû de la terre, s'il avoit paſſé par le centre du ſoleil. C'eſt pourquoi il faut le réduire, en faiſant comme le diametre du ſoleil qui eſt de $32'\ 32''$ eſt à la route de Mercure de $30'\ 10''$, ainſi 7 ſecondes 53 tierces ſont au diametre de Mercure, vû du ſoleil, qu'on trouvera de 7 ſecondes 20 tierces. Dans l'obſervation faite en 1697, mon pere l'avoit déterminé de 8 ſecondes, ce qui eſt à peu-près de la même quantité.

Le mouvement horaire apparent de Mercure, étant de $6'\ 4''$, & ſon mouvement vrai, vû du ſoleil, de $12'\ 46''$, la diſtance de Mercure à la terre eſt à ſa diſtance au ſoleil dans la proportion réciproque de ces différens mouvemens, c'eſt-à-dire, comme 678 à 322; on aura donc la diſtance de Mercure à la terre à la diſtance de la terre au ſoleil comme 678 à 1000; ainſi le diametre de Mercure ou de la terre, qui eſt de 7 ſecondes 20 tierces, ne paroîtroit,

s'il étoit vû à la diſtance du ſoleil, que de 5 ſecondes, négligeant les tierces, au lieu que le diametre de la terre, vû du ſoleil, à la même diſtance, eſt de 20 ſecondes, qui eſt le double de ſa parallaxe ; la proportion du diametre de Mercure à celui de la terre eſt donc comme 5 ſecondes à 20 ſecondes, ſa ſurface comme 1 à 16, & ſa ſolidité comme 1 à 64; c'eſt-à-dire, que la grandeur de la planete de Mercure égale à peu-près, ou eſt même plus petite que la grandeur de la lune.

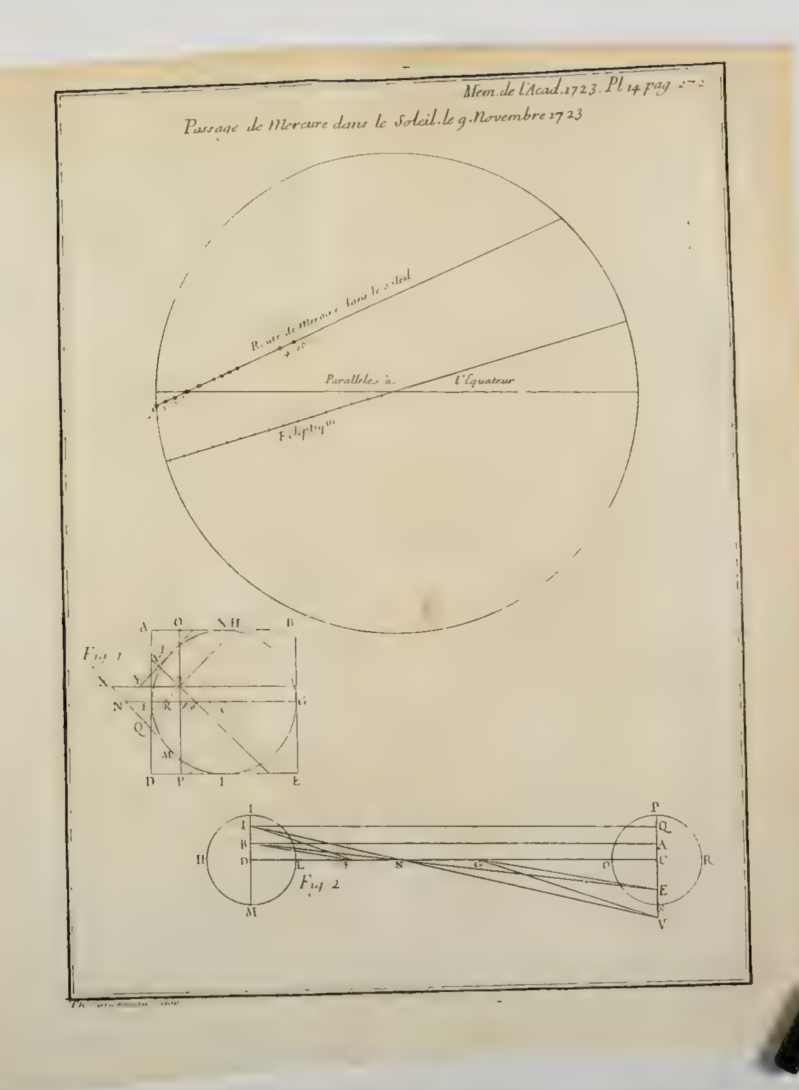
Nous avons auſſi eſſayé de déterminer la parallaxe de Mercure, & nous avons trouvé, par les obſervations qui ont été faites le plus exactement, que le mouvement de cette planete étoit plus vîte vers la fin que vers le commencement; ce qui s'accorde à la parallaxe qui abaiſſe les objets à meſure qu'ils s'approchent de l'horiſon: mais comme dans les dernieres obſervations les vapeurs altéroient les bords du ſoleil, & empêchoient de le voir bien terminé, nous n'avons pas cru en pouvoir déduire aucune détermination exacte.

Outre les avantages que l'on peut retirer de cette obſervation pour la théorie de Mercure, on a encore celui de pouvoir s'en ſervir pour déterminer la longitude ou la différence des méridiens entre tous les lieux où ſon paſſage par le ſoleil aura été obſervé, de la même maniere qu'on le pratique dans les éclipſes de lune & des ſatellites de Jupiter.

Ceux qui ſont placés ſur notre parallele vers l'Occident auront obſervé plus long-temps Mercure dans le ſoleil qu'à Paris, & on aura vû ſa ſortie du diſque de même que ſon entrée dans les Indes occidentales.



ure dans le Soleïl le 9. Novembre 1723.


Passage de Mercure dans le Soleil. le 9. Novembre 1723
Route de Mercure dans le Soleil
Paralleles à l'Equateur
Ecliptique
Fig. 1
Fig. 2

SUR LA RONDEUR QUE SEMBLENT affecter certaines especes de pierres, & entr'autres sur celle qu'affectent les cailloux.

Par M. DE REAUMUR.

DIFFERENTES especes de pierres semblent déterminées par leur nature à prendre certaines figures; les crystaux, les diamants, sont ordinairement formés avec un nombre constant de pans ou de facettes. Souvent ces facettes sont si polies, & jointes les unes avec les autres par des arrêtes si vives, qu'on a peine de croire qu'elles soient le simple ouvrage de la nature. D'autres pierres sont cubiques; d'autres sont des parallépipedes, dont les côtés sont inclinés sur leur base; tels sont ces especes de talcs qu'on appelle *crystaux d'Islande*. Les différentes especes de Gyps pourroient seules nous fournir plusieurs exemples de pierres qui ont constamment des figures très-particulieres. Ces figures qu'affectent certaines especes de pierres, comme celles qu'affectent divers sels, & quantité de minéraux, sont au rang des phénomenes remarquables, & de ceux qui embarrassent les physiciens; on peut même être arrêté par des figures moins singulieres, au moins l'ai-je été par celles de certaines pierres qui n'ont de particulier qu'une sorte de rondeur, qu'on peut principalement observer dans les différentes especes de cailloux. J'ai donné un Mémoire imprimé parmi ceux de 1720. sur leur nature & leur formation, où je me suis contenté de faire remarquer qu'ils sont ordinairement arrondis: mais je n'y ai point expliqué pourquoi ils le sont; je n'aurois pû alors avancer que des conjectures trop légeres, qu'une explication qui n'eût pas été fondée sur des observations assez immédiates. Comme je crois en avoir fait de telles depuis, je tâcherai à présent de rendre raison de ce petit phénomene:

21 Juillet 1623.

peut-être ne paroîtra-t-il pas assez important, pour que j'eusse dû si peu oser dans mon précédent Mémoire, ou pour que je dusse y revenir dans celui-ci. Après tout quand on ne donne que de simples conjectures, la physique y gagne rarement, & des explications claires & certaines des moindres phénomenes sont toûjours des pas faits, qui souvent nous mettent en route pour aller plus loin; on verra même par la suite de ce Mémoire, que ce que je n'avois eu en vûe que par rapport aux cailloux, s'étend à un grand nombre d'autres especes de pierres.

La rondeur dont je veux parler, celle que les cailloux ont assez ordinairement, n'est pas une rondeur bien parfaite; on en trouve à la vérité de ronds comme des boules; d'autres ressemblent à des boules applaties; d'autres à des boules allongées; d'autres approchent plus de la figure cylindrique: mais on en rencontre d'une infinité d'autres figures qui ne laissent pas d'avoir l'espece de rondeur dont il s'agit actuellement; elle se réduit, comme je l'ai fait observer dans le Mémoire cité ci-dessus, à ce que ces pierres n'ont ordinairement aucun angle aigu, à ce que leurs angles sont abbatus comme le seroient ceux de toute pierre qui auroit roulé long-temps; un caillou aura quelquefois différentes branches, ou quantité de parties qui sortiront d'une tige commune, mais le contour de la coupe transversale de chacune de ces parties est toûjours une courbe, on n'y apperçoit point de lignes droites.

Avant de chercher pourquoi cette sorte d'arrondissement est ordinaire aux cailloux & à certaines especes d'autres pierres, il nous faut reprendre quelques propositions de notre Mémoire sur la formation des cailloux. J'y ai défini le suc pierreux, le suc lapidifique. J'y ai dit qu'il n'étoit qu'une eau chargée d'un sable prodigieusement fin, d'un sable broyé à un point où l'art auroit peine à aller; que ce sable réduit ainsi en parties fines, étoit assez large pour se soûtenir dans l'eau. Quand l'eau dépose quelque part cette matiere fine, que les parties déposées sont collées les unes contre les au-

tres, sans mêlange de terre, de sable grossier, de cet amas de parties se forment des pierres crystallines, telles que les crystaux, ou d'autres pierres transparentes, comme celles qui pendent aux voûtes des grottes soûterraines; aussi peut-on appeller cette même matiere, *matiere crystalline.* Quand elle est déposée entre des grains de sable ou de gravier, qu'elle réunit en une masse, elle forme des grès. Quand elle est déposée entre des molécules de terre, elle forme des pierres communes, telles que nos pierres à bâtir. Enfin la combinaison des matieres, entre lesquelles est déposée cette matiere crystalline, ce sable fin, peut varier les genres de pierres aussi prodigieusement qu'elles le sont. Mais lorsque ce suc pierreux, ce suc lapidifique, après avoir formé des pierres spongieuses, continue de les pénétrer, & y dépose de nouveau, il les change en des pierres d'un autre genre; il en fait des cailloux: desorte que les cailloux sont souvent des pierres petrifiées. Des terres pures & très-compactes, comme les glaises, peuvent immédiatement se changer en cailloux, si elles sont suffisamment abreuvées de suc crystallin. Trois especes d'ouvrages de l'art m'ont paru propres à donner l'idée nette qu'on doit se faire des trois principaux genres de pierres, le verre, la poterie commune & la porcelaine. Les crystaux ressemblent au verre; la poterie, aux pierres communes, & la porcelaine aux cailloux; je veux dire que comme ces trois différentes productions de l'art different par la quantité de matiere vitrifiée, de même nos trois genres de pierres différent par la quantité de matiere crystalline. C'est ce que j'ai tâché d'établir dans le Mémoire que je rapporte. Mais pour celui-ci, il faut sur-tout se souvenir que le suc pierreux produit des pierres de différente nature, selon qu'il est déposé entre des matieres de différentes qualités.

Cela supposé, ce qu'il s'agit d'examiner actuellement c'est si nos cailloux ont dès leur premiere formation la rondeur que nous leur voyons, ou s'ils l'ont acquise depuis qu'ils ont été formés. On rendroit commodément raison de leur figure, si on pouvoit avoir preuve qu'ils ont été tous roulés pendant

de longues suites de siecles comme le peuvent avoir été ceux qu'on rencontre sur les bords des rivieres, ou sur les bords de la mer: mais quels que soient les bouleversemens qu'on sçait être arrivés à la terre, il n'est pas probable qu'ils ayent pû suffire pour façonner tous nos cailloux. Quelque part qu'on en rencontre, quoique ce soit dans les plus profondes minieres, au milieu des bancs de pierre commune les plus épais, on les trouve toûjours arrondis, au lieu qu'on trouve dans des roches bien moins épaisses les crystaux avec leurs angles aigus & vifs. Il faudroit donc qu'il ne se fût point formé de cailloux depuis ces grands bouleversemens, pendant lesquels ils auroient été assez roulés pour être arrondis, & que tous les crystaux eussent été formés depuis. Rien ne seroit avancé plus gratuitement, & il n'est rien de moins vraissemblable.

On est donc forcé de reconnoître que les cailloux, au moins en grande partie, ont eu leur rondeur dès leur premiere formation. On donneroit une cause assez probable de cette figure, si on pouvoit admettre qu'ils doivent leur origine au suc qui s'est réuni contre les voûtes des grottes soûterraines. Les congélations pierreuses qui y sont suspendues, ont toutes une sorte de rondeur qui approche tantôt de celles des demi-boules, tantôt de celles des tuyaux d'orgue. Mais ces sortes de congélations prennent communément des figures plus allongées que ne sont celles des cailloux. Les couches dont elles sont composées se peuvent distinguer à la vûe simple, qui ne peut nous en faire voir de pareilles dans les cailloux. Quand la figure de ces congélations tient de la sphérique, elles ont ordinairement peu de diametre, au lieu qu'on rencontre de gros cailloux faits en boule. Ces congélations sont souvent des tuyaux creux & vuides, ce qu'on n'observe point encore dans les cailloux. Enfin ce que nous avons établi sur la formation des cailloux s'accommoderoit mal avec cette explication; alors ils seroient des crystaux, ils ne seroient point des cailloux. Le caillou n'est pas seulement de la matiere crystalline réunie, il est fait de la

matiere cryſtalline qui a pénetré des pierres ſpongieuſes, ou qui a lié des molécules de terre compacte. D'ailleurs ou trouver les grottes, aux voûtes deſquelles ſe feroient formés ces lits prodigieux de cailloux qu'on rencontre diſpoſés les uns ſur les autres dans les plus profondes carrieres, dans les minieres de craie, dans les veines de ſable? Et comment formeroit-on tant de lits étendus les uns ſur les autres dans une même caverne? une ſeule voûte ſuffiroit au plus à en faire un lit.

Si on y faiſoit bien attention, je ne vois donc pas qu'on puiſſe ſe diſpenſer de croire que les cailloux qui compoſent différens lits arrangés les uns ſur les autres à de très-grandes profondeurs, n'ayent été produits dans les places qu'ils occupent aujourd'hui, & avec les mêmes figures. J'avouerai cependant que ce n'eſt qu'après avoir bien cherché à combattre ce ſentiment que je m'y ſuis rendu. Mais une ſeule obſervation a levé toutes les difficultés que j'avois ſur la poſſibilité du fait, & me ſemble propre à prouver beaucoup plus que ſa poſſibilité.

Dès qu'au milieu même d'un banc de ſable on trouve des maſſes de ſable, qui ont plus de conſiſtance que le reſte, dont les grains ſont liés enſemble, qui toutes ont des figures arrondies comme les cailloux; qu'on trouve même de ces maſſes de ſable arrondies qui forment des lits au milieu de certains bancs de ſable, comme les cailloux en forment dans d'autres, on ne ſera plus ſurpris que des cailloux ayent pû avoir dès leur premiere origine des figures arrondies, ou au moins on ne regardera plus cette difficulté comme particuliere aux cailloux. Qu'un ſuc pierreux acheve de lier ces maſſes de ſable, qu'il les pétrifie, les voilà changées en pierres rondes. Qu'il s'y inſinue encore de nouveau ſuc, qu'il les pétrifie, pour ainſi dire, une ſeconde fois, les voilà changées en cailloux. Nous aurions donc alors des cailloux, avec la ſorte de rondeur qui leur eſt propre, formés au milieu de leur lit.

Il y a long-temps que j'ai obſervé de ces maſſes de ſable, dont les grains commençoient à être liés enſemble, qui

commençoient à prendre la ſolidité de la pierre. Mais un lit de ſable qu'on a coupé depuis peu auprès de ma maiſon de Charenton, m'a donné occaſion de voir une plus grande quantité de ces corps; je les nommerai des *marrons de ſable*, comme les ouvriers appellent *marrons de glaiſe*, les corps arrondis qu'ils rencontrent dans la glaiſe. Ayant trouvé pluſieurs de ces marrons dans le ſable qui avoit été tranſporté, j'ai été en chercher dans le banc même d'où je ſçavois qu'on tiroit ce ſable. Là j'y en ai obſervé autant que j'ai voulu, de toutes formes, de toutes grandeurs, & pour ainſi dire de tout âge : mais tous avoient l'eſpece d'arondiſſement dont nous avons parlé juſqu'ici. Il y en avoit de ronds comme des boules, d'autres plus applatis, , d'autres oblongs, & d'autres de figures très-baroques, mais toûjours ayant leurs angles abbatus.

Le banc de ſable où je les ai rencontrés en ſi grande quantité, eſt un ſable gras, c'eſt-à-dire, un ſable mêlé avec de la terre; ſa couleur eſt verdâtre; il eſt couvert d'un autre lit de ſable beaucoup plus gros & plus ſec, d'un ſable avec lequel il n'y a point de terre mêlée, mais qui en récompenſe eſt rempli de cailloux de formes très-différentes, mais qui pourtant n'en avoient aucune à qui je n'en trouvaſſe de ſemblables dans les marrons de la veine du ſable inférieur; en un mot, les marrons étoient auſſi ſemblables aux cailloux du lit ſupérieur qu'il eſt poſſible de l'être.

Entre les marrons de ſable, nous avons dit qu'il y en avoit de toutes ſortes de groſſeur. J'en ai obſervé de plus petits que des pois, d'autres plus gros que des œufs, & d'autres plus gros que la tête. Quelques-uns des plus petits ne ſont encore qu'un ſable aſſez mal lié, on les briſe aiſément. Si on en caſſe d'autres plus gros, on ne reconnoit la grainure & la couleur du ſable que juſqu'à une certaine diſtance du centre, il ſemble ne former qu'une croûte. Celui de l'intérieur eſt caché par la matiere qui remplit la plus grande partie des intervalles que les grains laiſſent entre eux; en un mot, l'intérieur eſt pierre, & pierre d'une cou-

leur blanchâtre, & cela, parce que la couleur la plus ordinaire de la matiere cryſtalline eſt blanche. Enfin ayant obſervé un grand nombre de ces marrons, qui à l'extérieur ne ſembloient qu'un amas de ſable, j'en ai rencontré pluſieurs dont l'intérieur étoit déja converti en caillou.

Voilà des portions de ſable dont les grains ont été liés enſemble, qui ont formé des marrons qui ne different du reſte du ſable que par plus de conſiſtance; d'autres marrons ſont devenus pierres intérieurement. Enfin l'intérieur de quelques autres a préſque paſſé à l'état de caillou; tout cela ſans doute, ſelon que plus de matiere pierreuſe à été dépoſée dans les uns que dans les autres. Reſte donc à expliquer pourquoi certaines portions de ſable ont été réunies préférablement à tout le reſte de la maſſe, & pourquoi ces portions ont communément une figure arrondie. Nous avons commencé par dire que cette matiere pierreuſe, que cette matiere cryſtalline qui les a raſſemblés, n'eſt qu'un ſable fin au point de pouvoir ſe ſoûtenir aſſez longtemps dans l'eau; concevons que l'eau qui a traverſé une certaine épaiſſeur d'un banc de ſable, eſt chargée de cette matiere, ſoit qu'elle l'ait priſe dans les premieres couches de ce banc, ſoit qu'elle l'ait apportée de plus loin. Plus l'eau ſera chargée d'une grande quantité de cette matiere, plus elle ſera prête à la laiſſer précipiter. Si elle la dépoſe également dans toute l'étendue d'un lit de ſable, elle en liera en même temps tous les grains; & c'eſt ainſi que ſont formés des bancs étendus & épais de pierres de grès. Mais dans notre cas, elle ne doit réunir que certaines portions du ſable, & ce ſeront indubitablement celles où elle aura plus de facilité à dépoſer. Diverſes circonſtances y peuvent être favorables, qui toutes dépendent de ce principe général, que où l'eau aura moins de facilité à paſſer, & où elle ſéjournera davantage, là elle laiſſera plus de ſédiment pierreux. L'eau traverſe plus aiſément une maſſe de ſable qu'une maſſe de terre; la terre fait la fonction d'un filtre plus ſerré. De l'eau chargée de quelque matiere,

peut la conserver en passant au travers d'un tamis, & si on fait passer la même eau au travers d'un papier gris, elle laissera dessus la matiere qu'elle tenoit dissoute. Imaginons donc que certaines portions du sable de notre banc sont mélangées avec plus de terre que le reste, & il n'est guere possible que cela soit autrement; les portions qui auront plus de terre, auront plus de disposition à arrêter la matiere pierreuse. La différente finesse du sable y peut aussi contribuer; l'eau passera plus promptement, plus aisément au travers d'un banc de gravier, qu'au travers d'un banc de sable fin. Nous pouvons même concevoir un sable si fin, dont les grains laissent entre eux de si petits intervalles, que l'eau pour y passer soit obligée d'y passer seule. En un mot, certaines portions du lit de sable sont, par rapport aux autres, ce que le papier gris est par rapport au tamis.

Nous voyons donc pourquoi certaines portions de sable doivent être plûtôt réunies que d'autres, former nos marrons, ou pour ainsi dire, des embrions de pierres & de cailloux. Nous ne pouvons plus être embarrassés que par leur rondeur: mais le principe que nous venons d'employer en fournit encore la raison; l'eau dépose le plus où elle a le plus de peine à passer, & où elle séjourne davantage. Supposons que des grains de sable ont ont été liés, & qu'ils forment une espece de feuille, grande ou petite n'importe; une espece de gâteau plat, tant par dessus que par dessous: bientôt par notre principe, ce gâteau va devenir convexe de l'un & de l'autre de ses côtés. L'eau qui vient immédiatement au dessus de cette portion de sable, ou ne continuera pas sa route en ligne droite, ou la continuera plus difficilement que celle qui passe au travers du sable, dont les grains sont entierement détachés. Je conçois même que la difficulté, le plus de résistance que cette eau trouve à passer au travers de notre sable lié, de notre marron commencé, sera cause qu'une partie de cette eau coulera sur sa surface, comme l'eau coule sur un corps solide; elle descendra ensuite le long de ses bords extérieurs, & passera par dessous, où elle se joindra

joindra à celle qui a traversé notre marron. Par la résistance qu'une partie de cette eau a trouvée, par les détours qu'elle a suivis, il est visible qu'elle a plus séjourné sur cette masse de sable qu'elle n'eût fait si tous les grains eussent été détachés; par conséquent qu'elle y a déposé davantage. Mais les deux endroits où elle a séjourné le plus, sont environ le milieu de la surface supérieure & le milieu de la surface inférieure. C'est donc là où se doit précipiter le plus de sédiment; plus près des bords, il s'en doit moins précipiter: de sorte que si l'on fait attention aux rapports des quantités de sédiment qui est déposé, on verra que les surfaces supérieures & inférieures doivent, comme nous l'avons dit, prendre des figures convexes.

Si la matiere, qui est ainsi déposée, restoit sans mêlange, l'enveloppe de notre marron seroit de matiere crystalline; mais comme ce nouveau marron est environné de toutes parts de sable, la matiere crystalline lie ensemble de nouveaux grains, & cela dans la même proportion qu'elle se seroit elle-même accumulée. Cette méchanique simple est tout ce qu'il faut pour former des figures qui ayent l'espece de rondeur qu'ont nos cailloux & nos marrons; elle n'est pas propre à faire rien d'exactement rond, aussi ces corps ne le sont-ils pas. Il est aisé de déduire du même principe qu'ils n'auront pas d'angles aigus; si la premiere base en a eu, elle les perdra bientôt: l'eau qui coulera le long d'un angle aigu, coulera plus vîte que celle qui coulera le long des deux côtés, dont la rencontre fait cet angle; elle y trouvera moins de parties contre lesquelles elle puisse frotter & s'attacher. Il est vrai qu'on rencontre des cailloux d'une rondeur assez réguliere, de presque sphériques: mais si on fait attention combien leur nombre est petit, en comparaison de celui des pierres de cette espece qui ont d'autres figures, cette singularité n'aura plus rien de surprenant.

Tout le raisonnement que nous avons suivi jusqu'ici, conduit à penser que c'est surtout par-dessus & par-dessous que nos cailloux, nos marrons de sable doivent prendre de la

convexité ; je veux dire que ceux qui ſe trouvent minces, qui ont des formes de gâteaux peu renflés, ont dû être couchés horiſontalement dans leur lit ; que de même ceux qui, quoique minces, ſont compoſés de différens branchages, ont été poſés horiſontalement. Mais comme notre raiſonnement conduit à leur donner cette poſition, ſi on la leur trouve, il en eſt extrèmement fortifié : c'eſt ce qui m'a déterminé à fouiller dans les veines de ſable où ſont ces marrons, & à obſerver comment ils y étoient ſitués. Je les y trouvai dans la poſition où nous venons de conclurre qu'ils devoient être ; & cela ſi conſtamment, que j'ai été ſurpris de ne rencontrer point, ou preſque point d'exception à cette regle ; quoique bien des circonſtances y en euſſent pû apporter.

On tirera comme une conſéquence néceſſaire de l'explication que nous venons de donner, que toutes les pierres formées de grains & les pierres qui ont eu pour premiere matiere une terre commune, doivent auſſi avoir une figure arrondie. Les carrieres que l'on coupe journellement ſont des pierres trop groſſes pour que nous puiſſions voir leur figure : mais les pierres de grès, les roches, s'accommodent parfaitement avec cette conſéquence ; elles ſont toutes arrondies à la maniere des cailloux. Qu'on prenne garde à celles qui s'élevent ſur la ſurface de la terre, on leur trouvera une pareille figure. Les lits de terre ou de ſable dans leſquels ces dernieres pierres ont été produites, ont été emportés par la ſuite des temps, elles reſtent au-deſſus du terrein qui leur a ſervi de baſe, telles qu'elles ont été faites.

Avant de finir ce Memoire, reprenons encore une fois nos marrons de ſable ; ils nous fourniſſent des obſervations propres à confirmer ce que nous avons dit ailleurs ſur la production des cailloux en général, & ſur quelques-unes de leurs ſingularités. Si on caſſe de ces marrons des plus gros, & ſurtout de ceux qui ont des figures de boules, ou de boules applaties, & en général de ceux qui ſont gros & renflés, ſouvent on leur trouve au milieu une cavité, quelquefois aſſez conſidérable. Dans les uns cette cavité eſt remplie du

même ſable que celui de l'écorce, du même ſable préciſément que celui du banc où ſont ces marrons. Le ſable renfermé dans ces marrons ne ſuffiroit-il pas pour prouver ce que nous avons tâché d'établir ailleurs ; que les cailloux, dans le centre deſquels on rencontre une craie ou une terre blanche, comme ceux de Breüil-pont, ſont compoſés de cette même craie ou terre qui a été pénétrée du ſuc cryſtallin juſqu'à un certain point, & par-là eſt devenue méconnoiſſable, quoiqu'elle ſoit la baſe de la ſubſtance du caillou ?

On ne ſera plus même ſurpris de ce que cette terre devient méconnoiſſable, ſi on caſſe de nos marrons de tous les âges. On en obſervera qui ne ſont qu'un ſable lié, où tous les grains ſont ſenſibles. On en trouvera d'autres où on ne diſtinguera que peu de grains. A meſure que les grains s'effacent, la couleur du ſable qui eſt verdâtre diſparoît, & dans ceux où les intervalles des grains ſont encore mieux remplis, on ne retrouve plus qu'un léger œil verdâtre. D'autres, devenus plus compactes, où plus de matiere cryſtalline s'eſt introduite, ont une couleur plus blanche, la couleur verdâtre ne s'y fait preſque plus ſentir. Dans d'autres on ne la reconnoîtra plus, comme il arrive qu'on ne reconnoît plus la couleur blanche de la craie dans les cailloux, dont elle a pourtant été la baſe.

Les milieux de nos marrons ſont remplis de ſable détaché, quand la matiere cryſtalline a commencé par lier une couche de ſable qui en enveloppoit une maſſe. Mais quand au milieu de la premiere croûte qui a été liée, il s'eſt trouvé quelque creux, quelque crevaſſe dans le ſable, cette cavité eſt reſtée vuide en partie ; alors ſes parois intérieures ſont ſouvent revêtues de cryſtaux. Où ils n'avoient point de grains de ſable à réunir, ils ſe ſont réunis pluſieurs enſemble ; ils y paroiſſent avec leur tranſparence & leur blancheur naturelle, & avec toutes leurs facettes. Quelquefois cette matiere ne s'y eſt pas ſi bien cryſtaliſée, alors la maſſe eſt moins tranſparente, plus blanche, & pareille aux congelations de quantité de grottes ſoûterraines.

Outre que les cavités ſont plus petites dans les plus petits marrons, c'eſt que ſouvent les petits marrons n'en ont point, il a été aiſé au ſuc cryſtallin de pénétrer juſqu'au centre des petites maſſes ; auſſi ſi on cherche de ces cavités, il faut caſſer les gros marrons.

Cette derniere remarque s'étend à toutes les eſpeces de cailloux. Ceux qui ſont en boule, comme ceux d'Orel & de Saint-Dié en Dauphiné, & ceux de Provence, &c. ont preſque toûjours des cavités. Enfin lorſque les cailloux en boule n'ont point de cavité, quoiqu'ils ſoient entierement ſolides, on trouve ſouvent dans leur centre des marques de leur premiere origine. J'ai remarqué, par exemple, des grains de gravier mal réunis dans le centre des cailloux qui ſont formés en boules aſſez régulieres, & qu'on trouve auprès de l'endroit où ſont nos marrons. J'en ai vû qui avoient de la rougeur à leur écorce, & qui probablement venoient d'un ſable mêlé avec de la terre rouge.

Les matieres minérales reſſemblent aux pierres par plus d'un endroit. La production des unes & des autres dépend ſouvent d'une cauſe ſemblable. Une eau chargée de parties pierreuſes, forme les pierres dans les endroits où elle laiſſe du ſédiment; une eau chargée de matieres minérales, forme de même des minéraux. Les mines de différens métaux, au moins celles qui ſont moins anciennes que le monde, doivent leur origine aux parties métalliques qui ont été dépoſées dans certaines matieres. Je rappellerai à cette occaſion des mines de fer dont j'ai parlé ailleurs, ſans expliquer d'où leur venoit leur figure ; elles ſont compoſées d'une infinité de grains déliés, mais aſſez arrondis. Ces grains ſont mêlés avec une terre rouge. Qu'on faſſe dépoſer dans une terre rouge & compacte une eau qui tient du fer diſſous, & qu'on la faſſe dépoſer en des endroits beaucoup plus voiſins les uns des autres, que ceux où a dépoſé notre eau pierreuſe, & on expliquera pourquoi la mine de fer s'eſt formée par petits grains, & tous très-arrondis.

OBSERVATION DE MERCURE *sur le disque apparent du soleil.*

Par M. MARALDI.

NOUS avons fait par un temps assez favorable le 9 de Novembre 1723, l'observation du passage de Mercure par le disque apparent du soleil. 22. Dec. 1723.

Comme suivant les calculs astronomiques cette planete devoit entrer sur le bord oriental du soleil vers les trois heures après-midi, pour voir plus précisément le commencement de cette entrée, & en faire la premiere découverte, on étoit attentif à observer directement le soleil avec une lunette de 16 pieds. Nous avons commencé de voir Mercure, lorsqu'une petite partie de son disque étoit entrée sur le bord du soleil, & nous avons continué de l'observer avec la même lunette jusqu'à ce qu'il soit entré entierement. Pour lors il a paru rond & fort bien terminé, sans aucune apparence de nébulosité autour de lui, laquelle pût donner sujet de croire qu'il y eût quelque atmosphere autour de ce globe. Il a paru de la même maniere rond & sans nébulosité pendant tout le temps qu'il a été visible, non-seulement avec une lunette de 16 pieds avec laquelle nous l'avons consideré plusieurs fois durant ce temps-là, mais aussi avec une autre lunette de 34 pieds qui auroit pû rendre cette atmosphere plus sensible, supposé qu'il y en eût eu autour de cet astre: mais on n'en a pû rien distinguer avec la lunette de 34 pieds: non plus qu'avec celle de 16 pieds.

Une apparence que j'apperçus proche de Mercure dans une conjonction semblable qui arriva le 3 Novembre de l'année 1697, m'a donné occasion de faire plusieurs fois, & avec de grandes lunettes, une attention particuliere autour de cet astre dans la conjonction de cette année.

En 1697, comme je regardois le soleil à son lever avec

une lunette de 18 pieds, pour voir plus facilement Mercure, j'apperçus une espece de nébulosité vers une petite partie de son bord qui regardoit l'horison. Je n'observai pas long-temps cette apparence, ayant pris presque aussi-tôt une lunette de 3 pieds appliquée à un quart de cercle, pour déterminer la situation de Mercure sur le disque du soleil, en faisant passer ses bords & Mercure même par le fil horisontal & par le vertical qui sont à son foyer. Cependant je ne vis point cette apparence avec la même lunette de 3 pieds pendant tout le temps que je l'employai, ce qui arriva jusqu'à ce que Mercure fût près de sortir du bord du soleil. Alors ayant repris la lunette de 18 pieds, pour mesurer le temps que son disque employoit à sortir du bord du soleil, ce qui sert à déterminer le diametre apparent de Mercure ; je ne vis plus proche du même disque aucune nébulosité ; ce qui fit croire que ce que j'avois apperçu pouvoit être quelque apparence d'optique ; d'autant plus qu'elle ne fut apperçûe que lorsque le soleil paroissoit dans un brouillard qui étoit proche de l'horison. Cependant feu M. Cassini ne laissa pas de donner part de cette apparence dans un Memoire qu'il communiqua à l'Académie sur la conjonction de Mercure, & qui n'a point encore été imprimé, afin que dans la suite on y fit attention ; mais cette nébulosité n'ayant point été vûe dans la conjonction de cette année, on a lieu de croire que celle de 1697 n'a été qu'une apparence d'optique.

Dans l'observation de cette année, aussi-tôt que Mercure fut entierement entré sur le bord du soleil, vû par la lunette de 16 pieds, je l'observai avec une autre de 9, qui avoit à son foyer les fils qui se croisent à angles de 45 degrés, & qui étoit montée sur une machine parallactique, pour suivre plus commodément le soleil. On dirigeoit la lunette de sorte que son bord septentrional parcouroit un de ces fils, alors laissant la lunette immobile, on comptoit le temps que le bord occidental, Mercure & le bord oriental du soleil passoient par un fil perpendiculaire à celui qui étoit parcouru par le bord septentrional, & on comptoit en même-temps

à l'horloge les minutes & les secondes que Mercure passoit par les fils obliques, & qui sont inclinés de 45° à l'égard des autres.

La différence du temps entre le bord du soleil & Mercure par le fil perpendiculaire, donnoit la différence d'ascension droite entre l'un & l'autre; & la différence du passage entre un des obliques & le perpendiculaire, donnoit l'argument de la déclinaison entre le bord septentrional du soleil & Mercure.

Nous avons fait plusieurs de ces observations durant tout le temps que Mercure a été visible, qui servent à déterminer le lieu où il s'est trouvé en différens points du disque apparent du soleil, à connoître la situation par rapport aux cercles de la sphere, à tracer la route apparente à l'égard des mêmes cercles, & l'angle que cette route faisoit avec le parallele à l'équinoxial, & avec l'écliptique. Par ces mêmes déterminations on a connu le temps de sa conjonction en ascension droite & en longitude avec le soleil, la situation qu'il avoit alors dans l'écliptique, le temps qu'il est arrivé au milieu de la course, & la distance qu'il y avoit alors entre le centre du soleil & Mercure.

Le temps de l'arrivée de Mercure au milieu de sa route étant comparé avec le temps de son entrée, fait connoître l'heure qu'il devoit sortir du bord du soleil. La latitude de Mercure au temps de sa conjonction étant comparée à la variation qui est arrivée à la même latitude durant le temps que Mercure a été visible, sert à déterminer l'heure & la minute qu'il a passé par son nœud, & par conséquent à trouver dans l'écliptique le lieu de ce nœud, aux environs duquel arrivent ces conjonctions visibles. La distance des centres au milieu de l'éclipse, ou bien la latitude de Mercure au temps de sa conjonction, sert enfin à connoître l'angle que l'orbite de Mercure fait avec l'écliptique. Voilà les connoissances principales que l'on tire de ces observations, & que nous allons chercher par les observations & par les calculs que nous rapporterons ci-après.

Toutes ces recherches sont nécessaires pour perfectionner

la théorie du mouvement de cette planete, & pour prévoir dans la ſuite le temps que ces ſortes de phénomenes doivent arriver.

Bien que toutes les tables ne donnent pas également bien ces obſervations, elles s'accordent cependant à repréſenter, à quelque choſe près, cette conjonction qui eſt arrivée proche du nœud aſcendant qui eſt dans le taureau : mais il n'en eſt pas de même de celles qui ſe rencontrent vers le nœud oppoſé qui eſt dans le ſcorpion. Une des raiſons principales de cette diverſité eſt que nous avons un plus grand nombre d'obſervations faites proche du lieu du Zodiaque où eſt arrivée celle de cette année, que dans le ſigne oppoſé.

Celle de Gaſſendi, faite en 1631, qui eſt la premiere de toutes celles qu'on ait jamais obſervées, arriva, le ſoleil étant dans le ſigne du Scorpion proche du nœud aſcendant ; il en eſt de même des autres qui ont été faites par différens Aſtronomes en différentes années, depuis 1631, juſqu'à la derniere du mois de Novemb. mais proche de l'autre nœud, nous n'avons que celle de 1661 obſervée par M. Hevelius.

Il eſt vrai que quelques Hiſtoriens nous ont laiſſé la memoire d'une apparence de tache obſervée dans le ſoleil, qu'ils ont cru être Mercure, lorſque ces deux aſtres étoient aux environs du nœud deſcendant. Telle eſt entre autres celle qui eſt rapportée par l'Auteur des Annales des François, obſervée au mois d'Avril de l'année 807, ſous le regne de l'Empereur Charlemagne. Ce grand Prince, comme il paroît par les Lettres d'Alcuin & par le témoignage d'Eginard qui en a écrit la vie, ſçavoit l'Aſtronomie, & il prenoit un grand plaiſir à obſerver les mouvemens des Aſtres, ce qui anima les Aſtronomes de ce temps-là à faire quantité d'obſervations, parmi leſquelles eſt la tache obſervée dans le ſoleil au mois d'Avril, qu'ils croyoient être Mercure ; mais après qu'on a porté la théorie du mouvement de cette planete à une plus grande perfection qu'elle n'étoit dans le neuvieme ſiecle, & après la découverte des taches du ſoleil, faite au commencement du ſiecle paſſé, un peu après l'invention

l'invention de la lunette, on a reconnu que l'apparence observée du temps de Charlemagne ne pouvoit pas être Mercure, mais une tache semblable à celles que l'on voit ordinairement dans le soleil; ainsi si ces astronomes n'ont pas eu l'avantage d'avoir fait la premiere observation de Mercure dans le soleil, comme ils croyent, ils ont eu celui de la premiere découverte des taches du soleil, quoique imparfaite, à laquelle ils ne s'attendoient pas.

Ce n'est donc qu'après que la théorie du mouvement de Mercure a été portée à une plus grande perfection par Kepler, & après l'invention de la lunette, qu'on a pû faire des observations du passage de Mercure dans le soleil, parce que la théorie marque le temps auquel doivent arriver ces passages, ce qui fait qu'on est attentif à les observer, & les lunettes servent à faire voir Mercure dans cette situation, qui sans ce secours ne seroit point visible, à cause que son diametre est trop petit pour être apperçû à la vûe simple dans l'image du soleil faite par ses rayons qui passent par un petit trou dans une chambre obscure. Cette méthode est sans doute celle avec laquelle les astronomes du tems de Charlemagne ont observé la tache qui parut de ce temps-là; car nous avons remarqué plusieurs fois des taches qui étoient visibles de cette maniere.

Quoique les regles du mouvement de Mercure ayent été portées à une grande perfection depuis qu'on a observé les conjonctions visibles de cette planete, il y a lieu de croire qu'on les auroit perfectionnées encore davantage, si les observations que nous en avons, avoient pû être parfaites, & que les astronomes en eussent pû remarquer le commencement, le milieu & la fin. Mais de sept conjonctions qui ont été visibles, nous n'avons que celle qui a été observée par M. Halley à l'Isle de Sainte Heleine, qui ait toutes ces circonstances; encore ne fut-elle pas complete, parce qu'il ne put pas déterminer la distance du centre de Mercure à celui du soleil au milieu de l'éclipse, comme il auroit été nécessaire, à cause de la situation incommode où il falloit être pour voir le soleil, qui étoit fort élevé sur l'horison.

Dans toutes les autres conjonctions ; si on a observé le commencement, on n'a pas pû voir la fin ; ou si on a observé la fin, on n'a pas pû déterminer le commencement, soit par quelque accident particulier, soit parce que le soleil n'étoit pas sur l'horison pendant toutes ces phases.

Dans la derniere observation du passage du soleil par le disque du soleil, qui fut observée le 3 Novembre 1697, par feu M. Cassini, & que j'observai aussi, on vit au lever du soleil, Mercure qui étoit fort avancé dans sa route, de sorte que depuis qu'on commença de le voir jusqu'à sa sortie du soleil il ne fut visible que pendant trois quarts d'heure, étant entré sur le bord oriental du soleil, & passé sa conjonction avant son lever, & lorsqu'il étoit au-dessous de l'horison, au lieu que dans le passage de cette année, nous avons vû son entrée sur le bord oriental, sans avoir pû observer sa conjonction & sa sortie, ces phases n'étant arrivées qu'après que le soleil & Mercure ont été au dessous de l'horison.

Pour trouver le temps auquel ces phases sont arrivées, & pour connoître les autres principes qui servent à établir les regles des mouvemens de Mercure qui ont été marquées ci-dessus, nous avons fait plusieurs observations, parmi lesquelles nous employerons celles qui sont plus éloignées entr'elles, & qui sont en même-temps les plus exactes.

La premiere de toutes est celle que nous avons faite à 2^h $55' 42''$; dans cet instant Mercure passa par un fil perpendiculaire à celui que parcouroit le bord septentrional ; à 2^h $55' 44''$, le bord oriental du soleil passa par le même fil, Mercure employa à passer $1' 11''$ entre le premier oblique & le perpendiculaire, & il employa un égal espace de temps à passer entre le perpendiculaire & le second oblique, ce qui est une marque de la précision de l'observation, outre que le bord septentrional parcouroit exactement le fil qui représente son parallele.

L'autre observation que nous employons est celle qui a été faite à 4^h $22' 9''$, & dans cet instant Mercure passa par le fil perpendiculaire ; le bord oriental du soleil passa par le

même fil à $4^h 22' 45''$; donc la différence du paſſage fut de $36''$ de temps, & la différence du paſſage de Mercure entre l'oblique & le perpendiculaire fut de $55'$ de temps, qui eſt l'argument de la déclinaiſon entre le bord ſeptentrional du ſoleil & Mercure.

Nous avons fait d'autres obſervations après celle-ci : mais comme les bords du ſoleil étoient mal terminés, à cauſe des vapeurs de l'horiſon dont le ſoleil étoit proche, on ſe contentera de comparer les deux précédentes.

Puiſque dans la premiere obſervation faite à $2^h 55' 42''$, Mercure a paſſé $2''$ de temps avant le bord oriental, & que le demi-diametre du ſoleil paſſoit en 68, il ſuit que Mercure paſſoit par un cercle horaire, $66''$ de tems après le centre du ſoleil.

J'employe la ſeconde obſervation telle qu'elle a été faite, & je néglige une petite différence qui peut être cauſée par la réfraction, parce qu'elle ne monte qu'environ à une ſeconde de temps en déclinaiſon, & qu'elle eſt encore plus petite en aſcenſion droite, ce qui eſt une préciſion que les obſervations peuvent donner difficilement.

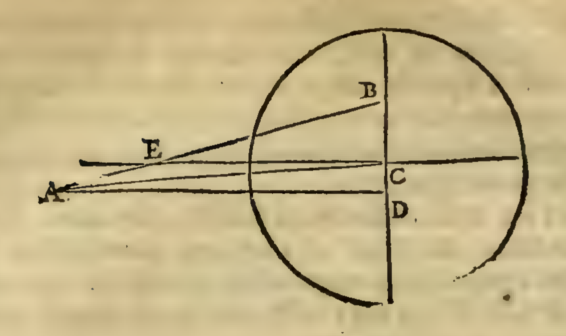
Puiſque donc dans la ſeconde obſervation, Mercure paſſoit par un cercle horaire 36 ſecondes avant le bord oriental du ſoleil, il en réſulte que Mercure paſſoit 32 ſecondes après le centre du ſoleil ; donc entre la premiere obſervation faite à $2^h 55' 24''$, & la ſeconde faite à $4^h 22' 9''$, il y a eu un intervalle de $1^h 26' 27''$, pendant lequel la variation du paſſage de Mercure a été de 34 ſecondes de temps. Dans cette proportion, la différence de 32 ſecondes qu'il y avoit au temps de la ſeconde obſervation entre le paſſage du centre du ſoleil & de Mercure, demande $1^h 21' 20''$, ce qui étant ajoûté à l'heure de la ſeconde obſervation faite à $4^h 22' 9''$, donne $5^h 43' 29''$, qui eſt le temps que Mercure eſt arrivé en conjonction en aſcenſion droite avec le ſoleil.

Il s'agit préſentement de ſçavoir la différence de déclinaiſon de Mercure à l'égard du centre du ſoleil au temps de cette conjonction. Dans la premiere obſervation, la différence de l'inaiſon entre le bord ſeptentrional du ſoleil &

Mercure a été trouvée de 1′ 11″ de temps dans le parallele du soleil ; puisque le demi-diametre du soleil passoit par un cercle horaire en 68 secondes, il suit que dans la premiere observation Mercure étoit plus méridional que le centre du soleil de 3″ de temps. Dans la seconde observation, par un semblable raisonnement, on trouve la différence de déclinaison entre le centre du soleil & Mercure de 13 secondes vers le septentrion; donc la somme de ces deux différences, qui est 16″, est le mouvement de Mercure en déclinaison dans l'espace de 1ʰ 26′ 27″: mais depuis la derniere observation, jusqu'au temps de la conjonction, le mouvement de Mercure en déclinaison dans la même proportion, auroit été de 15 secondes, qui étant ajoûtées à 13″, déclinaison de Mercure au temps de la derniere observation, donne 28″ de déclinaison de Mercure à l'égard du centre du soleil vers le septentrion au temps de sa conjonction en ascension droite.

Pour trouver présentement l'angle *BEC* que la route apparente de Mercure fait à l'égard du parallele qui passe par le centre du soleil, on le cherche par la variation d'ascension droite, comparée avec la variation de déclinaison qui est arrivée en même temps à Mercure, en faisant comme 34″, variation d'ascension droite, à 16″ variation de déclinaison, ainsi le rayon est à la tangente de 25° 12′.

Par le moyen de cet angle & de la déclinaison *CB* de Mercure au temps de la conjonction, on trouve la distance des centres de 25″, & la différence d'ascension droite entre la conjonction & le milieu de l'éclipse de 10″ ½, auxquelles en raison de 34″ en 1ʰ 26′ 27″ convient 27′ 0″ de temps, qu'il faut ôter de l heure de la conjonction trouvée à 5ʰ 43′ 29″, & on aura 5ʰ 16′ 29″, temps que Mercure est arrivé au milieu de sa course. Si de cette heure on en ôte le temps que le centre de Mercure est entré dans le soleil, qui a été à 2ʰ 50′ 35″, on a la demi-demeure de Mercure dans le soleil de 2ʰ 25′ 54″, qui étant ajoûtée à l heure du milieu de l'éclipse trouvée ci-dessus, donne le temps que Mercure est sorti du soleil à 7ʰ 42′.



Pour connoître l'angle *BAC* que la route de Mercure fait avec l'écliptique, nous avons calculé, par le moyen du lieu du soleil, l'angle *ECA* que le parallele qui passe par le centre du soleil fait avec l'écliptique. Cet angle est de 16° 38′, lequel étant ôté de l'angle que la trace de Mercure fait avec ce parallele de 25° 12′, on a l'angle *BAC* que la trace apparente de Mercure fait avec l'écliptique de 8° 34′. Par le moyen de *BC* & de l'angle *ABC* trouvé par le lieu du soleil, on aura *BA*, *AC*, & *AD* qui est 163 parties, dont le demi-diametre est 68; à ces 163 parties en raison de 34 parties que Mercure a faites en $1^h\,27'\,62''$, il est dû $6^h\,54'\,28''$, qui est le temps que Mercure a employé à passer entre son arrivée au nœud en *A*, & sa conjonction avec le soleil; ce temps étant ôté de l'heure de la conjonction en ascension droite, que nous avons trouvée à $5^h 43'\,29''$, on aura le tems que Mercure a passé par son nœud le 8 Novembre à $10^h 49'$ du matin.

Ces 163 parties réduites à un grand cercle, & converties en degrés, donnent 39′, qui est la distance en ascension droite, vûe de la terre, que le nœud de Mercure avoit au temps de la conjonction, cette distance étant réduite à l'écliptique *AC*, donne 41′.

Il faut réduire cet arc, vû de la terre, à celui qui seroit vû du soleil par la proportion des distances de Mercure au soleil & de Mercure à la terre, qu'il faut emprunter de la théorie de ces deux planetes; nous la supposons comme 465

à 1000, ainsi l'arc de la distance de Mercure à son nœud, vûe de la terre de 41', étant réduite au soleil, sera d'un degré 28'. Depuis le temps de l'arrivée de Mercure au nœud jusqu'au temps de sa conjonction avec le soleil, le mouvement du soleil a été de 14' 20", qui étant ajoûté à l'arc de la distance de Mercure au nœud, vûe du soleil, donnera l'angle ou l'arc de la distance du soleil au nœud de Mercure, vûe du soleil, de 1° 45' 0"; cet arc étant ôté du lieu du soleil au temps de sa conjonction qui est au signe du scorpion 16° 49' 0", on aura le lieu du nœud ascendant de Mercure au 15° 4' du Taureau.

On a trouvé ci-dessus la distance des centres de Mercure au soleil au temps du milieu de l'éclipse, de 25 parties, dont le demi-diametre est 68. Ces 25 parties converties en minutes de degré, & réduites à un grand cercle, donnent 6 minutes moins une seconde. Ces 6 minutes réduites à l'apparence qu'elles feroient du soleil, par la proportion des distances trouvées ci-dessus, donnent 12' 52".

Par le moyen de cet arc & par celui de la distance de Mercure au nœud, vûe du soleil, trouvé ci-dessus de 1° 45' 0", on connoît l'angle de la véritable inclinaison de l'orbite de Mercure à l'égard de l'écliptique de 7° 0'.

Nous avons calculé la longitude & la latitude de Mercure au temps des deux observations précédentes, & par ce moyen on a trouvé l'heure de la conjonction de Mercure en longitude à 5h 24', sa latitude septentrionale de 6' 6", le soleil étant au 16° 48' du Scorpion : le lieu du nœud, & l'inclinaison de l'orbite de Mercure avec l'écliptique, sont les mêmes qui résultent du premier calcul.

Nous avons reçû des observations de Mercure dans le soleil, faites à Genes par M. le Senateur Saluago, à Bologne par M. Manfredi, & à Padouë par M. Poleni. A Bologne, Mercure étoit entré entierement à 3h 27' 45". A Paris, il parut tout entré à 2h 51' 48"; donc la différence des méridiens est 35' 57", comme elle résulte par les éclipses du premier satellite de Jupiter. Mr Poleni a observé Mercure, en

recevant l'image du soleil de 10 pouces, formée par une lunette de 10 pieds, & il a marqué l'entrée totale à 3^h $29'$ $54''$ à Padoue; à Paris elle a été à 2^h $51'$ $48''$, la différence des méridiens sera $38'$ $6''$.

MEMOIRE
SUR
LES BAROMETRES LUMINEUX.

Par M. DU FAY.

LA lumiere que rendent naturellement quelques Barometres, est une découverte dûe au hasard, & que l'art dans la suite a tâché de perfectionner. L'an 1675, M. Picard transportant son barometre dans un lieu obscur, s'apperçut de quelque lumiere qui paroissoit dans l'espace vuide qui est au-dessus de Mercure; il remarqua de plus, qu'en le secoüant fortement, il en rendoit davantage, & qu'elle ne paroissoit qu'à la descente du Mercure. Les Actes de Leipsick & les autres Journaux firent mention de cette découverte, & exhorterent le public à travailler à la recherche de la cause d'un phénomene si singulier. On tenta en vain la même expérience sur plusieurs barometres, à peine s'en trouva-t-il deux ou trois qui rendissent quelques foibles éclats de lumiere, de façon que cette recherche fut comme abandonnée, jusques en 1700 que M. Bernoulli ayant lû, comme il le rapporte, ce fait dans un petit traité des barometres & notiometres ou hygrometres, résolut de suivre cette découverte, & fit sur cela plusieurs expériences, desquelles il ne tira pas grande utilité: mais enfin il parvint à trouver une pratique sûre pour les rendre lumineux, ce qu'il détaille dans une lettre adressée à M. Varignon, & inserée dans les Mémoires de l'Academie de l'année 1700. Voici en peu de mots quel étoit son principe. Il avoit remarqué que le Mercure, en passant par l'air,

contractoit une pellicule livide qui s'attachoit à la surface supérieure de la colonne dans le barometre, & qui selon lui nuisoit extrèmement à l'émanation de la matiere du premier élément qui devoit sortir du Mercure pour remplir une partie du vuide du tuyau, & il avoit imaginé, pour remédier à cet inconvénient, plusieurs moyens très-ingénieux de charger les barometres sans que le Mercure traversât l'air. Il fit part à l'Academie de toute la suite de cette découverte: mais comme l'Academie voulut être instruite par elle-même, on y fit les mêmes opérations avec toutes les circonstances que demandoit M. Bernoulli, & on reconnut que les barometres construits de cette façon, n'étoient pas toûjours lumineux, que ceux même qui l'étoient, ne répondoient pas à l'effet qu'on en attendoit; ainsi on ne put pas approuver entierement les observations de M. Bernoulli. Il répondit par une seconde lettre aux difficultés qu'on lui avoit faites, & soûtint toûjours son opinion; il l'appuya même par la nouvelle découverte qu'il fit d'un autre phosphore qui se faisoit, en mettant du mercure très-pur dans une phiole nette & fort seche, & pompant ensuite l'air le plus exactement qu'il étoit possible. Cette expérience ne réussit pas d'abord aussi parfaitement qu'à M. Bernoulli, mais elle a été confirmée depuis par une infinité d'épreuves qu'on en a faites.

En 1706 M. Dutal Medecin, fit inférer dans les Nouvelles de la Republique des lettres, un Mémoire dans lequel il confirme la réussite des opérations de M. Bernoulli, & surtout celle du mercure dans la phiole vuide d'air grossier; & il croit que l'Academie ne les avoit pas faites avec assez d'exactitude.

En 1708 M. Haukſbée, dans les Mémoires de la Societé Royale de Londres, après avoir décrit un phosphore construit avec un globe vuide d'air qu'il faisoit tourner rapidement sur son centre, & qui par ce moyen rendoit beaucoup de lumiere, lorsqu'on en approchoit la main, croit que la lumiere des barometres n'est causée que par la friction du mercure contre les parois intérieures du tube vuide d'air grossier.

En

En 1710, M. Hartsoeker, dans un Livre intitulé *Eclaircissemens sur les conjectures physiques*, écrivit contre les expériences & le système de M. Bernoulli, niant la vérité des faits, & combattant les raisons qu'il en apporte, sans en donner d'autre lui-même que la pureté du mercure & la netteté du tuyau, ce qui ne suffit pas, comme les expériences journalieres le démontrent.

En 1715, Jean Frideric Weidler fit imprimer une Dissertation sur la même matiere, dans laquelle il combat le sentiment de M. Bernoulli, disant que la pellicule que contracte le mercure en passant par l'air, ne nuit en rien à la lumiere, qu'il croit ne venir d'autre chose que de la répercussion des rayons de la matiere lumineuse qui, quoique dans l'obscurité, conservent leur même tension & leur même effort.

En 1716, Michel Heusinger donna une Dissertation qui a pour titre, *De nocticulâ mercuriali*: il rapporte qu'ayant chargé un barometre si exactement, qu'en l'inclinant, on n'appercevoit en haut aucune bulle d'air, il s'étoit trouvé fort lumineux; mais que cependant ce vuide exact n'étoit pas absolument nécessaire, puisque quelques autres barometres, dans lesquels on remarquoit sensiblement un peu d'air, ne laissoient pas d'être lumineux, quoiqu'à la vérité ils le fussent moins que ceux qui étoient absolument vuidés d'air grossier, ce que plusieurs habiles gens ont regardé comme très-difficile, & que Boyle assûre n'avoir jamais pû exécuter parfaitement. Il remarque aussi que les bulles d'air qui se sont rencontrées à diverses hauteurs dans la colonne de mercure, ont jetté quelques éclats de lumiere: il ajoûte que l'extrème pureté du mercure n'est pas nécessaire, puisqu'ayant fait un amalgame de 23 parties de mercure & de 5 de plomb, le barometre qu'il en construisit fut lumineux: il finit la premiere partie par les précautions nécessaires pour rendre lumineux le mercure contenu dans une phiole vuide d'air. Dans la seconde, il rend raison de ces phénomenes; il établit d'abord que les parties du mercure sont extraordinairement divisibles & de figure sphérique, & que dans les interstices

que laissent entr'eux ces petits globes, est contenue une grande quantité de matiere subtile qui s'exprime, pour ainsi dire, & sort du mercure lorsqu'on l'agite, ce qui produit la lumiere que nous voyons; & en même-temps il réfute le sentiment de Weidler sur la répercussion des rayons de matiere subtile, & continue l'explication des phénomenes qu'il a décrits, disant que si le mercure n'est ordinairement lumineux que lorsqu'il descend, c'est qu'alors il abandonne la matiere lumineuse qui étoit contenue dans ses pores, au lieu qu'en remontant, il la suit, & en absorbe une partie, & chasse l'autre par les pores du verre avant qu'elle ait pû faire son effet: enfin il demande que le mercure soit purgé autant qu'il sera possible d'air grossier, & particulierement de toute humidité, qu'il dit être un obstacle insurmontable à la lumiere.

En 1717. M. de Mairan, dans une dissertation sur les phosphores, qui remporta le prix à l'Académie Royale de Bordeaux, attribue cette lumiere au soufre du mercure qui est en mouvement, & dit qu'elle seroit beaucoup plus vive, s'il ne restoit dans le vuide des barometres les plus exactement chargés & dans les phioles dont on a pompé l'air, une matiere différente de l'air commun & de la matiere subtile qui arrête le mouvement de ce soufre & la lumiere qui en résulte; ce qui arrive sur-tout lorsque le mercure monte, au lieu que quand il descend, il y a une partie du tuyau la plus proche de la surface du mercure qui reste, au moins pour un moment, libre de cette matiere qui ne peut pas suivre le mercure avec assez de rapidité, & qui par ce moyen donne lieu à son soufre de se développer.

Voilà en substance quelle est l'opinion des Auteurs qui ont traité cette matiere; j'en ai omis plusieurs qui n'en ont dit que quelques mots en passant, & je vais rapporter les faits que j'ai éprouvés, après avoir appris d'un vitrier Allemand la maniere de rendre à coup sûr les barometres lumineux; ce que je lui ai vû faire, & que j'ai expérimenté depuis moi-même de plusieurs manieres.

Il prit un tube d'environ 32 pouces de long & d'une ligne

de diametre intérieur, il y passa un fil de fer, à l'un des bouts duquel étoit un peu de cotton pour essuyer le tuyau en dedans; ensuite il boucha à sa lampe une des extrémités du tuyau; après qu'il fut refroidi, il y introduisit de nouveau un fil de fer sans cotton, & y versa avec un entonnoir de verre jusqu'au tiers de sa hauteur du mercure commun qui n'avoit point eu d'autre préparation que de le passer par un cornet de papier dont on laisse le trou le plus petit qu'il est possible, ce qui purifie parfaitement bien le mercure de toute sa crasse qui reste dans le cornet de papier. Il fit allumer ensuite quelques charbons dans un réchaud, & tenant le barometre incliné, il en approcha d'abord le bout fermé du tuyau d'un peu loin, & petit à petit vint à le poser sur les charbons. Le mercurec ommença à frémir & à bouillonner, ou plûtôt l'air qui y étoit contenu vint à se raréfier & à former des petites bulles qui sortoient très-facilement, parce qu'il tournoit continuellement le tuyau, & remuoit le fil de fer, l'enfonçant & le retirant alternativement jusqu'à ce qu'il ne vînt plus de bulles d'air; alors il avançoit le tuyau sur le réchaud, & chauffoit ainsi successivement & petit à petit toutes les parties du tuyau jusqu'où il y avoit du Mercure, après quoi il le laissa refroidir, & remit encore du mercure jusqu'au second tiers de la hauteur du tuyau, & s'y prit de la même maniere pour le chauffer, & en faire sortir tout l'air. Le tuyau étant froid, il acheva de le remplir, & ne fit point chauffer ce dernier tiers, m'assûrant que cela étoit inutile. Il ajusta ensuite au bout du tube une boîte de bois blanc, qu'il ferma avec de la cire d'Espagne, & ayant mis le barometre dans sa situation naturelle, nous le portâmes dans un lieu obscur où il nous parut extrèmement lumineux, de façon qu'à chaque fois qu'en le balançant je faisois descendre le mercure, tout l'espace vuide qui étoit en haut paroissoit une colonne de lumiere, qui cependant étoit plus vive vers sa base, c'est-à-dire, à l'endroit où elle touchoit immédiatement le mercure. J'ai fait depuis plusieurs fois la même expérience, & elle m'a toûjours également bien réussi.

En balançant un jour trop fortement, & même obliquement un de ces barometres, il y entra quelques bulles d'air qui interrompirent la continuité de la colonne de mercure, & qui me parurent lumineuſes, quoique foiblement, en comparaiſon de la lumiere qui ſe faiſoit dans le vuide. Ayant fait monter une de ces bulles d'air juſques dans la capacité ſupérieure du tuyau, je remarquai qu'elle en avoit diminué la lumiere, de façon qu'elle n'en étoit cependant pas moins vive, mais moins étendue, diſparoiſſant & reparoiſſant une ou deux fois dans une ſeule deſcente de mercure.

J'ai conſtruit des tubes qui avoient dans l'eſpace qui devoit reſter vuide, deux ou trois boules l'une ſur l'autre en forme d'olives, ce qui a fait rendre à ces barometres plus de lumiere; car elle occupoit toute la capacité intérieure des olives.

Il arrive auſſi que la lumiere eſt beaucoup plus grande dans un tuyau d'un grand diametre que dans un moindre, quoiqu'en effet elle ſoit auſſi vive dans le plus petit : mais la quantité n'en eſt pas ſi conſidérable.

Ayant fait ſortir par le moyen d'un fil de fer la bulle d'air qui étoit montée au haut d'un barometre lumineux, il n'a point repris ſon premier éclat, mais eſt reſté avec la lumiere entrecoupée qu'il donnoit lorſque la bulle d'air y étoit.

J'ai rempli d'eau la boule d'en bas d'un barometre, ce qui n'a apporté aucun changement à la lumiere, ni même lorſque j'en ai fait monter le long de la colonne de mercure: mais ſi-tôt que l'eau eſt parvenue dans le vuide au-deſſus du mercure, le barometre a ceſſé pour toûjours de rendre de la lumiere. Il eſt arrivé la même choſe, lorſque j'ai laiſſé monter dans le haut du barometre une quantité d'air un peu conſidérable; car le barometre a ceſſé entierement d'être lumineux, & même n'a point recouvré ſa lumiere, lorſque j'en ai fait ſortir exactement tout l'air.

Pour conſtruire ces ſortes de barometres, je prenois un tube tout droit, fermé par un de ſes bouts, & qui avoit à l'autre bout une boule comme les barometres ſimples ordinaires,

& lorsque je les avois emplis de mercure en les chauffant, comme je viens de le dire, & avec le fil de fer, je courbois le tuyau proche de la boule pour redresser le barometre, & le mettre dans sa situation ordinaire : mais d'une douzaine que j'ai essayé de construire de cette sorte, je n'ai réussi qu'à deux, les autres s'étant tous brisés, lorsque je les ai chauffés pour les courber; & cela m'est toûjours arrivé, quelques précautions que j'aie prises pour les échauffer insensiblement ; ce qui vient sans doute de ce qu'agitant le fil de fer dans l'intérieur du tuyau, on le raye nécessairement en plusieurs endroits, ce qui le fait casser suivant ces especes de fêlures ; ainsi j'ai changé de méthode, & j'ai fait toutes ces expériences avec des tubes droits que j'ajustois sur des boîtes de bois, ou que je plongeois dans un vase rempli de mercure.

J'ai fait chauffer dans un creuset du mercure jusqu'à ce qu'il commençât à fumer ; & ayant chauffé séparément le tube sur des charbons, j'y ai versé promptement le mercure, & j'en ai fait sortir tout l'air en le frappant doucement, & y remuant un fil de fer ; je l'ai renversé ensuite dans un vase plein de mercure, & l'ai porté dans l'obscurité : mais quoique je l'aye agité assez fortement, il n'a fait aucune lumiere.

J'ai pris un matras de verre blanc, bien sec, & j'y ai versé du mercure que j'avois fait chauffer jusqu'à ce qu'il commençât à fumer ; j'ai soutenu le matras sur les charbons ardens, & j'en ai pompé l'air avec la machine pneumatique. Ayant ensuite fondu le col du matras, je l'ai laissé refroidir ; & l'ayant porté dans l'obscurité, il est arrivé le même effet qu'aux phosphores communs de cette espece ; c'est-à-dire, qu'agitant & secoüant le mercure, il a paru en dedans de la bouteille beaucoup de lumiere, à peu-près comme celle de la flamme, & assez vive : mais cela n'a pas mieux fait que ceux qui se font à l'ordinaire, & dont la découverte est dûe à M. Bernoulli.

J'ai voulu voir s'il n'arriveroit aucune différence dans l'effet, en faisant chauffer plus ou moins le barometre, & pour cela j'ai pris deux tubes de même longueur, & autant

que je l'ai pû, de même diametre, & je les ai préparés tous deux, en ne faisant chauffer l'un que légerement, c'est-à-dire, jusqu'à ce que les premieres bulles d'air fussent sorties, & j'ai tenu l'autre beaucoup plus long-temps sur les charbons, & même jusqu'à un bouillonnement violent du mercure qui arrive lorsque l'on souffle sur les charbons pour en augmenter l'ardeur, & s'appaise si tôt qu'on éloigne le tube du feu. Je puis même ajoûter qu'il n'y a rien à craindre pour l'opération, en poussant le feu jusques-là, puisqu'il ne m'en est jamais arrivé d'accident. J'ai mis en expérience l'un & l'autre de ces barometres : mais je n'ai remarqué aucune différence sensible entre la lumiere de l'un & celle de l'autre ; ce qui fait voir qu'il est comme impossible de ne pas réussir dans cette expérience puisqu'il n'y a pas plus d'inconvénient à donner beaucoup de chaleur qu'à n'en donner que médiocrement. On pourroit peut-être, par plusieurs épreuves réiterées, s'assûrer d'un juste milieu qui réussiroit plus parfaitement que ces deux extrémités, ce qui même est vrai-semblable ; car dans le nombre de ces barometres, il s'en trouve qui sont considérablement plus lumineux les uns que les autres, ce qui peut venir de ce qu'ils ont été chauffés plus également ou plus approchant de ce juste milieu qui rend leur effet plus considérable & plus parfait.

J'ai tenté plusieurs autres expériences qu'il est inutile de décrire ici, & je n'ai rien trouvé qui approchât de l'effet de la préparation que je viens de rapporter.

Après avoir examiné les sentimens de ceux qui ont écrit sur cette matiere, & les opérations que j'ai recommencées plusieurs fois, je crois devoir ajoûter les raisons qu'il me semble qu'on pourroit apporter pour l'explication des faits que je viens d'avancer, & qui sont d'une exécution si facile, que chacun les peut éprouver sur le champ.

Premierement, je n'ai pas remarqué que le changement de température de l'air, non plus que la durée du temps depuis la construction des barometres, causât aucune différence dans leur effet, comme l'a pensé M. Heusinger : mais au

contraire il m'a paru que leur lumiere étoit toûjours la même; ce qui me fait juger, après M. Leibnitz, que cette lumiere ne se perd ni ne diminue point tant que le barometre reste en son entier.

C'est donc dans le mercure qu'il faut chercher la cause de cette lumiere, & sur-tout dans la préparation que nous venons de rapporter, puisque les barometres construits de cette sorte sont toûjours lumineux, & que les autres le sont rarement.

On pourroit croire que chauffant ainsi le mercure, il s'introduit dans ses pores des corpuscules ignées qui font l'effet que nous voyons: mais il se présente deux difficultés à ce sentiment. La premiere est que les corpuscules ignées s'épuiseroient à la fin; & que si dans un an un barometre ne perdoit pas toute sa lumiere, du moins elle seroit considérablement affoiblie, ce qui est contraire à l'expérience. La seconde difficulté est que chauffant le mercure avant que de le mettre dans le tuyau, il devroit s'empreindre de même de corpuscules ignées, ce qui par conséquent feroit le même effet; mais nous venons de voir que cela n'arrive pas, & que les barometres construits de cette façon ne sont pas lumineux.

Voici donc une explication qui me semble plus naturelle & plus conforme aux expériences que je viens de rapporter. Je suppose qu'il y a dans le mercure, de même que dans tous les autres fluides, beaucoup d'air grossier & de matiere subtile. Quant à cette derniere, on ne doute pas qu'elle ne coule abondamment dans tous les corps; & pour l'air grossier, on en voit très-distinctement sortir les bulles, lorsqu'on prépare les barometres, ainsi que je viens de l'enseigner. Ce qu'il y a de surprenant, c'est qu'il faut que cet air grossier soit remplacé dans le mercure, & voici l'expérience qui m'en a convaincu. J'ai pris un tube long d'un pied & de deux lignes de diametre, j'y ai marqué extérieurement des divisions avec de l'émail; & l'ayant bouché par un de ses bouts, j'y ai mis du mercure jusqu'à la hauteur de huit pouces, je l'ai bien chauffé ensuite, ce qui en a fait sortir beaucoup de bulles

d'air. Le tuyau étant encore chaud, j'ai trouvé que la colonne de mercure étoit allongée, & qu'il s'étoit dilaté, & étoit monté quelques lignes au-dessus des huit pouces que j'avois marqués. A mesure que le tuyau s'est refroidi, le mercure est redescendu, & est resté précisément à la marque où il étoit avant de le chauffer ; ce qui m'a fait juger qu'il falloit que l'air eût été remplacé, ou que les espaces qu'il occupoit dans le mercure fussent demeurés vuides. On voit aussi par cette observation, que si on pouvoit s'assurer d'un degré de chaleur fixe, on pourroit en même-temps connoître la plus grande dilatation du mercure. Je conclus donc de ces expériences que l'air contenu entre les parties du mercure commun, enveloppe, pour ainsi dire, & retient la matiere subtile qui y est renfermée, & ainsi l'empêche de sortir du mercure, quoiqu'il soit fortement comprimé ; ce qui lui arrive lorsqu'on agite un barometre, & sur-tout lorsque la colonne descend, parce qu'alors le mercure souleve avec effort l'air qui pese sur la surface de celui qui est contenu dans la boule ; ainsi ce devroit être dans ce moment de pression violente que la matiere subtile sortiroit, si elle ne trouvoit dans l'air grossier qui l'environne, un obstacle invincible : mais si en échauffant le mercure on a diminué la quantité de l'air grossier qui y est renfermé, quand même on ne l'auroit pas été entierement, il arrive que la matiere subtile trouvant moins d'empêchement, sort avec violence, & fait paroitre la lumiere que nous voyons ; ce qui doit encore plûtôt arriver, si en chauffant le mercure on a augmenté la quantité de matiere subtile, comme la derniere expérience semble le démontrer.

On expliquera facilement par ce moyen, pourquoi un barometre que l'on a construit, en chauffant séparément le mercure & le tuyau n'est point lumineux, parce que versant ce mercure purgé d'air dans le tube, il passe, pour ainsi dire goutte à goutte dans l'air grossier qui rentre promptement dans les pores de ce mercure, d'où l'on venoit de le chasser. De même lorsqu'il est monté de l'air dans le haut d'un

d'un barometre lumineux, il perd beaucoup de sa lumiere, parce qu'une partie de cet air entre dans la colonne de mercure, & s'oppose à l'émanation de la lumiere. Enfin si cet air est en plus grande quantité, l'obstacle qu'il apporte devient insurmontable, & le barometre cesse d'être lumineux ; & quoiqu'on fasse dans la suite sortir tout l'air qu'on peut appercevoir, celui qui est contenu dans le mercure reste & suffit pour arrêter pour toûjours la lumiere du barometre.

J'expliquerai de la même maniere les autres phénomènes dépendans de ceux-là, comme la lumiere des bulles d'air qui se rencontrent dans la colonne de mercure ; ce qui arrive, parce que la matiere subtile coulant librement dans toute la colonne, passe dans le moment de la pression, de la partie inférieure à la partie supérieure, & par conséquent traverse la bulle d'air qui les sépare ; ainsi lorsque cette bulle n'est pas longue à parcourir, cette matiere subtile n'est point assez absorbée d'air pour ne point paroître lumineuse : mais la lumiere en est très-foible, parce que l'air contenu dans ces bulles, en étouffe une partie, ou du moins l'empêche de paroître à nos yeux.

Il reste maintenant à expliquer pourquoi cette lumiere cesse, lorsque le mercure remonte, & pourquoi elle subsiste tant que le barometre reste en son entier. Ces deux effets ont le même principe ; car il est clair que lorsque la colonne de mercure remonte, elle présente à la colonne de matiere lumineuse des pores disposés à la recevoir, & qui en sont vuides, puisqu'elle vient d'en sortir par la pression du mercure ; ainsi chaque fois que la matiere subtile en a été exprimée par la descente de la colonne, elle y rentre par l'ascension de la même colonne, & par conséquent il ne s'en perd rien, rien ne la dissipe, & elle doit rester dans le mercure tant que le barometre restera dans son état ordinaire, c'est-à-dire, tant qu'il sera parfaitement vuide d'air grossier.

Il s'ensuit de ces observations, que les barometres lumineux, indépendamment de leur singularité, sont fort au-dessus des autres pour l'usage, puisqu'étant parfaitement vuides

d'air groſſier, ils ſont exempts du défaut commun à tous les autres, qui eſt que contenant toûjours, quelque ſoin qu'on y prenne, une petite quantité d'air, ils agiſſent comme Thermometres, & varient néceſſairement par le chaud & le froid, ce qui n'arrive point aux barometres lumineux, & par conſéquent les rend préférables à toutes les autres eſpeces de barometres.

OBSERVATION DU PASSAGE DE MERCURE SUR LE SOLEIL;

Faites à Paris dans l'Obſervatoire Royal, le 9 Novembre 1723, au ſoir.

Par M. DELISLE le cadet.

22 Dec. 1723. ETANT averti par le calcul de M. Halley, par les Ephémérides de M. Manfredi, & par mon calcul particulier, que Mercure devoit paroître ſur le ſoleil le 9 Novembre au ſoir, une heure & demie environ avant le coucher du Soleil, je me ſuis préparé à obſerver ce paſſage avec toute l'exactitude dont j'étois capable. J'ai fait cette obſervation avec mes freres, & quelques autres perſonnes intelligentes, & j'y ai été principalement aidé par mon frere de la Croyere, qui eſt exercé depuis du temps aux obſervations aſtronomiques.

Comme le lieu où je fais mes obſervations ordinaires à Paris n'a pas l'horiſon libre au ſud-oüeſt, j'ai fait tranſporter à l'Obſervatoire Royal une partie de mes inſtrumens; ſçavoir, un grand quart de cercle de fer & de cuivre de 3 pieds & demi de rayon, une pendule à ſecondes, une lunette de 20 pieds, & une de 13 garnie d'un micrometre. J'ai mis

ces inſtrumens dans la tour occidentale de l'appartement inférieur, d'où je pouvois ſuivre le ſoleil juſqu'à l'horiſon, ou au moins juſqu'à la hauteur de 45 minutes, qui eſt la hauteur apparente du terrain à l'endroit où le ſoleil devoit ſe coucher ce jour-là.

La pendule que j'ai fait porter à l'Obſervatoire, y a été miſe en mouvement pluſieurs jours avant l'obſervation: mais le Ciel toûjours couvert, ne m'a permis de faire aucune obſervation pour la régler au ſoleil, juſqu'au 9 au matin, où les nuées s'étant diſſipées vers les 9 heures, j'ai pû obſerver pluſieurs hauteurs du ſoleil, qui, comparées avec les mêmes hauteurs que j'ai priſes le lendemain au matin, m'ont fait connoître le mouvement journalier de ma pendule dans l'intervalle de temps qui comprenoit celui de l'obſervation de Mercure.

Je n'ai pas jugé à propos de prendre le même jour 9 Novembre au ſoir, les hauteurs du ſoleil correſpondantes à celles que j'avois obſervée le matin, pour en conclurre le midi vrai ce jour-là; car quoique ces hauteurs auroient dû finir avant le temps que les calculs marquoient l'entrée de Mercure dans le ſoleil, j'ai cependant appréhendé que le ciel ne devançât la prédiction; c'eſt pourquoi j'ai remis au lendemain à prendre les hauteurs correſpondantes matin & ſoir pour avoir le midi vrai; heureuſement j'en ai eu toute la commodité que je pouvois ſouhaiter, le ciel ayant été découvert le 10, matin & ſoir.

J'ai fait plus, car ayant fini de bonne heure le 10 au ſoir de prendre toutes les hauteurs qui m'étoient néceſſaires pour avoir la véritable heure de ma pendule, & voyant le ſoleil encore élevé de 15 à 16 degrés ſur l'horiſon, & le ciel aſſez diſpoſé à laiſſer voir le ſoleil juſqu'à ſon coucher, je n'ai pas voulu manquer cette occaſion, qui pouvoit ſervir à déterminer les réfractions à l'endroit où Mercure avoit été obſervé la veille, afin que ſi j'euſſe voulu employer ces réfractions, j'euſſe pû le faire par des obſervations immédiates.

Je ne me ſuis pas contenté de faire les obſervations dont je viens de parler, pour connoître exactement l'état de ma

pendule. Je l'ai encore comparée soir & matin avec une ancienne pendule de Thuret, dont M. Cassini se sert depuis long-temps, & qui est dans la tour occidentale à l'appartement supérieur. J'ai trouvé par cette comparaison que ces deux pendules s'étoient suivies très-exactement pendant tout le temps pendant lequel j'ai eu besoin de supposer que ma pendule allât également : c'est pourquoi on ne doit avoir aucun doute sur le temps de mon observation, d'autant plus que j'ai observé les hauteurs du soleil avec le grand quart de cercle dont je viens de parler, qui donne beaucoup de précision dans ces sortes d'observations.

Le quart de cercle dont je me suis servi, est fait à la maniere de celui de M. le Chevalier de Louville, qu'il a décrit dans les Mémoires de l'Académie 1714. p. 65, c'est-à-dire, qu'outre la division ordinaire par transversales, il y a encore une division par points de 10 en 10 minutes. Il y a aussi à la lunette fixe de ce quart de cercle un micrometre, par le moyen duquel je fais mouvoir un fil horisontalement & parallelement au fil horisontal fixe. Ce fil horisontal mobile me sert à prendre des différences des hauteurs sans remuer le quart de cercle. Dans toutes les observations que j'ai faites avec cet instrument pour le passage de Mercure dans le soleil, ces deux fils horisontaux étoient distans l'un de l'autre d'un tour de vis, ce que j'avois fait à dessein de multiplier mes observations.

Observations de l'entrée de Mercure dans le soleil.

Dans l'appréhension que l'entrée de Mercure n'arrivât plutôt qu'elle n'avoit été prédite, j'ai commencé peu de temps après midi à regarder attentivement le soleil à l'endroit où Mercure devoit paroître, & cela avec ma lunette de 20 pieds, pendant que mon frere de la Croyere le regardoit avec celle de 13, & qu'une autre personne qui a une fort bonne vûe, le regardoit avec la lunette de mon quart de cercle, qui est excellente, & qui a 3 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur. J'ai commencé le premier à appercevoir Mercure, mordant un peu le bord du

soleil; c'étoit à $2^h\ 50'\ 28''$ du temps vrai. Mon frere & cette autre personne étant avertis de cette entrée de Mercure, l'ont apperçûe en même-temps avec leurs lunettes.

Je me suis ensuite appliqué à observer l'entrée du centre de Mercure sur le disque du soleil, qui m'a paru se faire à $2^h\ 51'\ 0''$ de temps vrai: mon frere en a jugé de même avec sa lunette de 13 pieds. Enfin à $2^h\ 51'\ 39''$ nous avons jugé, mon frere & moi, l'entrée totale de Mercure dans le soleil.

Après que j'ai eu fait ces observations, je me suis attaché à mon quart de cercle, avec lequel je m'étois proposé de suivre le soleil jusqu'à son coucher. Je l'avois placé pour cela de maniere que sans en remuer le pied, je pouvois suivre le soleil jusqu'à l'horison. J'avois choisi mon quart de cercle préférablement à tout autre instrument, pour éviter (ainsi que je l'expliquerai ci-après) l'effet des refractions, en observant les différences de passages de Mercure & des bords du soleil par le fil vertical & par l'horisontal. Il y avoit dans ma lunette deux fils placés horisontalement, qui étoient distans l'un de l'autre d'un tour de vis qui répond à $2'\ 32''$, ce que j'avois fait à dessein de multiplier les observations des différences du passage de Mercure & du soleil par un même fil horisontal.

Pour mieux ménager mon temps, & faire le plus d'observations qu'il m'étoit possible, pendant le peu de temps que le soleil devoit rester sur l'horison, je m'étois proposé de ne comparer Mercure qu'avec le bord septentrional ou supérieur du soleil & avec son bord oriental, qui étoient les deux bords qui devoient suivre de plus près le passage de Mercure par chaque fil horisontal & par le vertical. Pour la même raison de l'épargne du temps, je ne me suis point assujetti à observer ces différences de passage de Mercure & du soleil à de certaines hauteurs marquées comme de degré en degré; je n'en ai même point du tout marqué la hauteur, parce que ce n'auroit pû être que la hauteur apparente altérée par la réfraction, & que je m'étois proposé de n'employer que les hauteurs vraies calculées pour le temps de chaque observation.

(comme je le dirai ci-après) & non pas conclues des hauteurs apparentes corrigées par la réfraction. J'ai seulement eu attention que dans les observations que je faisois avec mon quart de cercle, il fût toujours exactement vertical.

Pour abréger, j'ai mis en Table toute la suite de mes observations avec les résultats que j'en ai déduits par un calcul exact, suivant la méthode que j'expliquerai ci-après.

J'ai séparé d'un trait chaque suite d'observations, pendant lesquelles l'instrument n'a point été remué.

J'ai commencé ces observations le plutôt que j'ai pû, après l'entrée de Mercure dans le soleil. Pour en pouvoir conclurre plus sûrement sa situation au moment de son entrée, j'ai continué d'observer de la même maniere jusqu'au coucher du soleil, afin d'avoir un plus grand nombre de points de la route de Mercure, pour en pouvoir déterminer la direction avec plus de précision. Quelques nuées qui sont survenues, m'ont fait manquer plusieurs observations : mais j'en ai encore pû faire assez, tant vers le commencement de l'apparition de Mercure, que vers la fin du temps qu'il a été visible, pour pouvoir déterminer assez précisément sa route dans le soleil, comme on verra ci-après.

Mon frere a aussi observé séparément pendant tout le temps que Mercure a été visible, une grande quantité de passages de cette planete & des bords du soleil par les fils du micrometre appliqué à la lunette de 13 pieds.

Observations & résultats déduits par le calcul.

Temps vrai.		Différence de longitude de Mercure & du Soleil.	Latitude de Mercure septentrionale.	
2h 55′ 26″	Mercure à l'horisontal.			
55 49				
56 14	Mercure au vertical . . .	15′ 17″	3′ 36″	*A.*
56 23½	le Soleil au vertical.			
56 53½	le Soleil à l'horisontal.			
57 15				
58 28	Mercure à l'horisontal.			
58 50½				
59 52½	le Soleil à l'horisontal.			
3 0 14½				
0 33	Mercure au vertical . . .	14 57	3 42	*B.*
0 44½	le Soleil au vertical.			
9 33	Mercure à l'horisontal.			
9 55¼				
10 12	Mercure au vertical . . .	14 10	3 46	*C.*
10 28	le Soleil au vertical.			
10 53	le Soleil à l'horisontal.			
11 14½				
15 24½	Mercure à l'horisontal.			
15 46				
16 2	Mercure au vertical . . .	13 23	3 55	*D.*
16 22½	le Soleil au vertical.			
16 41½	le Soleil à l'horisontal.			
17 2				
32 19½	Mercure à l'horisontal.			
32 40½				
32 57½	Mercure au vertical . . .	12 2	4 2	*E.*
33 26	le Soleil au vertical.			
33 31	le Soleil à l'horisontal.			
33 52				

Temps vrai.		Differ. de longit. de Mercure & du Soleil.	Latitude de Merc. septentrionale.	
3h 38′ 41″	Mercure à l'horisontal.			
39 13½	Mercure au vertical...	11′ 12″	4′ 14″	F.
39 47	le Soleil au vertical.			
39 50½	le Soleil à l'horisontal.			
43 35½	Mercure à l'horisontal.			
43 55				
44 29½	Mercure au vertical...	10 49	4 18	G.
44 44	le Soleil à l'horisontal.			
45 4				
45 5½	le Soleil au vertical.			
47 32	Mercure à l'horisontal.			
47 52				
48 33	Mercure au vertical...	10 17	4 23	H.
48 40	le Soleil à l'horisontal.			
48 59½				
49 12	le Soleil au vertical.			
51 34½	Mercure à l'horisontal.			
51 54				
52 21½	Mercure au vertical...	9 57	4 28	I.
52 41½	le Soleil à l'horisontal.			
53 1½				
53 2¾	le Soleil au vertical.			
54 27	Mercure à l'horisontal.			
55 13	Mercure au vertical...	9 41	4 30	K.
55 33½	le Soleil à l'horisontal.			
55 56	le Soleil au vertical.			
57 1½	Mercure à l'horisontal.			
57 20½				
58 5½	Mercure au vertical...	9 19	4 34	L.
58 8¼	le Soleil à l'horisontal.			
58 26½				
58 50½	le Soleil au vertical.			

Temps vrai.		Différence de longitude de Mercure & du Soleil.	Latitude de Mercure septentrionale.	
3h 59′ 29″ / 59 51½	Mercure à l'horisontal.			
4 0 30	Mercure au vertical . . .	9′ 8″	4′ 34″	*M.*
0 39 / 0 57½	le Soleil à l'horisontal.			
1 16¼	le Soleil au vertical.			
1 52 / 2 11	Mercure à l'horisontal.			
2 58	le Soleil à l'horisontal.			
3 3¼	Mercure au vertical . . .	8 54	4 36	*N.*
3 17¼	le Soleil à l'horisontal.			
3 51	le Soleil au vertical.			
4 46 / 5 5	Mercure à l'horisontal.			
5 25	Mercure au vertical . . .	8 34	4 37	*O.*
5 52 / 6 11	le Soleil à l'horisontal.			
6 14½	le Soleil au vertical.			
8 30	Mercure à l'horisontal.			
9 3	Mercure au vertical . . .	8 11	4 41	*P.*
9 36	le Soleil à l'horisontal.			
9 55	le Soleil au vertical.			
14 4¾ / 14 22½	Mercure à l'horisontal.			
14 53½	Mercure au vertical . . .	7 46	4 43	*Q.*
15 9½ / 15 28	le Soleil à l'horisontal.			
15 48¼	le Soleil au vertical.			

Temps vrai.		Differ. de longit. de Mercure & du Soleil.	Latitude de Merc. septentrionale.	
$4^h\ 16'\ 18\frac{1}{4}$	Mercure à l'horisontal.			
$16\ 37\frac{1}{2}$				
17 23	le Soleil à l'horisontal.			
17 33	Mercure au vertical...	7′ 35″	4′ 45″	*R.*
$17\ 42\frac{1}{2}$	le Soleil à l'horisontal.			
18 29	le Soleil au vertical.			
$19\ 42\frac{1}{2}$	Mercure à l'horisontal.			
20 1				
20 28	Mercure au vertical...	7 15	4 47	*S.*
20 48	le Soleil à l'horisontal.			
21 6				
21 26	le Soleil au vertical.			
$22\ 2\frac{3}{4}$	Mercure à l'horisontal.			
22 22				
$22\ 28\frac{1}{2}$	Mercure au vertical...	6 57	4 51	*T.*
23 8	le Soleil à l'horisontal.			
$23\ 26\frac{1}{2}$				
$23\ 28\frac{1}{4}$	le Soleil au vertical.			
24 3	Mercure à l'horisontal.			
$24\ 22\frac{1}{4}$				
$24\ 32\frac{3}{4}$	Mercure au vertical...	6 41	4 54	*V.*
25 8	le Soleil à l'horisontal.			
$25\ 27\frac{1}{2}$				
$25\ 34\frac{1}{4}$	le Soleil au vertical.			
26 5	Mercure à l'horisontal.			
26 23				
$26\ 46\frac{1}{2}$	Mercure au vertical...	6 38	4 54	*X.*
27 9	le Soleil à l'horisontal.			
$27\ 28\frac{1}{2}$				
$27\ 48\frac{1}{2}$	le Soleil au vertical.			

Temps vrai.		Differ. de longit. de Mercure & du Soleil.	Latitude de Merc. septentrionale.	
4h 28′ 18″ / 28 37½	Mercure à l'horisontal.			
28 37	Mercure au vertical...	6′ 29″	4′ 57″	Y.
29 22 / 29 41½	le Soleil à l'horisontal.			
30 0	le Soleil au vertical.			
30 35 / 30 54	Mercure à l'horisontal.			
31 18½	Mercure au vertical...	6 10	4 59	Z.
31 38½ / 31 58½	le Soleil à l'horisontal.			
32 23½	le Soleil au vertical.			

Méthode dont on s'est servi pour conclurre la longitude & la latitude de Mercure.

Comme je m'étois proposé de suivre le soleil jusqu'à l'horison, où les réfractions & leurs différences sont les plus grandes, & que je souhaitois pouvoir conclurre de mes dernieres observations les plus proches de l'horison, la véritable situation de Mercure sur le soleil, aussi précisément que par les premieres, afin d'avoir une plus grande portion de la route de Mercure dans le soleil ; je me suis trouvé obligé ou d'employer les réfractions, ou de les éviter. J'ai préféré ce dernier parti, en observant les différences du passage de Mercure & des bords du soleil par les fils horisontal & vertical, comme il a déja été pratiqué dans le dernier passage de Mercure dans le soleil, où d'abord que le soleil eut paru vers son lever, & que M. Maraldi y eut reconnu Mercure avec une lunette de 18 pieds, il y dirigea aussi-tôt la lunette d'un quart de cercle de 3 pieds de rayon pour déterminer la situation de Mercure par son passage, & ceux des bords du soleil par le fil horisontal & le fil vertical.

Feu M. Caſſini, dans le calcul qu'il a fait de l'obſervation de M. Maraldi, s'eſt ſervi du paſſage de tout le diſque du ſoleil, tant par le fil vertical que par l'horiſontal; d'où il a conclu par le rapport des intervalles du temps de ces deux paſſages, l'angle du cercle de déclinaiſon avec le vertical: mais comme pour l'épargne du temps, je me ſuis propoſé de n'obſerver qu'un ſeul bord du ſoleil, tant au fil vertical qu'à l'horiſontal, je me ſuis trouvé obligé de m'y prendre d'une autre maniere, pour conclurre de mes obſervations la ſituation véritable de Mercure à l'égard du ſoleil.

Pour cela j'ai conſidéré que par le moment connu du paſſage du bord ſupérieur du ſoleil par un fil horiſontal dans une ſituation quelconque, je pouvois connoître par le calcul la véritable hauteur de ce bord, & par conſéquent la ſituation de ce fil; & cela, en calculant à l'ordinaire la hauteur vraie du centre du ſoleil qui convenoit à l'heure donnée, & à la déclinaiſon du ſoleil tirée des Tables, & ajoûtant à cette hauteur le demi-diametre apparent du ſoleil.

Cette hauteur véritable du bord ſupérieur du ſoleil eſt auſſi celle de Mercure au moment de ſon paſſage par ce même fil, ſuppoſé que le ſoleil & Mercure ayant une même hauteur apparente, ayent auſſi une même hauteur vraie. Il n'y a que la différence de réfraction ou de parallaxe qui puiſſent empêcher le ſoleil & Mercure d'avoir une même hauteur vraie, lorſqu'ils ont une même hauteur apparente.

Pour ce qui eſt de la différence de réfractions, il ne peut y en avoir que par un changement ſubit arrivé dans l'air pendant l'intervalle des deux paſſages, comme il arrive aſſez ſouvent au lever du ſoleil, lorſque l'on recherche ſa réfraction, car on la trouve preſque toûjours un peu différente aux paſſages de ſes deux bords, quoiqu'à une même hauteur apparente : mais cet effet n'arrive que fort près de l'horiſon, & ſeulement au lever du ſoleil, ainſi que je l'ai vérifié par un grand nombre de réfractions que j'ai calculées des deux bords du ſoleil que j'avois obſervés l'un après l'autre à une même hauteur apparente, où j'ai toûjours trouvé ſenſiblement la

même réfraction. C'eſt pourquoi il n'y a aucune difficulté à ſuppoſer que le ſoleil & Mercure, paſſant l'un après l'autre par une même hauteur apparente, ayent chacun au moment de leur paſſage, une même hauteur vraie, quant à la réfraction.

Pour ce qui eſt de la parallaxe, il n'en eſt pas de même, puiſque l'on ſçait que deux aſtres inégalement diſtans de la terre, ayant une même hauteur apparente, ont une différente hauteur vraie, & que leur différence de hauteur vraie eſt égale à la différence de leurs parallaxes, dont l'aſtre le plus près de la terre a une plus grande hauteur vraie que le plus éloigné. Quoique la différence des parallaxes horiſontales de Mercure & du ſoleil ne ſoit que de 3″, ſuivant M. de la Hire, je n'ai pas laiſſé d'y avoir égard. J'ai augmenté de cette petite quantité les hauteurs vraies du bord ſupérieur du ſoleil, pour avoir plus exactement la véritable hauteur de Mercure au moment qu'il a paſſé par le fil horiſontal par lequel avoit paſſé ce bord du ſoleil.

Ayant de cette maniere la hauteur véritable de Mercure au moment de ſon paſſage par le fil horiſontal, il m'a encore été facile d'avoir dans ce même moment ſa différence de hauteur véritable avec le centre du ſoleil; car il ne m'a fallu que calculer pour le temps de chacun des paſſages de Mercure par le fil horiſontal, la hauteur vraie du centre du ſoleil, & la comparer avec la hauteur de Mercure déterminée précédemment.

En faiſant tous ces calculs, j'ai pû avoir pendant $1^h 40'$ qu'ont duré toutes mes obſervations, 52 fois la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du ſoleil pour autant de différens momens dont le temps vrai m'étoit connu. Dans cette grande quantité de déterminations, il m'a été facile d'examiner la variation de Mercure dans le vertical à l'égard du centre du ſoleil; & comme cette variation n'a pas été juſqu'à une minute ſeulement pendant un ſi long-temps, j'ai pû aiſément reconnoître les obſervations qui ne ſe ſuivoient pas bien, & marquer, ſans me tromper de beaucoup, la différence de hauteur vraie entre Mercure & le centre

du ſoleil à tout autre moment qu'à ceux auxquels je l'avois obſervé immédiatement, pourvû que ces inſtans ne fuſſent pas fort éloignés, & fuſſent compris entre ceux que j'avois obſervés.

Après avoir déterminé, comme je viens de dire, la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du ſoleil à chacun des paſſages de Mercure par le fil horiſontal, je me ſuis propoſé de déterminer l'azimut de Mercure à chacun des paſſages de cette planete par le fil vertical. Il ne m'a fallu pour cela que connoitre la ſituation de ce fil vertical, ce que j'ai cherché par le moment connu du paſſage du bord oriental du ſoleil par ce même fil, en calculant pour cet inſtant l'azimut *AZS* du centre du ſoleil compté depuis le méridien, d'où j'ai enſuite conclu quel doit être l'azimut *AZC* de ſon bord oriental, lequel devoit être auſſi l'azimut de Mercure au moment de ſon paſſage par ce même fil vertical.

Fig. 1.

J'ai imaginé pour cela le vertical *ZC*, touchant en *C* le bord oriental du Soleil, enſorte que le demi-diametre apparent du ſoleil *SC*, mené par le point d'attouchement, fût perpendiculaire à ce vertical; connoiſſant donc dans le triangle *ZSC* rectangle en *C*, la diſtance *ZS* du ſoleil au zénit, & le demi-diametre *SC* du ſoleil, il m'a été facile d'en conclurre l'angle *SZC*, différence des azimuts du centre & du bord oriental du ſoleil; & par conſéquent ayant l'azimut *AZS* du centre du ſoleil, j'ai eu auſſi l'azimut *AZC* de ſon bord oriental, qui eſt, comme j'ai dit, l'azimut de Mercure au moment qu'il a paſſé par le fil vertical de mon quart de cercle.

Par ces calculs j'ai eu 26 fois l'azimut de Mercure pour autant de différens momens qui m'étoient connus. J'aurois bien ſouhaité que ces momens pour leſquels je connoiſſois l'azimut de Mercure, euſſent été les mêmes que ceux pour leſquels j'avois déterminé précédemment la différence de hauteur véritable entre cette planete & le centre du ſoleil; il n'auroit fallu pour cela que faire paſſer Mercure dans l'interſection du fil vertical avec l'horiſontal: mais cela ne me

paroiſſoit pas aiſé; c'eſt pourquoi j'ai mieux aimé mettre quelque intervalle de temps entre les paſſages de Mercure par ces différens fils, autant qu'il m'en falloit pour pouvoir marquer exactement le moment de ſon arrivée à chaque fil, & j'ai crû qu'ayant multiplié, comme j'ai fait, les obſervations des différences de hauteur, j'en pouvois conclurre par proportion la différence de hauteur à tout autre moment, auſſi ſûrement que je l'avois obſervé immédiatement.

J'ai donc cherché la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du ſoleil qui convenoit à chacun des 26 momens auxquels je connoiſſois l'azimut de Mercure, & il ne m'en a pas fallu davantage pour calculer la longitude & la latitude de Mercure pour chacun de ces 26 momens, en ſuppoſant la longitude du ſoleil, & le reſte pris des Tables de M. de la Hire.

Soit *PZA* le méridien, *P* le pole ſeptentrional, *Z* le zénit, *S* le centre du ſoleil à chacun des paſſages de Mercure par le fil vertical; ſoit *ZS* la diſtance véritable du ſoleil au zénit, calculée pour le temps connu de ce paſſage; ſoit auſſi *PS* la diſtance du ſoleil au pole ſeptentrional priſe des Tables aſtronomiques pour ce même temps. Par la différence de hauteur véritable entre Mercure & le centre du ſoleil, on connoît encore la diſtance véritable *ZM* de Mercure au zénit; & comme on a déterminé, ainſi que j'ai dit ci-devant, ſon azimut *AZM*, tout le triangle *PZM* ſe trouve déterminé; d'où l'on en peut conclurre l'angle en *P*, & la diſtance *PM* de Mercure au pole; ce qui donne ſa déclinaiſon *QM*.

Comparant à préſent cet angle au pole *ZPM* avec l'angle *ZPS* qui eſt connu par le temps du paſſage de Mercure par le fil vertical, la différence des deux *MPS* eſt pour le moment propoſé la différence d'aſcenſion droite du ſoleil & de Mercure; c'eſt pourquoi connoiſſant l'aſcenſion droite *BR* du ſoleil, priſe des Tables aſtronomiques, l'aſcenſion droite *BQ* de Mercure ſera auſſi connue, & par conſéquent ayant ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon, on en peut conclurre ſa longitude *BL* réduite à l'Écliptique & ſa latitude *ML*.

Voilà de quelle maniere j'ai déterminé la longitude & la latitude de Mercure à chacun des 26 passages de cette planete par le fil vertical de mon quart de cercle ; j'ai ensuite comparé chacune de ces longitudes de Mercure avec celle du soleil au même moment pour en avoir la différence *SL*, & c'est suivant ces différences de longitude & les latititudes de Mercure que j'ai marqué la situation de cette planete dans la figure 2, aux points marqués par les mêmes lettres que celles qui sont dans les Tables.

Fig. 2. On voit par la ligne droite que j'ai tracée, qui passe par la plus grande partie de ces points, & qui ne s'éloigne pas de beaucoup des autres ; on voit, dis-je, par-là de quelle maniere mes observations s'accordent pour ce qui est de la direction de la route de Mercure. Dans les observations qui s'éloignent le plus de la route tracée dans ma figure, l'erreur n'est au plus que du demi-diametre apparent de Mercure qui n'est que de 3 ou 4 secondes ; ce qui ne paroîtra pas bien considérable, si l'on fait réflexion que cette plus grande erreur n'est qu'égale à l'espace qu'occupe dans le ciel les filets de mon quart de cercle, qui sont composés à l'ordinaire d'un simple fil de vers à soie, & que d'un autre côté ces positions de Mercure n'ont été déterminées que par le temps des différences de passage, où l'on sçait qu'une minute de grand cercle de la grandeur qu'elle est marquée au bas de la figure, passe en 4 secondes de temps.

Il faut ici remarquer que quoi que j'aie employé dans mes calculs bien des élémens tirés des Tables astronomiques, comme la déclinaison du soleil, son ascension droite, la hauteur du pole, &c. & que j'aie supposé tous ces élémens exactement connus ; cependant quand ils ne seroient pas tout-à-fait tels que je les ai supposés, il n'en arriveroit aucune erreur sensible dans la situation de Mercure à l'égard du soleil : & cela, parce qu'il n'y a que les différences du mouvement du soleil en déclinaison ou en ascension droite qui puissent causer de l'erreur. Or quand les Tables de M. de la Hire, ou toutes les autres dont j'aurois pû me servir, ne marqueroient

pas

pas exactement la déclinaison & l'ascension droite du soleil &c. elles en marquent au moins exactement les différences, & c'est tout ce dont on a besoin. De même si la hauteur du pole de l'observatoire, que j'ai supposé avec M. de la Hire de 48° 50′ 0″, n'étoit pas précisément telle, les hauteurs vraies & les azimuts que j'ai calculés, seroient à la verité affectés de la même erreur : mais cela ne produiroit rien de sensible dans la situation de Mercure à l'égard du soleil, parce qu'ayant employé dans tous les calculs la même hauteur du pole, il en doit résulter sensiblement les mêmes différences que si je m'étois servi d'une autre hauteur du pole un peu différente de celle-là, & que je l'eusse employé de même dans tous les calculs. C'est pourquoi on doit être assûré d'avoir par ces calculs le mouvement apparent de Mercure à l'égard du soleil, autant exactement qu'il se peut conclurre de mes observations, sans que le défaut des Tables y ait pû nuire. Je peux aussi assûrer que les calculs sont exacts, ayant été faits chacun deux fois séparément par moi & par mon frere, qui est fort exercé dans le calcul.

Du mouvement apparent de Mercure à l'égard du Soleil.

La route de Mercure conclue de ses différences de longitude & de ses latitudes calculées, comme j'ai dit ci-devant, est la route de son mouvement composé à l'égard du soleil supposé fixe. Il faut décomposer ce mouvement pour en conclurre le mouvement apparent de Mercure sur son orbite propre, vû de la terre ; après quoi il faut encore considérer ce mouvement comme il est vû du soleil, qui est le centre du mouvement des planetes principales : mais sans qu'il soit nécessaire de faire cette décomposition, on peut déterminer toutes les circonstances du passage observé, en n'employant que le mouvement apparent de Mercure au soleil, vû de la terre, tel que les observations le donnent immédiatement ; c'est par où je vais commencer, après quoi je considererai ce mouvement, tel qu'il a dû être, vû du Soleil, pour en con-

clurre le lieu du nœud de Mercure, & l'inclinaison véritable de son orbite sur l'écliptique.

Pour déterminer par mes observations toutes les circonstances de ce passage, que l'on n'a pû avoir immédiatement, comme sont le temps de la conjonction, la latitude apparente de Mercure dans ce temps-là, la durée de l'éclipse, &c. pour faire toutes ces déterminations, je suppose la route apparente de Mercure, déterminée par mes calculs, prolon-
Fig. 8 gée de part & d'autre, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'écliptique en *H* & en *D*, le cercle de latitude qui passe par le centre *E* du Soleil, ensorte que *ED* représentera la latitude apparente de Mercure au moment de sa conjonction, & *EH* sera la distance apparente du nœud de Mercure au centre du Soleil au moment de la conjonction.

Si l'on regarde le triangle *EDH* comme un triangle rectiligne rectangle en *E*, ce que l'on peut supposer sans erreur sensible dans un si petit espace, il ne faudra que deux observations de la différence de longitude & de latitude de Mercure pour déterminer tout ce triangle : mais plus ces observations seront distantes l'une de l'autre, & plus exactement elles le pourront déterminer. Si l'on choisit, par exemple, les deux observations extrêmes *A*, *Z*, & que l'on imagine de chacun de ces points les perpendiculaires *AG*, *ZF*, sur l'écliptique, qui représenteront les latitudes observées, & les paralleles *AB*, *ZC*, qui seront égales aux différences de longitude *GF*, *FE*, il ne faudra que faire cette analogie *AB* (9' 7''). *BZ* (1' 23'') : : *CZ* (6' 10'') *CD*. (0' 56''). Ce quatrieme terme étant ajoûté à la latitude *FZ* ou *CE* de Mercure au point *Z* (4' 59'') on aura *ED* (5' 55'') pour la latitude de Mercure au moment de sa conjonction par les deux observations proposées *A*, *Z*. C'est de cette maniere que par les cinq dernieres observations *Z*, *Y*, *X*, *V*, *T*, comparées avec la premiere & la troisieme *A*, *C*, j'ai trouvé la latitude *DE* de Mercure au moment de sa conjonction, de toutes ces différentes manieres.

A, Z.	5′	55″	*C, Z.*	5′	55″.
Y.	5	57	*Y.*	5	57.
X.	5	54	*X.*	5	54.
V.	5	55	*V.*	5	55.
T.	5	54	*T.*	5	54.

Entre lesquelles prenant un milieu, il paroît que la latitude de Mercure, vûe de la terre au moment de sa conjonction, a dû être fort approchante de 5′ 55″ septentrionale.

Pour avoir présentement la distance *EH* par les deux observations *A*, *Z*, on fera cette analogie *BZ* (1′ 23″). *BA* (9′ 7″) :: *AG* (3′ 36″). *GH* (23′ 44″) qui étant ajoûté à *EG* (15′ 17″) il en résultera la distance demandée *EH* de (39′ 1″). Voici ce que donnent les autres observations employées ci-devant.

A, Z.	39′	1″	*C, Z.*	38′	56″.
Y.	37	45	*Y*	38	37.
X.	39	14	*X.*	39	12.
V.	39	6	*V.*	39	2.
T.	39	17	*T.*	39	16.

En prenant un milieu entre ces dix déterminations, on voit que la distance apparente du nœud ascendant de Mercure au centre du soleil, moment de la conjonction, n'est que d'environ 39′, ou peu de secondes au de-là.

On peut encore employer les mêmes observations à rechercher l'inclinaison apparente *DHE* de l'orbite de Mercure sur l'écliptique. Pour les observations *A*, *Z*, l'on fera *AB* (9′ 7″). *BZ* (1′ 23″) :: *S*, *T*, tangente de l'angle cherché *ZAB* ou *DHE* que l'on trouve de 8° 38′. Voici ce que donnent les autres observations.

A, Z.	8°	38′	*C, Z.*	8°	39′.
Y.	8	43	*Y.*	8	45.
X.	8	33	*X.*	8	33.
V.	8	36	*V.*	8	37.
T.	8	32	*T.*	8	32.

Le milieu entre ces dix différentes déterminations est 8 degrés 37 minutes.

Pour déterminer présentement la vîtesse du mouvement apparent de Mercure sur son orbite, & le temps de la conjonction, j'y employerai l'observation de l'entrée du centre de Mercure, que j'ai déterminé à $2^h\ 51'\ 0''$, & je comparerai cette observation avec les cinq dernieres observations *Z*, *Y*, *X*, *V*, *T*, qui en sont le plus éloignées.

Supposant tout le triangle *EDH*, déterminé de chacune des dix manieres que l'on vient de rapporter, si l'on imagine présentement que du point *E*, comme centre & pour rayon *EK*, l'on ait décrit le cercle qui représente le disque apparent du Soleil, le point de section *K* de sa circonférence avec l'orbite *DH* de Mercure représentera le point de l'entrée de Mercure, & suivant les élémens déterminés précédemment, il ne sera pas difficile de connoître la valeur de l'arc *DK* de l'orbite de Mercure entre son entrée & le temps de la conjonction; car dans chacune des dix différentes déterminations que l'on a rapportées ci-devant, l'on a marqué la latitude *DE* de Mercure au moment de sa conjonction, & l'angle *DHE*, dont *EDH* est le complément, & enfin le demi-diametre apparent du soleil *EK* est constant; c'est pourquoi le triangle *EDK* est tout déterminé, ayant ses deux côtés *ED*, *EK*, de connus, & l'angle en *D*, & ainsi l'on pourra connoître le troisieme côté *DK*. Je suppose le demi-diametre apparent du soleil *EK* de $16'\ 15''$, &c. En resolvant le triangle *EDK* pour chacune des dix terminations faites ci-devant, j'ai trouvé la valeur de *DK* comme il suit.

A, *Z*.	16'	3".	......	*C*, *Z*.	16'	3".
Y.	16	3	......	*Y*.	16	3.
X.	16	3	......	*X*.	16	3.
V.	16	3	......	*V*.	16	3.
T.	16	2	......	*T*.	16	3.

Pour sçavoir présentement combien de temps Mercure a employé à parcourir cet arc *DK* de son orbite, il m'a fallu

déterminer sa situation sur son orbite pour un autre temps connu, le plus éloigné que je pouvois avoir du moment de son entrée, comme par exemple dans l'observation *Z*, où Mercure ne s'étoit trouvé qu'une heure & 40 minutes après son entrée. Joignant *EZ*, le triangle *ECZ* étant rectangle en *C*, & ayant ses deux côtés de l'angle droit connus *CE* = *FZ* (4′ 59″). *CZ* (6′ 10″) l'on en peut conclurre l'angle *CEZ*; c'est pourquoi dans le triangle *EDZ*, on connoit les deux angles en *E* & en *D*, & le côté compris *ED*, d'où l'on tire la valeur de *DZ* (6′ 14″) lequel étant ôté de *DK* (16′ 3″) il reste *ZK* (9′ 49″) qui a été parcouru en 1^h 40′ 18″. En raison de quoi on trouve que *DZ* aura été parcouru en 1^h 3′ 42″. C'est pourquoi si l'on ajoûte ce temps à celui de l'observation *Z*, qui est 4^h 13′ 18″, la somme 5^h 35′ 0″, sera le temps vrai de la conjonction, déterminé par cette observation *Z*, comparée avec l'observation de l'entrée, en supposant l'orbite déterminée par les deux observations *A*, *Z*.

Les autres observations *Y*, *X*, *V*, *T*, employées de la même maniere, tant avec l'observation *A* qu'avec l'observation *C*, m'ont donné le moment de la conjonction comme il suit.

A, *Z*.	5^h	35′	0″	..... *C*, *Z*.	5^h	34′	59″.
Y.	5	39	12	..... *Y*.	5	38	50.
X.	5	35	38	..... *X*.	5	35	37.
V.	5	32	45	..... *V*.	5	32	43.
T.	5	33	59	..... *T*.	5	33	50.

Si l'on prend un milieu entre ces dix différentes déterminations, l'on aura le temps vrai de la conjonction vraie de Mercure avec le soleil à 5^h 35′ environ; & comparant ce temps avec celui de sen entrée, observée immédiatement à 2^h 51′, Mercure aura employé 2^h 44′ à parcourir l'arc *DK* de son orbite, que l'on a déterminé ci-devant de 16′ 3″; de plus si l'on abaisse du point *E* la perpendiculaire *EI* sur l'orbite de Mercure, elle y déterminera au point *I* le milieu du passage de Mercure sur le soleil, & *EI* sera la plus proche

diſtance des centres du ſoleil & de Mercure que l'on trouve de 5′ 51″, en ſuppoſant la latitude *ED* de Mercure dans ſa conjonction de 5′ 55″, & l'angle *IDE* de 81° 23′, complément de l'angle *DHE* 8° 37′. On trouve auſſi par la réſolution du même triangle *EDI*, la valeur de *DI* de 53″ que Mercure a dû parcourir en 11′ 24″, à raiſon de *DK* (16′ 3″) qu'il a parcouru en 2^h 44′. C'eſt pourquoi le temps de la conjonction ayant été marqué ci-devant à 5^h 35′, le milieu de l'éclipſe aura dû ſe faire à 5^h 23′ $\frac{1}{2}$ environ, & la demeure entiere du centre de Mercure dans le ſoleil, aura dû être d'environ 5^h 5′.

Comme Mercure n'a pû être obſervé à Paris que pendant une heure trois quarts, ce qui n'eſt que le tiers du temps qu'il devoit reſter dans le ſoleil, il eſt bien difficile d'eſtimer par cette petite partie, quelle a dû être toute la durée de ſon éclipſe, & principalement parce que l'on n'a pû marquer juſqu'où il s'étoit avancé dans le ſoleil que par ſa ſituation déterminée vers la fin de ſon apparition au coucher du ſoleil; ou ſans parler de la difficulté qu'il y avoit de l'obſerver alors à cauſe des réfractions, on ne peut gueres déterminer ſa différence de longitude à l'égard du centre du ſoleil, ſans employer la meſure du temps dans laquelle une ſeconde d'erreur en produit 15 dans la longitude, & Mercure employe plus de 3 minutes à parcourir ces 15 ſecondes de ſa longitude; d'où il ſuit qu'il ne ſeroit pas fort difficile qu'il y eût quelques minutes d'erreur dans le temps de la conjonction déterminée de cette maniere. Ce qui doit faire auſſi varier de preſque autant le milieu de l'éclipſe, & l'erreur doit être doublée dans la durée entiere de l'éclipſe. Cependant malgré toutes ces difficultés, je crois avoir fort approché de la veritable durée de l'éclipſe, & de ce qui s'enſuit. J'en ai la confirmation par le paſſage de 1677, dont M. Halley étant dans l'Iſle de Sainte-Heleine, a obſervé immédiatement & fort exactement toute la durée. Il a trouvé la demeure entiere du centre de Mercure dans le ſoleil de 5^h 14′ 20″. Il ſuit auſſi des obſervations de M. Gallet à Avignon, que dans ce

paſſage de 1677, la latitude de Mercure a été de 4′ 40″. D'où je conclus la plus ptoche diſtance des centres de 4′ 37″, que j'ai trouvée dans ce dernier paſſage-ci, de 5′ 51″. Sur ces deux plus proches diſtances des centres; & ſur le demi-diametre apparent du ſoleil, qui étoit le même dans ces deux paſſages (16′ 15″) on trouve la moitié de la route de Mercure dans le ſoleil, dans le paſſage de 1677 de 15′ 35″, & dans ce paſſage-ci, de 15′ 10″. D'où il ſuit qu'à raiſon de 2ʰ 37′ 10″, que Mercure a employées à décrire la moitié de ſa route en 1677, la demi-durée de ce dernier paſſage-ci auroit dû être de 2ʰ 32′ 56″, & par conſéquent la durée entiere de 5ʰ 5′ 52″, ce qui ne differe pas d'une minute entiere de ce que j'ai eſtimé par mes ſeules obſervations; d'où j'ai lieu de croire que les autres élémens que l'on n'a pû obſerver immédiatement, comme le temps de la conjonction & le milieu de l'éclipſe, doivent auſſi être fort approchans de ce que j'ai conclu ci-devant.

L'on peut encore, en ſuppoſant le triangle *DKE*, déterminé comme on a dit ci-devant, en conclurre le demi-diametre apparent de Mercure, en employant l'intervalle de temps écoulé entre l'entrée du centre de Mercure ſur le diſque du ſoleil & ſon entrée totale: cet intervalle a été marqué ci-devant de 39″. Suppoſons qu'au moment de l'entrée totale le centre de Mercure ait été au point *N*, ſi l'on mene par ce point le demi-diametre *ENL*; *NL* ſera égale au demi-diametre apparent de Mercure, ainſi la différence de *EK* & de *EN* ſera le demi-diametre apparent de Mercure. Comme *NK* eſt le chemin que le centre de Mercure a parcourru ſur ſon orbite pendant 39″, il eſt aiſé de trouver la grandeur de cet arc *NK* à raiſon de tout l'arc *DK* (16′ 3″) que l'on a dit ci-devant avoir été parcouru en 2ʰ 44′. Suivant ce rapport, on trouve *NK* de 3″ $\frac{82}{100}$. Maintenant dans le triangle *DEK*, dans lequel je ſuppoſe l'arc *DK* de 16′ 3″, *EK* de 16′ 15″, & l'angle *EDK* de 81° 23′ 0″, on en peut conclurre l'angle *DEK*, & par conſéquent l'angle *DKE*; ainſi le triangle *NEK* eſt déterminé, ayant ſes deux côtés *EK*, *NK*,

& l'angle compris connus ; d'où l'on calcule *NE* de 16′ 11″ $\frac{44}{100}$, lequel étant ôté de *EK* ou *EL* de 16′ 15″, il reste *NL* 3″ $\frac{56}{100}$ pour le demi-diametre apparent de Mercure ; ce qui donne le diametre apparent de Mercure de 7″ $\frac{1}{8}$ environ.

Du mouvement vrai de Mercure, vû du soleil.

Ayant déterminé, comme on a vû ci-devant, la différence de longitude du soleil & de Mercure, réduite à l'écliptique, vûe de la terre, il a été aisé d'en conclurre de quelle maniere cette différence de longitude auroit dû paroître du soleil, en supposant le rapport connu des distances de Mercure au soleil & à la terre. Dans le calcul que j'ai donné de cette éclipse avant l'observation, j'ai marqué que les distances de Mercure au soleil & à la terre étoient dans le rapport de ces deux nombres 31333, 67646 par les tables de M. de la Hire. Suivant ce rapport, une petite distance vûe de la terre, prise dans l'orbe de Mercure, qui seroit, par exemple, égale au demi-diametre apparent du soleil, qui est de 16′ 15″ ; cette même distance, vûe du soleil, y paroîtra sous un angle de 35′ 5″. D'autres petits angles, vûs de la terre, pris de même sur l'orbe de Mercure, lorsqu'ils n'excéderont pas un demi-degré, étant vûs du soleil, seront augmentés sensiblement dans le même rapport. C'est sur ce rapport de 16′ 15″ à 35′ 5″, que j'ai converti toutes les différences de longitude entre Mercure & le soleil, vûes de la terre, & les latitudes de Mercure.

Soit le plan de l'écliptique représenté par le plan de la Fig. 4. sur lequel soit *S* le soleil, *T* la terre, *M* le lieu de Mercure réduit à l'écliptique, *STM* la différence de longitude du soleil & de Mercure réduite à l'écliptique, & vûe de la terre, ainsi qu'elle a été déterminée par les observations, comme par exemple par l'observation *A* qui l'a donné de 15′ 17″. En faisant cette analogie, 16′ 15″. 35′ 5″ :: 15′ 17″. 33′ 0″, ce quatrieme terme est la différence *TSM* de longitude de la terre & de Mercure réduite à l'écliptique, vûe du soleil ; c'est pourquoi si l'on ôte cette différence *TSM* de la longitude ♉, *T* de la terre, qui dans ce moment est de

de 16° 39′ 58″ ♉, le reste 16° 6′ 58″ ♉ sera la longitude héliocentrique de Mercure réduite à l'écliptique. Dans cette même observation *A*, j'ai trouvé la latitude de Mercure, vûe de la terre, de 3′ 36″ septentrionale, qui étant vûe du soleil, devient de 7′ 46″ septentrionale. Voilà de quelle maniere j'ai conclu de mes observations le vrai lieu de Mercure, vû du soleil, & sa vraie latitude, ainsi que je l'ai marqué dans cette Table.

Differ. des longit. vraies de Mercure & de la terre, vûes du soleil. *M S T*			Longit. vraies de la terre, vûes du soleil. ♉			Long. vr. de Merc. vûes du soleil, réduites à l'éclipt. ♉			Latit. vraies de Mercure, vûes du soleil septentr.	
	M.	*S.*	*D.*	*M.*	*S.*	*D.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*
A.	33	0	16	39	58	16	6	58	7	46
B.	32	17		40	10		7	53	7	59
C.	30	35		40	34		9	59	8	8
D.	28	54		40	49		11	55	8	27
E.	25	59		41	32		15	33	8	42
F.	24	11		41	48		17	37	9	8
G.	23	21		42	0		18	39	9	17
H.	22	12		42	11		19	59	9	28
I.	21	27		42	21		20	54	9	39
K.	20	54		42	27		21	33	9	43
L.	20	7		42	35		22	28	9	52
M.	19	43		42	41		22	58	9	52
N.	19	13		42	47		23	34	9	56
O.	18	30		42	52		24	22	9	58
P.	17	40		43	1		25	21	10	7
Q.	16	46		43	17		26	31	10	11
R.	16	22		43	24		27	2	10	15
S.	15	39		43	31		27	52	10	20
T.	15	0		43	36		28	36	10	28
V.	14	26		43	41		29	15	10	35
X.	14	19		43	47		29	28	10	35
Y.	14	0		43	53		29	53	10	41
Z.	13	19		43	59		30	40	10	46

La route de Mercure déterminée par ces positions, est la

véritable route sur son orbite propre, ainsi le point où elle coupe l'écliptique est le vrai lieu de ce nœud, & l'angle avec lequel cette route coupe l'écliptique, mesure l'inclinaison véritable de l'orbite de Mercure sur l'écliptique. Pour déterminer ces deux élémens, j'ai comparé deux à deux les mêmes observations dont j'ai déja fait usage ci-devant. J'ai supposé ici, de même que ci-devant, que dans un si petit intervalle que celui qui a été observé, & même jusqu'au nœud, la latitude & la distance au nœud croissent également; ce que l'on peut supposer sans erreur sensible, ainsi que l'on s'en convaincra par l'inspection d'une Table des latitudes de Mercure, calculée pour chaque degré de distance de Mercure à son nœud, où l'on verra que pendant les trois ou quatre premiers degrés les latitudes croissent également sans une différence d'une seule seconde. Voici donc, suivant cette supposition, comment j'ai déterminé le nœud de Mercure. Entre les observations *A*, *Z*, le mouvement de Mercure en longitude a été de 23′ 42″, & en latitude de 3′ 0″; & la latitude de Mercure dans la premiere observation *A*, étoit de 7′ 46″. Si l'on fait cette analogie, 3′ 0″. 23′ 42″ : : 7′ 46″. 1° 1′ 22″, ce quatrieme terme étant soustrait de la longitude de Mercure, qui, dans la premiere observation *A*, étoit de 16° 6′ 58″ ♉, il reste 15° 5′ 36″ ♉ pour le lieu du nœud ascendant de Mercure. Les autres observations comparées de la même maniere, ont donné le lieu de ce nœud comme il suit.

A, *Z*.	15°	5′	36″ ♉	*C*, *Z*.	15°	6′	6″.
Y.	15	5	57	*Y*.	15	6	31.
X.	15	4	56	*X*.	15	5	18.
V.	15	5	31	*V*.	15	6	1.
T.	15	4	44	*T*.	15	5	5.

Il paroît par cet examen, que le nœud ascendant de Mercure n'est à présent qu'un peu au-delà du 15me degré du ♉. Le milieu entre les dix déterminations que je viens de faire, qui s'accordent assez bien entr'elles, met ce nœud au 15° 5′ $\frac{1}{2}$ du ♉.

Pour avoir l'inclinaison de l'orbite de Mercure sur l'écliptique, j'ai comparé de même le mouvement vrai de cette planete en longitude avec son mouvement en latitude entre les observations les plus éloignées, prises deux à deux. En faisant, par exemple, pour les deux observations extrèmes *A*, *Z*, comme le mouvement en longitude 23′ 42″ est au mouvement en latitude 3′ 0″, ainsi le *S*, *T*. est à la tangente de l'inclinaison véritable de l'orbite de Mercure sur l'écliptique, qui se trouve par ces deux observations de 7° 13′. Les autres observations ont donné cette inclinaison comme il suit.

A, *Z*.	7° 13′	*C*, *Z*.	7° 15′
Y.	7 15	*Y*.	7 18
X.	7 8	*X*.	7 10
V.	7 12	*V*.	7 15
T.	7 7	*T*.	7 9

Le milieu entre ces dix différentes déterminations est 7 degrés 12 minutes.

J'ai aussi recherché quelle étoit dans cette conjonction la vîtesse du mouvement horaire vrai de Mercure en longitude, réduite à l'écliptique; & cela, en comparant les différences de longitude avec les intervalles de temps répondans, d'où j'ai tiré par proportion le mouvement horaire; entre les observations extrèmes *A*, *Z*, par exemple, il s'est écoulé 1^h 35′ 4″, & le mouvement vrai de Mercure en longitude a été pendant ce temps-là de 23′ 42″, à raison de quoi le mouvement horaire en résulte de 14′ 52″. Les autres observations employées déja ci-devant, donnent ce mouvement comme il suit.

A, *Z*.	14′ 58″	*C*, *Z*.	15′ 18″.
Y.	14 50	*Y*.	15 10.
X.	14 55	*X*.	15 16.
V.	15 8	*V*.	15 33.
T.	15 3	*T*.	15 27.

Le milieu entre ces dix déterminations est 15′ 10″, préci-

ſément de la même grandeur que M. Halley le donne dans ſes Élémens du calcul de ces ſortes d'éclipſes. Par les Tables de M. de la Hire, ce mouvement horaire vrai de Mercure en longitude, réduit à l'écliptique, eſt de 15′ 17″.

Réflexions ſur les déterminations précédentes.

Dans les élémens que j'ai été obligé d'emprunter des Tables aſtronomiques, je me ſuis entierement conformé à celles de M. de la Hire, ainſi que je l'ai dit ci-devant. Il m'a été indifférent, comme je l'ai auſſi dit, de me ſervir de ces Tables ou d'autres, pour en déduire la ſituation apparente de Mercure au ſoleil : mais comme mon but a été de conclurre de mes obſervations la véritable ſituation de Mercure à l'égard du ſoleil, c'eſt-à-dire, celle qui ſeroit vûe du centre de la terre, j'ai été obligé d'employer la parallaxe horiſontale du ſoleil que M. de la Hire ne fait que de 6″, quoiqu'elle ſoit plus vrai-ſemblablement de 10 ou 12 ſecondes. L'erreur que cela a pû cauſer, n'eſt tout au plus que de 2 ou 3 ſecondes, dont les latitudes vraies de Mercure doivent être augmentées ; d'où il ſuit que la latitude de cette planete, au moment de ſa conjonction, que j'ai déterminée de 7′ 55″ ſeptentrionale, doit plutôt être priſe de 7′ 57″. Par la même raiſon, les latitudes vûes du ſoleil, doivent être augmentées de 4 à 5 ſecondes, & le nœud aſcendant de Mercure doit être d'environ une demi-minute moins avancé. Ce nœud ſera donc, ſuivant ce qui a été ci-devant, au 15ᵈ 5′ ♉, en ſuppoſant la longitude du ſoleil, telle qu'elle ſe calcule des Tables de M. de la Hire. Si l'on employoit d'autres Tables du ſoleil, il pourroit en réſulter une différente ſituation du nœud de Mercure. Il y a une autre correction à faire dans quelques-unes des déterminations que j'ai rapportées ci-devant, ce qui vient d'avoir employé le moment obſervé de l'entrée du centre de Mercure ſur le ſoleil, quoiqu'il puiſſe arriver par l'effet des parallaxes, que le centre de Mercure ne paroiſſe pas du centre de la terre entrer ſur le ſoleil au moment que l'on l'y obſerve entrer de deſſus la ſurface de la terre : la différence en

doit être d'autant plus grande, toutes autres choses pareilles, que Mercure est plus près de l'horison. J'ai cherché dans la situation de Mercure & du soleil à l'égard de l'horison au moment de l'entrée observée, ce qui devoit arriver par l'effet des parallaxes, & j'ai trouvé qu'en supposant, avec M. de la Hire, la parallaxe horisontale du soleil de 6″, le centre de Mercure, vû du centre de la terre, avoit dû paroître entrer sur le soleil 12″ plutôt qu'il n'y a été observé à Paris : mais si l'on fait la parallaxe horisontale du soleil du 10″, il faudra retrancher 20″ du temps de l'entrée observée du centre de Mercure sur le soleil, pour avoir le moment que cette entrée auroit paru se faire du centre de la terre. Ce moment de l'entrée du centre de Mercure sur le soleil, ainsi corrigé, doit donner le temps de la conjonction de 10 ou 12 secondes, plus avancé qu'il n'a été déterminé ci-devant : mais il est inutile d'avoir égard à une si petite différence, par la difficulté que l'on a fait voir ci-devant, qu'il y avoit à déterminer exactement jusqu'où Mercure s'étoit avancé dans les dernieres observations. C'est pourquoi on peut toûjours s'en tenir au temps de la conjonction que l'on a déterminé ci-devant vers $5^h\,35'$. L'on peut cependant, à cause de ce même effet des parallaxes, augmenter, si l'on veut, d'une minute, la demeure entiere du centre de Mercure dans le soleil, la faisant de $5^h\,6'$, ce qui la rendra fort approchante de ce qu'elle auroit dû paroître, vûe du centre de la terre.

Les élémens ainsi réduits à l'apparence vûe du centre de la terre, sont comme ils doivent être, pour être comparés avec ceux qui se déduisent des Tables de Mercure; c'est pour faciliter cette comparaison, que je suis entré dans une si grande discussion de l'effet des réfractions & des parallaxes. J'ai aussi crû qu'il étoit avantageux pour ce dessein, d'avoir fait un aussi grand nombre que j'ai fait d'observations de la situation de Mercure sur le soleil, & de les avoir toutes rapportées, afin de mieux faire reconnoître par leur quantité leur degré de précision, & jusqu'à quel point de certitude on peut être assûré des élémens que j'ai déduits de ces observa-

tions; ce que je dis, afin que s'il se trouve quelque différence entre mes déterminations & celles des autres Astronomes, on prenne garde si les autres Astronomes sont entrés dans une pareille discussion des effets des parallaxes & des réfractions, & enfin s'ils ont rapporté un assez grand nombre d'observations, pour que l'on puisse reconnoître par la quantité le degré de précision avec lequel elles ont été faites; car quel jugement peut-on porter des observations qui ne sont pas en plus grand nombre qu'il n'en faut pour déterminer ce que l'on se propose de connoître?

Maniere de corriger par les réfractions, les différences d'ascension droite & de déclinaison de Mercure & du soleil, observées par les méthodes ordinaires, lorsque les différences de réfraction sont sensibles.

J'ai fait voir ci-devant de quelle maniere j'ai déterminé, indépendamment des réfractions, la situation de Mercure sur le soleil. Si l'on souhaitoit comparer mes positions avec celles des autres Astronomes, conclues des différences d'ascension droite & de déclinaison, déterminées à l'ordinaire par les différences de passage de Mercure & du soleil à des fils obliques & perpendiculaires au mouvement diurne de ces planetes, il faudroit avant de comparer ces observations avec les miennes, corriger par les réfractions les observations des autres Astronomes, si ces observations ont été faites assez près de l'horison, pour que les différences de réfraction ayent pû altérer sensiblement les différences d'ascension droite & de déclinaison observée.

L'on sçait que lorsque les différences des réfractions sont sensibles dans l'espace d'un demi-degré qu'occupe le soleil, son diametre vertical paroît plus court que le diametre horisontal, & qu'alors tout le disque du soleil prend la figure d'une ellipse, dont le grand axe est parallele à l'horison, & le petit axe lui est perpendiculaire. La différence de ces deux axes est d'autant plus grande, ou l'ellipse du soleil est d'autant

plus allongée, que la différence des réfractions des deux extrémités de son diametre vertical est plus sensible.

Par la Table des réfractions, calculée pour chaque degré de hauteur, on peut estimer de combien doit être l'accourcissement du diametre vertical du soleil, à telle hauteur que ce soit.

M. Picard faisoit plus, il observoit immédiatement avec son micrometre, l'accourcissement du diametre vertical du soleil.

Voici quelques-unes de ses observations, faites au mois de Novembre de l'année 1666, qui peuvent faire juger à peu-près de l'accourcissement du diametre vertical du soleil, dans la saison où se fait le passage de Mercure dans le soleil au nœud ascendant.

Hauteurs apparentes du centre du soleil.	Le 21 matin.		Le 21 soir.		22 matin.	
Degrés.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*
1 ¼	....	....	....	....	3	39
3	....	....	....	....	1	46
4	....	....	....	....	1	20
5	....	....	0	51	0	50
6	....	....	0	46		
7	0	30				
8	0	26	....	....	0	28
9	0	22				
10	0	19				
11	0	16				
12	0	13				
13	....	....	....	....	0	9
14	....	....	....	....	0	6
15	....	....	....	....	0	3
16						
17	....	....	....	....	0	0

Si l'on suppose que les différences de réfraction croissent

également, comme on le peut ſuppoſer ſans erreur ſenſible dans un petit eſpace, tel que le demi-diametre apparent du ſoleil, ſur-tout lorſque cet aſtre eſt élevé de plus de deux ou trois degrés; dans cette ſuppoſition, toutes les parties du ſoleil, priſes perpendiculairement à l'horiſon, doivent être accourcies proportionnellement; ainſi le diſque du ſoleil pourra être pris pour une ellipſe ordinaire, ſur laquelle ayant déterminé par obſervation la diſtance apparente de Mercure au grand axe de cette ellipſe, il faudra augmenter cette diſtance dans le rapport de l'accourciſſement de tout le diametre vertical pour avoir la véritable diſtance. Cette correction dans la diſtance verticale en doit produire néceſſairement une autre dans la différence de déclinaiſon & d'aſcenſion, à cauſe de l'inclinaiſon du parallele & du cercle horaire ſur le grand axe de l'ellipſe. Voici ma méthode pour calculer la quantité de cette correction, tant dans le vertical que dans le parallele & le cercle horaire.

Fig. 5. Je ſuppoſe que l'on connoiſſe le diametre horiſontal *D C* du ſoleil, & qu'il ſoit diviſé en autant de parties égales qu'il emploie de ſecondes de temps à paſſer par le méridien. C'eſt de ces parties égales dont je me ſervirai pour meſurer les différences d'aſcenſion droite & de déclinaiſon tant apparente que véritable.

Soit donc *M*, le lieu apparent de Mercure dans le diſque du ſoleil, *I T* un des fils de la lunette que l'on a diſpoſé ſuivant le parallele apparent du bord ſeptentrional du ſoleil. Soit auſſi *P O* le fil perpendiculaire par lequel on ait obſervé la différence de paſſage de Mercure & du bord oriental du ſoleil. Soit *P T* cette différence connue en parties, dont on connoît le demi-diametre *D C* du ſoleil. Soit auſſi *P M*, la différence apparente de déclinaiſon de Mercure & du bord ſeptentrional du ſoleil, déterminée dans les mêmes parties par les différences de paſſage de Mercure par les obliques & le fil perpendiculaire. En achevant le quadrilatere rectangle *P T Q M*, le point *M* repréſentera la ſituation apparente de Mercure ſur le diſque du ſoleil au moment du paſſage de

Mercure

Mercure par le fil perpendiculaire. Soit dans ce même temps *TK*, qui touche le bord oriental du soleil, & qui soit perpendiculaire à *IT*; je suppose que dans le temps de l'observation on connoisse l'inclinaison apparente du parallele *IT* sur le diametre horisontal *CD*; ce qui se peut connoître par le calcul de l'angle que fait au temps de l'observation le parallele du soleil avec le vertical, où l'on doit aussi avoir égard à l'inégalité des réfractions, par laquelle la route apparente par la réfraction n'est point parallele à la véritable route. Je suppose aussi que l'on connoisse le rapport des deux axes de l'ellipse du soleil; ce que l'on pourra connoître à peu-près, ou par la table des réfractions, ou par les observations que j'ai rapportées ci-devant de M. Picard, de l'accourcissement du diametre vertical du soleil à différens degrés de hauteur sur l'horison.

Cela supposé, soient *A*, *B*, les foyers de l'ellipse par lesquels soient menées les lignes *FBG*, *FAH*, paralleles aux lignes *IT*, *TK*, le quadrilatere *FITK* est tout déterminé; car par l'inclinaison connue du grand axe *CD* sur *IT* ou sur sa parallele *FG*, on peut sçavoir le rapport des trois côtés du triangle *ABF* rectangle en *F*, & par le rapport connu des deux axes de l'ellipse, on connoît la distance des foyers; donc tout le triangle *ABF* est connu. De plus, comme *FG* est perpendiculaire à la tangente *TK*, si l'on fait *AG* égal au grand axe *CD*; *BG* sera partagé en deux parties égales au point *K*, & ainsi l'on pourra connoître *BK* & *FK*=*IT*; car dans le triangle *AFG*, rectangle en *F*, on connoît *AF* & l'hypoténuse *AG*=*CD*, d'où l'on peut connoître le troisieme côté *FG*, dont ôtant *FB*, il restera *BG*, dont la moitié *BK* étant ajoûtée à *FB*, donnera *FK*=*IT*. Par la même raison, puisque *FH* est perpendiculaire sur la tangente *IT*, si l'on fait *BH* égal au grand axe *CD*, *AH* sera partagé en deux également au point *I*, & l'on pourra connoître *AI*, & *FI*=*TK*.

Que l'on imagine présentement par le lieu apparent *M* de Mercure des perpendiculaires *MN*, *MO*, sur les lignes

FI, *FK*, ces perpendiculaires ne feront que les prolongemens des côtez *MQ*, *MP*, du quadrilatere *MPTQ*, que l'on a dit ci-devant être connu en parties du diametre *CD* par les différences apparentes d'afcenfion droite & de déclinaifon entre Mercure & le bord du foleil. Ainfi connoiffant *BK* & *OK*=*MQ*=*PT*, on connoîtra leur différence *BO*, & connoiffant *TK* = *PO* & *TQ* = *PM*, on connoîtra *OK* = *MO*, & partant tout le triangle *BOM* rectangle en *O*, ayant fes deux côtés de l'angle droit connus, fera déterminé ; d'où l'on pourra conclurre l'hypoténufe *BM*.

De la même maniere on pourra connoître dans le triangle *ANM*, rectangle en *N*, l'hypoténufe *AM*. C'eft pourquoi confidérant préfentement le triangle *ABM*, on s'appercevra qu'il eft tout déterminé, ayant fes trois côtés connus. Si l'on imagine donc du point *M* la perpendiculaire *ML* fur *AB*, l'on pourra connoître la grandeur de cette perpendiculaire & la diftance *EL*, à laquelle cette perpendiculaire paffe du centre de l'ellipfe.

Cette perpendiculaire *ML* mefure la différence apparente de hauteur de Mercure & du centre du foleil. Pour avoir la véritable différence, il faut prolonger cette perpendiculaire *LM* comme en *S*, en prenant *LS* à *LM* dans le rapport du grand axe au petit axe de l'ellipfe.

Ayant déterminé de cette maniere le vrai lieu *S* de Mercure à l'égard du centre *E* du foleil, fi l'on imagine par ce centre du foleil le cercle horaire *REV*, faifant avec le diametre horifontal *CD* du foleil, l'angle *REB* de l'inclinaifon véritable du cercle horaire avec le diametre horifontal du foleil, & que du point *S* l'on abbaiffe fur ce cercle horaire la perpendiculaire *SV*, cette perpendiculaire mefurera la différence véritable d'afcenfion droite de Mercure & du foleil, & la diftance *EV* de cette perpendiculaire au centre du foleil, fera la différence véritable de déclinaifon de Mercure & du centre du foleil.

Pour déterminer ces deux élemens, je fuppofe *SL* prolongé jufqu'à ce qu'il rencontre en *R* le cercle de déclinaifon

ER, le triangle *ELR* rectangle en *L*, ayant le côté *EL* connu, & l'angle en *E* est tout déterminé ; c'est pourquoi ajoutant *RL* à *LS*, on connoîtra *RS* hypoténuse du triangle *RVS* qui est encore semblable au triangle *ERL* ; donc *SV* & *RV* se pourront connoître, & si de *RV* on en ôte *RE*, restera *EV*.

J'ai fait, suivant cette méthode, le calcul de la seconde observation, dont M. Maraldi s'est servi pour déterminer la route de Mercure, & j'ai trouvé, en supposant l'accourcissement du diametre vertical de 1′ 50″, tel à peu-près qu'il se conclut des observations de M. Picard pour la situation du soleil dans l'observation de M. Maraldi ; j'ai trouvé, dis-je, par ce calcul, la latitude de Mercure de 4′ 53″, & sa différence de longitude au centre du soleil de 6′ 28″, au lieu que sans avoir égard à la réfraction, j'avois conclu de la même observation la latitude de Mercure de 5′ 10″, & sa différence de longitude au centre du soleil de 6′ 28″. Dans la pénultieme de mes observations, que j'ai nommée *Y*, j'ai calculé, à une seconde près, la même différence de longitude de mercure & du soleil que je trouve ici dans l'observation de M. Maraldi, & j'ai trouvé la latitude de 4′ 57″; d'où l'on voit que Mercure qui, par l'observation de M. Maraldi, sans égard aux réfractions, se trouvoit de 13 secondes au-dessus de la position que je lui ai donnée, se trouve au-dessous de 4″ seulement, lorsque l'on a égard aux réfractions, & que l'on en fait le calcul de la maniere que je viens d'expliquer ; ce qui fait voir la nécessité qu'il y a d'employer les réfractions dans l'usage de ces observations, si l'on veut en conclurre la situation de Mercure sur le soleil avec toute la précision que la peut donner l'observation.

Il y a un peu plus de difficulté à déterminer l'effet des réfractions dans des observations semblables à celles qu'a rapporté M. Cassini. Voici comment je m'y suis pris. Soit *MX* le fil que parcourt Mercure, dont je suppose que l'on connoisse l'inclinaison sur le diametre horisontal *CD* du soleil. Cette inclinaison connue détermine la situation de trois Fig. 6.

tangentes, que je suppose menées à l'ellipse qui représente le disque du soleil. L'une de ces tangentes *QO* est perpendiculaire à *MX*, & elle représente le fil perpendiculaire par lequel on a observé la différence apparente d'ascension droite de Mercure & du bord oriental du soleil; les deux autres tangentes *LF*, *FK*, sont inclinées sur celle-ci de 45°, & elles représentent les fils obliques par lesquels on a observé le passage du bord oriental du soleil pour en conclurre la différence apparente de declinaison entre Mercure & le centre du soleil. Cette différence apparente de déclinaison est mesurée par la perpendiculaire *FX*, abbaissée du point *F* sur la route apparente *MX* de Mercure, ce point *F* étant l'intersection des deux tangentes *IF*, *FK*: car si l'on imagine la tangente *IF* & la route apparente *MX* de Mercure, prolongées jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *Z*, & que par ce point l'on imagine *YZ* perpendiculaire à *IF*, cette ligne *YZ* représentera le fil oblique qui quitte le bord oriental du soleil, avant d'avoir passé par l'autre fil oblique *IZ*; c'est pourquoi l'intervalle de temps entre ces deux attouchemens doit être marqué par la partie de la route de Mercure ou du centre du soleil, comprise entre les deux paralleles *FK*, *ZY*. Or *XZ* ou son égale *FX* est égale à la moitié de cette route: donc cette ligne *FX* doit mesurer la différence apparente de déclinaison entre Mercure & le centre du soleil. Cette ligne *FX* est donc connue en parties du diametre horisontal *CD* du soleil.

Soit *M* le lieu apparent de Mercure, & *EN* la route apparente du centre du soleil qui est parallele à la route *MX* de Mercure. Que cette route *EN* du centre du soleil soit prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en *N* la perpendiculaire *FX* & en *Q* la tangente *OQ*. Soit aussi abbaissé sur cette route deux autres perpendiculaires, l'une *BR* du foyer *B*, & l'autre *MS* du lieu apparent *M* de Mercure. La partie *SQ* de la route du centre du soleil est encore connue en parties du diametre horisontal *CD*, cette portion *SQ* étant la différence apparente d'ascension droite de Mercure & du bord

oriental du soleil. Voici selon toute cette construction de quelle maniere on peut déterminer la différence véritable d'ascension droite & de déclinaison de Mercure & du centre du soleil.

Soient par le foyer *B*, menées les trois lignes *BH*, *BP*, *BG*, perpendiculaires aux trois tangentes *IF*, *OQ*, *FK*. Soit décrit de l'autre foyer *A* comme centre, & de l'intervalle *CD* pour rayon, un cercle qui coupe ces trois perpendiculaires aux points *H*, *P*, *G*; & par ces points de section, soient imaginées les lignes *AH*, *AP*, *AG*, il se formera trois triangles *ABH*, *APB*, *ABG*, qui auront un côté commun *AB* qui est connu par le rapport des axes de l'ellipse. Ces triangles auront encore chacun un côté connu; sçavoir, *AH*, *AP*, *AG*, dont chacun est égal à *CD*. On connoît aussi dans chacun des trois triangles susdits, l'angle fait en *B*, puisque l'on connoît l'inclinaison *BEN* de la route apparente du soleil sur le diametre horisontal *CD*, & l'inclinaison des fils sur celui que parcourt Mercure. On peut donc dans chacun des trois triangles susdits, déterminer le troisieme côté *BH*, *BP*, *BG*, dont par conséquent les moitiés *BI*, *BO*, *BK*, seront connues.

Par la construction précédente, le quadrilatere *BIKF*, est rectangle; c'est pourquoi imaginant la diagonale *BF*, on en peut connoître la grandeur, puisque l'on connoît les deux côtés de l'angle droit *BK* & *KF*, = *BI*. On peut aussi par la résolution du triangle *BKF*, sçavoir la grandeur de l'angle *KBF*, qui ajouté à l'angle *ABG*, donnera l'angle *ABF*. C'est pourquoi si l'on imagine le point *F* joint avec le centre du soleil par la droite *EF*, tout le triangle *EBF* sera déterminé, ayant ses deux côtés *EB*, *BF* connus, & l'angle compris. On pourra donc connoître le troisieme côté, & l'angle *BEF*, qui étant ôté de l'angle *BEN*, il restera l'angle *FEN* connu. Ainsi dans le triangle *FEN*, rectangle en *N*, connoissant l'hypoténuse *FE*, & l'angle oblique *FEN*, on en pourra conclurre les deux autres côtés *FN*, *EN*.

Que l'on considere présentement le triangle *BER*, rectan-

gle en *R*, dans lequel on connoît les angles & l'hypoténuſe *BE*, on en pourra conclurre *ER*, qui étant ajoûté à *RQ*=*BO*, il viendra *EQ*, dont ôtant *SQ*, reſtera *ES*. Si de *FX* l'on ôte *FN*, connue ci-devant, reſtera *NX*=*MS*; c'eſt pourquoi dans le triangle *EMS*, rectangle en *S*, connoiſſant les deux côtés de l'angle droit, on pourra connoître le reſte.

L'angle *MES* ajoûté à l'angle *SEL*, il viendra l'angle *MEL*; c'eſt pourquoi ſi *ML* eſt perpendiculaire ſur *CD*, tout le triangle *MEL* rectangle en *L* ſera déterminé, ſon hypothénuſe *EM* & ſes angles étant connus. On en pourra donc conclurre les deux autres côtés *ML*, *EL*; *ML* repréſente la différence apparente de hauteur de Mercure & du centre du ſoleil, qu'il faut augmenter comme en *LT* dans le rapport du grand axe au petit axe. Que l'on joigne le vrai lieu *T* de Mercure avec le centre du ſoleil par la droite *ET*, il faudra réſoudre le triangle *ETL* rectangle en *L*, dans lequel on connoît les deux côtés de l'angle droit; d'où l'on en conclurra l'hypoténuſe *ET* & l'angle *TEL*, dont ôtant l'angle *LES*, que je ſuppoſe à préſent égal à l'angle de l'inclinaiſon véritable du parallele du centre du ſoleil ſur ſon diametre horiſontal, il reſtera l'angle *TES*; c'eſt pourquoi ſi l'on imagine du point *T* la perpendiculaire *TV* abbaiſſée ſur la route véritable du centre du ſoleil, le triangle *ETV* rectangle en *V* ſera tout déterminé, ayant ſon hypoténuſe *ET* connue auſſi-bien que ſes angles; c'eſt pourquoi l'on en pourra conclurre les deux autres côtés qui meſurent les différences véritables d'aſcenſion droite & de déclinaiſon de Mercure & du centre du ſoleil.

Ayant fait, ſuivant cette méthode, le calcul de la troiſieme obſervation qu'a rapporté M. Caſſini, j'ai trouvé la différence de longitude de Mercure & du centre du ſoleil de 6′ 42″, & la latitude de Mercure de 4′ 54″, ce qui tombe exactement avec mon obſervation *V*, dans laquelle j'ai déterminé préciſément la même latitude de Mercure, & la différence de longitude, ſeulement d'une ſeconde plus petite. M. Caſſini, ſans égard à la réfraction, avoit déterminé dans cette

Septentrion

uivant Monsieur Halley

servations Z YXV T S

Route de Mercure

ant les tables de Monsieur C

ation de ☿ Suivant
ley au moment
ercure Suivant les tables de ☿ observée.

Situation de ☿ Suivant les Ephemerides
de Mr Manfredi au moment de
son entrée observée.

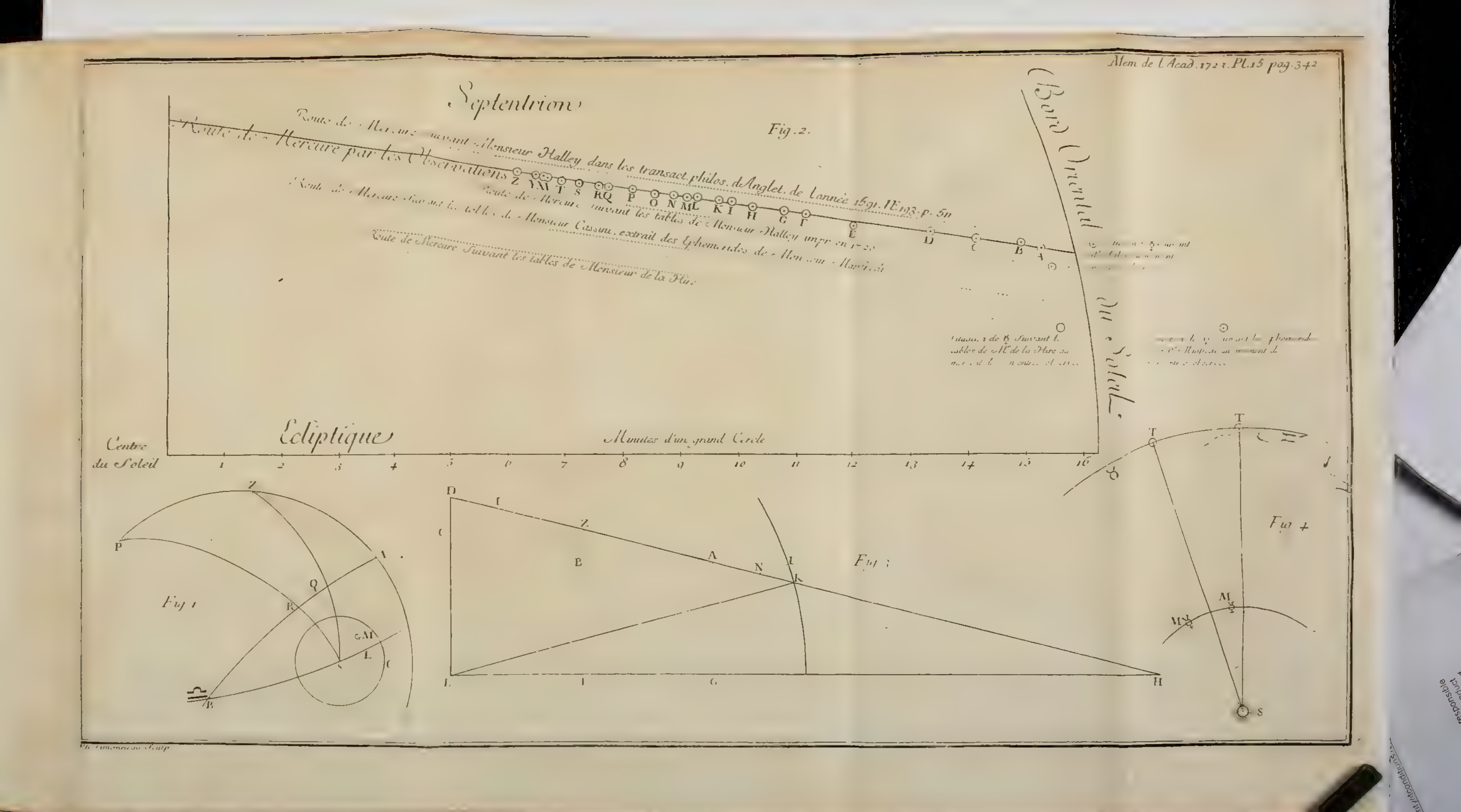
T T

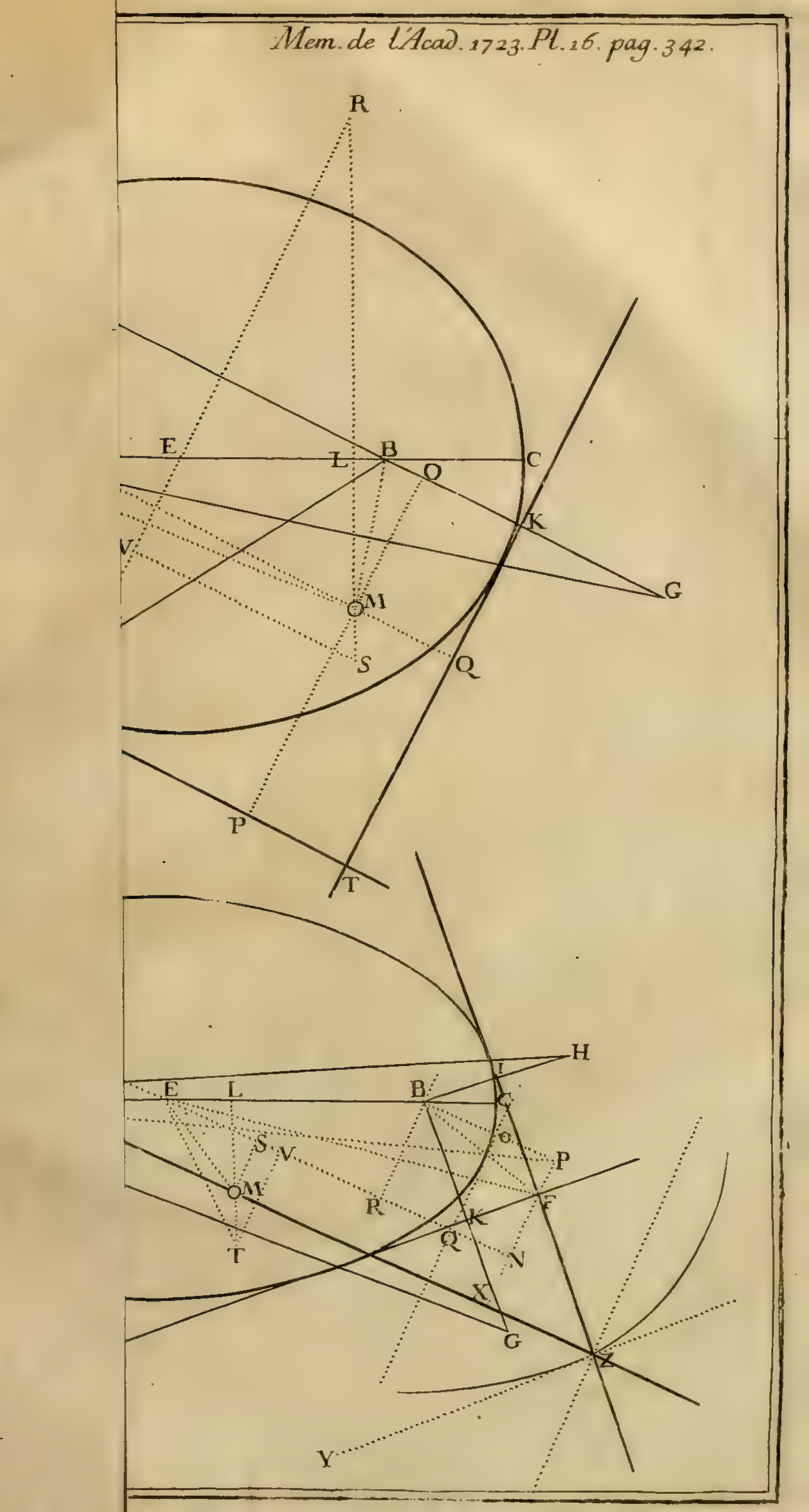
5 6 7

D I C B E H

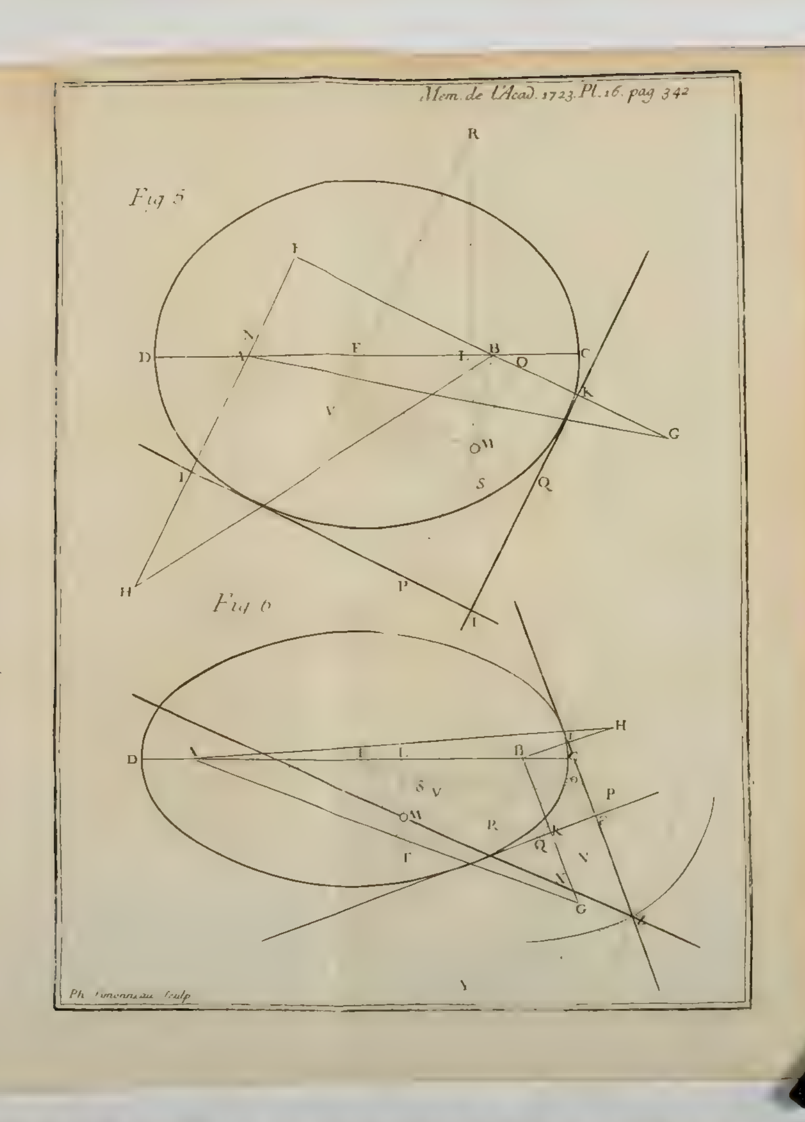
M M S

Fig. 4.


Septentrion
Fig. 2.
Route de Mercure suivant Monsieur Halley dans les transact. philos. d'Anglet. de l'année 1691. N° 193. p. 511
Route de Mercure par les Observations
Route de Mercure suivant les tables de Monsieur Halley impr. en 1720
Route de Mercure suivant les tables de Monsieur Cassini, extrait des Ephemerides de Monsieur Manfredi
Route de Mercure suivant les tables de Monsieur de la Hire
Z Y X V T S R Q P O N M L K I H G F E D C B A
Bord Oriental du Soleil
Situation de ☿ suivant les tables de M. de la Hire au moment de la sortie
Ecliptique
Minutes d'un grand Cercle
Centre du Soleil
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
Fig. 1
Fig. 3
Fig. 4



R
E
L
B
C
O
K
V
G
M
S
Q
P
T
H
I
E
L
B
C
o
S
V
P
M
R
F
K
Q
T
N
X
G
Z
Y


Fig 5
Fig 6
Ph. Simonneau Sculp

observation sensiblement la même différence de longitude, mais la latitude de 20″ plus grande.

Puisque par les calculs que je viens de rapporter des dernieres observations de Mrs. Cassini & Maraldi, j'ai fait voir que les latitudes de Mercure étoient considérablement alterées par les réfractions; & puisque ces latitudes étant corrigées par les réfractions, se sont trouvées sensiblement égales à celles que j'ai concluës de mes observations, où j'ai évité les réfractions, il y a toute apparence que les autres observations exactes de Mercure corrigées, de la même maniere, quand il y aura lieu, pourront s'accorder avec les miennes, sur-tout si l'on a aussi égard à l'effet des parallaxes comme j'ai eu soin d'y prendre garde.

SUITE DES RECHERCHES PHYSICO-MATHEMATIQUES SUR LA REFLEXION DES CORPS.

Par M. DE MAIRAN.

JE me suis apperçû à la lecture de la premiere partie de ces Recherches*, où j'ai traité de la *Réflexion des corps contre un plan inébranlable*, que mes auditeurs se sont quelquefois portés d'eux-mêmes à l'application que j'en devois faire ici à un plan mobile ou pénétrable, ou, ce qui revient au même selon moi, à la réfraction. J'ose tirer de-là une conséquence favorable à mes principes, & qui me dispensera d'entrer dans un aussi grand détail que j'avois cru d'abord devoir le faire, pour montrer l'accord de ce que j'ai établi dans cette premiere Partie, avec tout ce que j'ai à dire dans la seconde. Je me contenterai donc souvent d'indiquer l'ap-

22 Dec. 1723.

* *Année* 1722. p. 6.

plication que je fais de l'une à l'autre, par la feule citation des articles de la premiere, en fuppofant toûjours qu'on l'ait devant foi, avec les figures qui l'accompagnent, & dont je ne ferai point difficulté de me fervir, comme fi ce que je vais écrire fuivoit immédiatement dans le même volume. Je ferai par-là plus en état de donner une jufte étendue aux endroits les plus importans, ou les plus curieux.

SECONDE PARTIE.

De la réflexion des corps pouffés contre un plan mobile.

Des corps fans reffort.

Fig. 1. XXXV. Soit une fphere *S* (*Fig. 1.*) dont le centre eft *C*, parfaitement dure & inflexible, qui vienne frapper perpendiculairemenr un plan *AL*, que je fuppofe faire partie de la furface d'un corps en repos auffi parfaitement dur & inflexible, & dont la maffe a un rapport fini avec la fphere *S*.

Ce cas, qui eft celui de l'Article I. ne fait plus aucune difficulté; il n'y aura point de reflexion, & tout le monde fçait que les deux corps iront enfemble après le choc, comme ne faifant plus qu'une feule maffe, & avec une viteffe commune, égale à la quantité de force du corps en mouvement avant le choc, divifée par la fomme des deux maffes.

On fuppofe ici, & nous le fuppoferons toûjours dans ce Memoire, que la fphere S *rencontre le plan* AL, *en un point* X, *tel qu'ayant abbaiffé du centre* C, *fur ce plan, la perpendiculaire* CX, *prolongée au delà du point de rencontre & de contact* X, *elle paffe par le centre de gravité du folide auquel appartient la furface* AL *plane ou courbe.*

Fig. 2. XXXVI. Soit maintenant (*Fig. 2.*) la fphere *S* pouffée obliquement contre le plan *AL*, avec toutes les circonftances décrites ou fuppofées dans l'article II. excepté que le plan *AL*, en repos dans l'inftant du choc, ainfi que nous le fuppoferons toujours, n'eft pourtant pas inébranlable, mais mobile, & qu'il appartient à la furface d'un corps dont la

maffe

masse a un rapport fini avec *S*, comme aussi nous le supposerons toûjours dans la suite.

Il est évident par les Articles I. & II. & par le précédent, qu'il n'y aura encore ici aucune réflexion.

Mais je dis de plus, 1°. *Que la sphere* S *continuera de se mouvoir après le choc, sur le plan* AL, *de* X *vers* A, *en le rasant, c'est-à-dire, avec une pression infiniment petite ou nulle.*

2°. *Que sa vîtesse, par rapport au point* X *du plan, de* X *vers* A, *sera égale à* CZ, *& sa vîtesse absolue après le choc, moyenne entre la vîtesse* CZ, *& la vîtesse absoluë* CY *avant le choc, & plus grande que la vîtesse imprimée au plan.*

3°. *Qu'elle suivra une direction moyenne entre* CZ *&* CY, *& d'autant plus oblique au plan* AL, *que la masse du corps de la surface duquel il fait partie, est plus grande.*

4°. Enfin, *qu'etant parvenue à l'extrémité* A, *elle continuera de se mouvoir avec la même vîtesse, & sur la même direction; tandis que le plan* AL *continuera son chemin sur la direction* CX, *& avec la vîtesse qui lui a été imprimée par le choc, moindre que celle de la sphere après le choc.*

Car 1°. il est clair par l'Art. II. & parce que le plan ne fait aucun obstacle au mouvement de la sphere, en tant qu'elle va de *C* vers *Z*, qu'elle continuera de se mouvoir en ce sens, après le choc, de même qu'avant le choc. Et puisqu'il n'y a rien de successif dans le choc des corps supposés infiniment durs & inflexibles, & que la communication de leurs mouvemens est instantanée, la sphere communiquera d'abord au corps *AL*, toute la vîtesse qu'elle doit jamais lui communiquer, & elle conservera de même dans l'instant du choc toute celle qu'elle doit avoir dans la suite, & rien de plus. La sphere *S*, & le plan *AL*, iront donc après le choc d'une vîtesse égale vers *CX*, qui est la direction selon laquelle se fait le choc, & selon laquelle se feroit la pression, s'il y en pouvoit avoir. Mais deux corps qui vont d'une vîtesse égale vers un même côté, ne sçauroient agir l'un sur l'autre par aucune pression. Donc la sphere *S* coulera le long du plan *AL*, ou le rasera, sans y faire aucune pression.

2°. Il vient d'être remarqué que la vîtesse de la sphere, selon la direction parallele au plan, ne sçauroit changer; par conséquent elle sera mesurée par *CZ*, après le choc comme avant le choc. Mais sa vîtesse absolue après le choc, qui résulte de la précédente, & de celle qu'elle a vers *CX*, doit être plus petite qu'avant le choc; puisque la composante *CX* a diminué; & d'autant plus diminué, que le corps *AL* a plus de masse. Donc au lieu qu'avant le choc la vîtesse absolue
Fig. 14. étoit *CY* (*Fig. 14.*) composée de *CZ* & de *CX*, elle sera après le choc, par exemple, *Cy* composée de la même *CZ*, & de $Cx = CX = xX$. Il n'est pas moins évident que cette vîtesse absolue surpassera la vîtesse communiquée au plan par le choc de la sphere; puisque celle-ci, devenue la même dans les deux corps, n'est que composante de l'absolue de la sphere, & supposée $= Cx$, côté du rectangle *CxyZ*, dont *Cy* est la diagonale. Donc, &c.

3°. Ce qui vient d'être dit, prouve suffisamment que la direction *Cy* de la sphere ou de son centre après le choc, se doit trouver placée entre *CZ* & *CY*, au-dessus de *CY*, par rapport au plan *AL*, & devenir par conséquent plus oblique à ce plan que ne l'étoit *CY*, & d'autant plus que la masse du corps auquel appartient *AL*, est plus grande.

4°. Enfin puisque la pression est nulle, & que la sphere *S* se meut de *C* vers *Z*, par rapport au plan *AL*, il est évident que quand elle sera parvenue à l'extrémité *A* de ce plan, & qu'elle le quittera, elle continuera de se mouvoir avec la même vîtesse, & selon la même direction qu'auparavant. Puisque la présence du plan sans pression, ou son absence, sont à cet égard la même chose. Il n'est pas moins clair que le corps auquel appartient le plan *AL*, continuera son chemin sur la direction *CX*, & avec la vîtesse commune en ce sens, laquelle on a supposée égale à *Cx*; car on sçait que le choc oblique n'agit que selon la perpendiculaire menée par le point de la surface choquée. Donc, &c. *Qui est tout ce qu'il falloit prouver, qui arrive à une sphere infiniment dure & infléxible, poussée obliquement contre la surface plane d'un corps mobile de même nature.*

Des corps à reſſort.

XXXVII. Nous ſuppoſerons dans cette ſeconde partie les principes d'expérience énoncés dans les demandes de la premiere, *Article III.*

De la réflexion directe.

XXXVIII. Il ſuffit de ſe rappeller ſur ce ſujet, ce qui a été dit, *Art. IV.* ſur la ſphere à reſſort, pouſſée perpendiculairement contre un plan inébranlable, avec l'explication de la ſeconde demande, *Art. III. p. 12.* & d'y ajoûter ſeulement les circonſtances, & les loix de mouvement particulieres au choc des corps à reſſort, dont les maſſes ont un rapport fini entre elles. J'adopte ces loix telles qu'on les trouve expliquées dans l'Hiſtoire, & dans les Memoires de l'Académie de l'année 1706, & je les ſuppoſe ſuffiſamment connues de mes Lecteurs.

Mais il ne ſera peut-être pas hors de propos de faire voir ici, dans un plus grand détail, comment on peut réſoudre par mes principes une queſtion qui a été quelquefois agitée dans nos Aſſemblées, & qui ne fait qu'un cas particulier de la réflexion directe d'une ſphere à reſſort pouſſée contre un plan mobile. Sçavoir, comment une boule à reſſort venant à rencontrer une autre boule qui lui eſt égale & en repos, lui communique toute ſa vîteſſe, & demeure elle-même en repos ? Le fait n'eſt pas revoqué en doute ; la formule des vîteſſes reſtantes, & communiquées entre les corps à reſſort qui ſe choquent, le donne, & l'expérience n'y eſt pas contraire. Mais on demande comment ſe fait cette permutation de repos & de mouvement après le choc, pendant la durée du bandement ou du débandement du reſſort ? Les deux ſpheres marchent-elles d'abord enſemble ? & ſi elles marchent enſemble, où eſt la réſiſtance néceſſaire à bander le reſſort, & à produire le partage qui ſe fait de ſon action, ou de ſa force ſur les corps choquans ?

Je réponds conformément à la théorie de l'Article IV. &

à l'explication de la feconde demande, *Art. III.* dont je fuppofe qu'on faffe la lecture en cet endroit. 1°. Que la boule en repos réfifte d'abord à celle qui vient la choquer, & donne le temps au reffort de fe bander avec toute la force de la choquante, comme fi la premiere étoit tout-à-fait inébranlable, ou à une quantité infiniment petite près. 2°. Que dans l'inftant où finit la compreffion & où commence la reftitution du reffort, les deux boules font dans le cas des corps infiniment durs, & tendent ou commencent à aller d'une vîteffe commune, égale à la quantité de mouvement divifée par la fomme des maffes ; ce qui donne ici $\frac{1}{2}$ de la vîteffe de la choquante. 3°. Que le reffort venant à fe débander avec toute fa force, il la diftribue également de part & d'autre, parceque les deux maffes font égales. Mais la choquée qui avoit $\frac{1}{2}$ de vîteffe en avant, reçoit encore $\frac{1}{2}$ de vîteffe vers le même côté : donc elle ira avec 1 de vîteffe : & la choquante qui avoit de même $\frac{1}{2}$ de viteffe, & dans le même fens, reçoit $\frac{1}{2}$ de vîteffe vers le côté oppofé, dont fa moitié de vîteffe en avant fera détruite, & la boule demeurera en repos, ainfi que le donne la formule.

Car fi l'on fait attention aux circonftances que je viens de décrire, & à la liaifon qu'elles ont entr'elles, & avec le fait qu'il s'agit d'expliquer, on verra qu'il eft impoffible, felon les principes de mouvement les plus reconnus, qu'il y en ait aucune qui manque, fans que le fait ne ceffe d'être tel qu'on le fuppofe. Par exemple, il eft impoffible, dans toute autre hypothefe de tendances, de viteffes, ou de repos des deux boules à l'inftant de l'explofion de leur reffort, & de la diftribution égale de fa force fur deux maffes égales, il eft impoffible, dis-je, qu'il fe faffe un échange parfait de repos & de mouvement. Il eft impoffible que la quantité des vîteffes diftribuées de part & d'autre foit telle, fi le reffort n'a été bandé avec toute la force de la boule en mouvement avant le choc ; comme réciproquement il eft impoffible que ce bandement foit arrivé fans une compreffion, & conféquemment fans une réfiftance égale à cette force.

Il ne refte donc qu'à trouver d'où vient la réfiftance de la

boule en repos dans l'inſtant du choc, & pendant la durée peut-être inſenſible, quoique finie, de ſa compreſſion? Mais on ſçait que les corps ne ſçauroient être tirés de leur repos qu'en un certain temps, & avec une certaine force, qui ſuppoſe de leur part une réſiſtance à être mûs. Quelle que ſoit la cauſe de cette réſiſtance, ce n'eſt pas ici le lieu de la chercher; elle exiſte, & j'oſe dire que ſans elle les loix de la communication des mouvemens par le choc des corps à raiſon de leurs maſſes, ſeroient inintelligibles. L'air ambiant réſiſte auſſi, & d'autant plus que le mouvement imprimé par le choc eſt plus ſubit, il faut donc concevoir que le reſſort des deux boules eſt bandé avant que la maſſe totale de celle qui étoit en repos ait cédé au mouvement de celle qui vient la frapper. L'expérience d'un bâton ſoûtenu par ſes extrémités ſur deux verres, & rompu par le coup qu'on donne ſoudainement ſur ſon milieu, eſt un exemple ſenſible de ce que je viens de dire. On y peut ajoûter, s'il eſt néceſſaire, celui qui eſt rapporté par M. *Mariote*, dans ſon *Traité de la Percuſſion*, *prop.* 27. Il eſt moins connu, mais encore plus déciſif ſur le phénomene dont il s'agit.

A l'égard du choc même de deux boules, dont l'une vient heurter l'autre qui eſt en repos; quelque ſoin que j'aye vû apporter, ou que j'aie apporté moi-même à l'exécuter, par le moyen des machines deſtinées à ces ſortes d'expériences, je n'ai jamais vû cet arrêt parfait de la boule chcquante, & l'on n'en doit pas être ſurpris, puiſque, ſelon ce que nous venons de remarquer ci-deſſus, il faudroit, pour rendre l'expérience abſolument conforme au calcul, que la compreſſion & l'exploſion du reſſort ſe fiſſent dans un inſtant indiviſible, ce qui n'arrive pas aſſûrement. (*Dem.* 2. *Art. III.*) Or dans le temps qui y eſt employé, les deux boules ſont dans le cas du choc des corps mous, qui iroient avec une vîteſſe commune, dont il doit reſter quelque choſe à la boule choquante après le choc. Mais il eſt vrai que ce temps eſt ſi court, & le mouvement qui en réſulte ſi peu ſenſible, qu'on peut dire que l'expérience confirme parfaitement la ſpécu-

lation sur cette matiere, du moins aux yeux de ceux qui sçavent qu'on ne doit rien attendre d'absolument juste dans l'exécution méchanique de ces sortes de phénomenes. Un
Fig. 15. moyen cependant d'ôter à la boule choquante *C*, (*Fig. 15.*) tout mouvement sensible après le choc, c'est d'interposer plusieurs autres boules égales *A*, *B*, *D*, *E*, &c. qui se touchent en ligne droite, entr'elle & la boule à choquer *Q*. On sçait qu'il n'y a que cette derniere qui doive se mouvoir par le choc de la premiere *C*, contre la boule *A*; & que toutes les intermédiaires *A*, *B*, *D*, *E*, &c. peuvent être regardées comme un ressort placé entre les deux boules, *C*, *Q*. Mais ce ressort ayant une masse qui doit être mûe par la boule *C*, & d'autant plus grande, que les boules *A*, *B*, &c. sont en plus grand nombre, il est clair que l'instant de la vitesse commune où les deux boules *C*, *Q*, sont dans le cas des corps sans ressort, produira une vitesse d'autant plus petite sur le total, & il en restera d'autant moins à la boule *C* après le choc. Or comme elle est peu sensible, lorsque la boule *C* choque immédiatement la boule *Q*, elle ne le sera point du tout s'il y a cinq à six autres boules *A*, *B*, *D*, &c. entre deux. On peut imaginer de même dans les cas du choc immédiat des boules *C*, *Q*, un ressort intermédiaire, ou, si l'on veut, un duvet léger, flexible & élastique, qui constitue les parties extérieures des boules, à l'entour d'une espece de noyau infiniment dur placé à leur centre; & par ce moyen on concevra aisément que les deux boules ne sçauroient agir sensiblement l'une sur l'autre par le choc, que dans l'instant, presque indivisible de la derniere compression de ce duvet, où elles se trouvent dans le cas des corps inflexibles.

Dans la suite de ce Memoire je ferai abstraction du ressort du corps choqué ou du plan, comme j'ai fait dans la premiere partie, & par les mêmes raisons. Je ne dirai rien aussi du chemin que prend ce plan, & de ce qu'il devient après la rencontre de la sphere, cela étant désormais tout-à-fait inutile à mon sujet.

De la Réflexion oblique.

XXXIX. Nous appliquerons à la réflexion oblique contre

un plan mobile, tout ce qui a été dit de la réflexion oblique contre un plan inébranlable, *Art. V. VI. VIII. IX. &c.* en imaginant seulement que le ressort de la sphere (*Fig. 4.*) ne se bande pas avec toute la force x, analogue au côté CX du triangle CXY. Ce triangle représentera toujours par son hypoténuse Cy le mouvement total (y) de la sphere E, & par ses deux autres côtés XY, CX, les mouvemens, parallele (z) & perpendiculaire (x) au plan AL, qui sont censés composer le total avant le choc, & le décomposer après le choc. Car la compression du ressort est proportionnelle à la résistance, & à la réaction du corps choqué. Or la résistance infinie, & le plan inébranlable ne sçauroient produire qu'une compression $=x=CX$. Donc la résistance finie & le plan mobile produiront une compression moindre que x avant le choc, & égale, par exemple à $x-p$; p représentant (*Art. IV.*) la vîtesse ou la force communiquée au plan par le choc, & perdue par la sphere, selon la direction CX, perpendiculaire à ce plan. Et parce que la restitution du ressort est encore proportionnelle à sa compression, & à la résistance actuelle qu'il rencontre en se rétablissant, il est clair que la force de l'explosion sera moindre que x, & égale de même à $x-p$, dans le cas du rétablissement parfait. Ce qui revient à la supposition du plan inébranlable supprimé dans des instans donnés d'une compression ou d'une restitution actuellement croissantes, & par conséquent incompletes; comme il a été expliqué *Art. IV. & XI.* & qui représente parfaitement ce qui doit arriver au ressort de la sphere E, lorsqu'elle vient heurter un plan AL, qui fait partie de la surface d'un corps fini. Fig 4.

XL. *Corol.* 17. D'où il suit, 1°. *Que depuis le premier instant de la compression jusqu'au commencement de la restitution du ressort, la sphere* E, *ou, ce qui est ici la même chose, son centre* C, *tendra successivement à s'échaper par toutes les directions intermédiaires possibles,* Cy, CM, &c. *toûjours plus inclinées au plan.*

2°. *Que depuis le premier instant de la restitution du ressort jusqu'à la fin, la sphere tendra successivement à s'éloigner du plan*

par toutes les directions intermédiaires possibles Cz, CN, &c. *toûjours moins inclinées au plan:* ainsi qu'il a été démontré du plan immobile & inébranlable dans les Articles V. & VI.

A l'égard de l'égalité constante des angles de réflexion & d'incidence, (*Art. VII.*) on voit bien qu'elle ne peut plus avoir lieu, puisqu'elle dépend absolument de l'égalité de rapport des forces composante & composée de la sphere, avant & après le choc, & qu'ici la force x est diminuée d'une quantité finie p, en conséquence de la mobilité du plan, & de la masse finie du corps choqué, de la surface duquel il fait-partie, tandis que la parallele z demeure la même. Cette égalité ne sçauroit donc s'y trouver qu'accidentellement, par le mouvement de la sphere autour de son propre centre, & selon la théorie des Articles XXI. XXII. *&c.* Mais c'est un cas particulier dont il n'est pas question présentement.

Le lieu géométrique (*Art. VIII. Fig. 5.*) de tous les rapports des puissances y, x, z, avec leurs changemens, pendant la compression & la restitution du ressort, mettra sous les yeux ce que nous venons de dire ici des tendances successives de la sphere, & de l'inégalité des angles d'incidence & de réflexion, en y appliquant ce que renferme l'hypothese du plan mobile.

XLI. Les formules qui ont été trouvées *Art. XI. XII. & XIII.* étant générales pour toutes les valeurs possibles des forces ou vitesses, x, z, diminuées ou augmentées d'une quantité arbitraire p ou r, par rapport à ce qu'elles étoient avant le choc, & pour tous les cas possibles de la suppression du plan, dans un instant quelconque pendant l'action du ressort, elles conviendront encore à l'hypothese du plan mobile, ou la renfermeront comme un cas particulier de la réflexion : car nous avons vû que cette hypothese s'explique parfaitement, par la supposition du plan ôté subitement, dans un instant quelconque de la compression, ou de la restitution du ressort. Ainsi les corollaires 2. & 7. (*Articles X. & XV.*) dont l'un est comme la base & le principe de ces formules, & l'autre comme le précis de toutes

toutes les vérités qu'on en peut déduire, doivent être rappellés, & appliqués à la théorie présente.

Usage des formules, par rapport à la puissance x.

XLII. Soient les trois formules générales, telles que les donne l'article XIII.

$$\Sigma = \frac{S \times \overline{z \pm r} \times y}{z\sqrt{yy \pm 2px + pp \pm 2rz + rr}}$$

$$pp \pm 2xp + \overline{1 - \frac{SS}{\Sigma\Sigma} \mp \frac{2SSr}{\Sigma\Sigma z} - \frac{SSrr}{\Sigma\Sigma zz}} \times yy = 0.$$
$$\pm 2rz$$
$$- rr$$

$$rr \pm 2zr + \frac{zzyy \times \overline{\Sigma\Sigma - SS}}{\Sigma\Sigma zz - SSyy} = 0$$

$$+ \frac{\Sigma\Sigma zz \times \overline{pp \pm 2xp}}{\Sigma\Sigma zz - SSyy}.$$

Comme je ne vais examiner d'abord que les cas de la variation de la force ou vîtesse x, par l'augmentation ou la diminution qui lui survient de la quantité p, en supposant que la vîtesse parallele au plan demeure constante, la troisieme de ces formules, $rr \pm 2zr$, *&c.* devient inutile, & les deux premieres se changent en

$$\Sigma = \frac{Sy}{\sqrt{yy \pm 2px + pp}},$$

$$pp \pm 2xp + yy \times \overline{1 - \frac{SS}{\Sigma\Sigma}} = 0.$$

Ou, mettant à la place de y, sa valeur $\sqrt{xx + zz}$.

$$\Sigma = \frac{s\sqrt{xx + zz}}{\sqrt{xx \pm 2px + pp + zz}},$$

$$pp \pm 2xp + \overline{xx + zz} \times \overline{1 - \frac{SS}{\Sigma\Sigma}} = 0.$$

XLIII. Soit dans la fig. 4. qui a servi à trouver ces deux formules, imaginé un plan idéal, *I L*, qui passe par le centre de la sphere dans l'instant du choc, qui soit parallele au plan réel ou physique, *A L*, & qui demeure immobile, tandis que celui-ci, ou plutôt le solide de la surface duquel il fait partie, est chassé de la place *A L*, par le choc, & continue de se mouvoir sur la direction *C X*. Car il n'est question ici que du chemin qui suit le centre, *C*, de la sphere. On la peut même imaginer toute réunie à ce centre, & supposer qu'il ne reste de son volume que la trace d'un de ses grands cercles *T R X*, pour servir de commune mesure aux sinus des angles qui font entr'elles, & avec le plan, les différentes tendances qu'elle peut acquérir par le choc : ainsi qu'on le voit représenté dans la figure 16.

XLIV. Si l'on cherche maintenant quelles doivent être ces tendances par les différentes valeurs qu'on peut assigner à la quantité p de la premiere formule, on trouvera,

1°. Que $p = 0$, donne $\Sigma = S$.

2°. Que $p = \pm x$, ($+x$ lorsque p est positive dans la formule, & $-x$, lorsqu'elle est négative) donne (pour $p = +x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{4xx + zz}$ où $\Sigma < S$. & (pour $p = -x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{zz} :: y . z :: CY . XY$, où $\Sigma > S$, & égal au sinus total, Cu, ou CR. Fig. 16.

3°. Que $p = \pm 2x$ donne (pour $p = +2x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{9xx + zz}$. où $\Sigma < S$. & (pour $p = -2x$) $\Sigma = S$.

4°. Que $p = \pm \frac{n}{m} x$, la fraction $\frac{n}{m}$ étant tantôt plus

petite, tantôt plus grande que l'unité, donne divers rapports entre le finus Σ, & S, felon deux hypothefes : fçavoir dans la premiere, où l'on fuppofera $m > n$, (pour $p = + \frac{n}{m} x$)

$\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{xx \times \overline{1 + \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm}} + zz}$

ou $\Sigma < S$: mais > 0, & pour $p = - \frac{n}{m} x$)

$\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{xx \times \overline{1 - \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm}} + zz}$,

ou $\Sigma > S$, mais plus petit que le finus total Cu, parce que la grandeur finie $\frac{2n}{m} > \frac{nn}{mm}$, par *hyp.* & par conféquent $1 - \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm} < 1$, & > 0.

Dans la feconde hypothefe ; fçavoir, $\frac{n}{m} > 1$ (& dans le cas de $p = + \frac{n}{m} x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{xx \times \overline{1 + \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm}} + zz}$. ou $\Sigma < S$: mais > 0, tant que la quantité $\frac{n}{m}$ demeurera finie ; car pour rendre $\Sigma = 0$, il faudroit $p = \infty$. Enfin (dans le cas de $p = - \frac{n}{m} x$) $\Sigma . S :: \sqrt{xx + zz} . \sqrt{xx \times \overline{1 - \frac{2n}{m} + \frac{nn}{mm}} + zz}$. ou $\Sigma > S > DG < DC$ finus total.

COROLLAIRES.

XLV. *Corol.* 18. Les deux valeurs, de $p = 0$, & $p = - 2x$, donnent également $\Sigma = S$; mais en fens contraire, par rapport au deffus, ou au deffous du plan IL.

Car $p = 0$, ou $x \pm 0 = x$, fuppofe que le plan mobile tient à un corps infiniment petit, ou dont la maffe eft 0, qui ne réfifte point du tout au choc de la fphere, & qui ne lui fait rien perdre de fon mouvement. C'eft pourquoi après avoir rencontré le plan IL, en C, elle doit

continuer de se mouvoir sur la même direction DC, c'est-à-dire, sur la *ligne d'incidence*, prolongée au-dessous du plan vers Y, comme si elle n'avoit rien trouvé sur son chemin; & partant us, $(\Sigma) = DG\ (S)$.

Au contraire, $p = -2x$, ou $x - 2x = -x$ naît de la supposition d'un plan qui tient à un corps d'une masse infinie, & qui par conséquent doit être regardé physiquement comme inébranlable, & d'une résistance infinie. Car $-x$ est la même force que $+x$, mais seulement en sens contraire. D'où il suit que $p = -2x$, fait recouvrer à la sphere par son ressort après le choc, autant de mouvement en arriere, de C vers G, qu'elle en avoit en avant, de G vers C, avant le choc, & qu'elle doit se réfléchir par un angle, VCI, égal à celui d'incidence, DCL, dont le sinus d'inclinaison $\Sigma = S$. (*Art. VII.*)

Ainsi l'on voit que les deux cas $p = 0$, & $p = -2x$ représentent des cas extrêmes dans la nature, la résistance nulle, & la résistance infinie, & que le résultat algébrique de la formule l'indique parfaitement, quoiqu'en apparence l'expression $-2x$ ne dénote que le fini.

XLVI. *Corol.* 19. Il suit encore de $\Sigma = S$, dans $p = 0$, que *la sphere ne sçauroit changer de direction tant qu'elle continuera de se mouvoir dans le même milieu, ou, ce qui est ici tout-à-fait synonime, dans des milieux de même résistance*: & par conséquent, *lorsque les milieux seront différens, le changement de direction n'arrivera qu'au moment du passage de l'un à l'autre, & à la rencontre de la surface ou du plan qui les sépare.* Car après que la sphere a une fois pénétré & percé ce plan, elle n'a plus à se mouvoir que dans le même milieu; elle y trouvera toujours de tous côtés la même résistance.

XLVII. *Remarque 6.* On voit donc que l'effet dont il s'agit, peut être également représenté par ces trois suppositions; sçavoir, d'un *plan mobile* rencontré obliquement par la sphere; d'un *plan pénétrable*, tel que seroit une lame de verre, ou une toile bien tendue; & enfin d'un *nouveau milieu*, d'un fluide, par exemple, plus ou moins facile à divi-

ser, qui est véritablement le sujet de ce qu'on appelle *réfraction.* Je ne ferai donc point difficulté de substituer l'une de ces idées à l'autre, lorsque je croirai par là pouvoir me rendre plus clair dans mes explications.

DÉFINITION.

1. *Je me conformerai aussi à l'usage à l'égard du mot de* réfraction, *& j'appellerai ainsi désormais toutes les reflexions qui se feront au-dessous du plan* IL, *dans l'angle droit* ICX, *réservant le nom de* réflexions *en particulier pour toutes celles qui se feront au-dessus, dans l'angle droit* ICT.

2. *Du reste pour garder l'uniformité dont j'ai parlé dans les N°. 2. & 3. des définitions de la premiere Partie de ces recherches* (Art. III. pag. 13.) *& par les mêmes raisons, j'appellerai* angle d'inclinaison de la réfraction, *ou* angle du complément, *ou* angle rompu, *celui que fait la* ligne de réfraction, CM, *ou* CF, *avec la* perpendiculaire *ou l'*axe de réfraction CX, *ainsi qu'en usent de célebres Auteurs tant anciens que modernes.*

3. L'angle de réfraction *proprement dit, sera encore, selon ce même usage, celui que forme le* rayon rompu, *ou la* ligne de réfraction, *telle que* CM, *ou* CF, *avec la* ligne *ou* rayon d'incidence, DCY, &c.

XLVIII. *Corol.* 20. $p \left\{ \begin{array}{l} = 0. \\ = -2x. \end{array} \right.$ donnant les deux cas extrêmes (*Corol.* 18.) $p = -x$ doit donner le cas moyen arithmétique entre ces deux extrêmes, puisque $\div 0. - x. - 2x.$ Et c'est aussi ce qui résulte de $\Sigma = Cu = CR$ sinus total, qui vient par l'introduction de $p = -x$ dans la formule. D'où il suit que la sphere ayant rencontré le plan réfléchissant en *C*, continuera de se mouvoir sur l'horisontale *CI*, ou rasera le plan *IL*, dont la direction est moyenne entre celle de la réflexion parfaite *CV*, & celle de la réflexion nulle, *CY* (en prenant encore ici le terme de réflexion généralement) ou, si l'on veut, il n'y aura ni *réflexion*, ni *réfraction*, puisque, selon la définition

ci-dessus, la réflexion doit se faire dans l'angle *ICT*, & la réfraction dans l'angle *ICX*, & que la ligne *CI* n'est ni dans l'un ni dans l'autre, puisqu'elle en fait la distinction. La masse du plan mobile que ce cas suppose, est encore moyenne entre les deux extrèmes, par rapport à la masse du corps choquant rompu ou réfléchi. Car $p = 0$ est, comme nous avons vû, l'effet d'une masse infiniment plus petite que celle de la sphere, $p = -2x$, au contraire, l'effet d'une masse infiniment plus grande, & $p = -x$ l'effet d'une masse égale, qui tient, comme la sphere même, un milieu entre l'infini de part & d'autre, qui s'éloigne également de sa valeur. Ceci est évident encore par la théorie de l'art. XXXVIII. de deux corps égaux, dont l'un est en repos, & où le choquant va prendre la place du choqué. Car quoique la sphere, qui est poussée obliquement contre le plan *IL*, continue de se mouvoir sur *CI*, avec la vîtesse z, qui n'a reçû aucune diminution par le choc, elle est néanmoins censée en repos, eu égard au plan, & à la partie de mouvement (x) qu'elle avoit de ce côté, & qui est détruit par la supposition de $p = -x$.

Donc en général, *toutes les fois que l'obliquité de l'incidence sera telle, que le sinus de son angle avec le plan, ou sa proportionnelle*, CX, (x) *sera égale à la résistance du plan, la réflexion & la réfraction seront nulles.*

XLIX. *Corol.* 21. On doit remarquer en général, 1°. que toutes les valeurs positives de p, depuis 0, jusqu'à l'infini, introduites dans la formule, donnent la réfraction, & la donnent au-dessous du rayon incident *CY*, entre ce rayon, & la perpendiculaire *CX*, dans l'angle *YCX*; telle, par exemple, que *CF*, ensorte que Σ est toujours plus petit que *S*. Ainsi

$$p = \left\{ \begin{array}{l} +x \\ +2x \\ +\frac{n}{m}x \end{array} \right\} \text{donne } \Sigma < S.$$

Car c'est le cas où le plan mobile choqué, ne seroit pas

ſeulement ſans réſiſtance, mais où il donneroit de plus à la ſphere un nouveau degré de vîteſſe perpendiculaire ; ce que l'on peut imaginer, en ſuppoſant que le plan même frapperoit la ſphere vers CX, dans l'inſtant de la rencontre. Mais nous l'expliquerons bien-tôt par l'idée immédiate d'un nouveau milieu & d'un fluide.

2°. Que toutes les valeurs négatives de p, moindres que x ou 1 ; ſçavoir, $-\frac{n}{m}x$, ou $-\frac{n}{m} < -1$, donnent encore la réfraction : mais au-deſſus de CY, & entre cette ligne, & l'horiſontale CI, dans l'angle YCZ ; comme, par exemple, CM ; enſorte que Σ eſt toûjours plus grand que S, en croiſſant depuis le ſinus d'inclinaiſon de l'incidence, us, juſqu'au ſinus total, CR. Car c'eſt l'effet d'une réſiſtance du plan mobile, telle cependant qu'il reſte encore à la ſphere un peu de mouvement vers X, par exemple, une quantité CP, & qu'après l'inſtant du choc, $x - p . x :: CP . CX$.

3°. Que toutes les valeurs négatives de p, depuis $1x$ juſqu'à $2x$; ſçavoir, $p = -\frac{n}{m}x$ $(\frac{n}{m} > 1 < 2)$ juſqu'à $-2x$, donnent la réflexion, & la donnent au-deſſus de l'horiſontale CI, entr'elle & la ligne de réflexion parfaite, CV, dans l'angle ICV ; telle, par exemple, que CN. De maniere que Σ eſt toûjours plus grand que S, en décroiſſant depuis le ſinus total CR, juſqu'au ſinus d'inclinaiſon de l'incidence, $Gd = GD = us = S$. Car la réfraction étant, pour ainſi dire, à ſa fin, lorſque $p = -x$, ou $x - p = 0$; (*art. XLVIII.*) & la réflexion à ſon commencement ; & ce cas réſultant d'une maſſe ou d'une réſiſtance du plan $= x$, qui donne l'horiſontale CZ, comme celui de la réflexion parfaite, réſulte d'une maſſe ou d'une réſiſtance $= \infty$, qui donne la ligne CV, ou l'angle $VCZ = DCL$; il eſt clair qu'il n'y peut avoir que des cas moyens entre deux, & par conſéquent, &c.

4°. Enfin, que toutes les valeurs négatives de p, depuis $2x$ juſqu'à ∞x ; ſçavoir, $p = -\frac{n}{m}x$ $(\frac{n}{m} > 2)$ juſqu'à ∞,

donnent encore la réflexion : mais au-delà de la ligne CV, entr'elle, & l'axe ou perpendiculaire TC, dans l'angle VCT, telle, par exemple, que Cv, ensorte que Σ est toûjours plus petit que S, en décroissant depuis le sinus d'incidence Gd, jusqu'à o.

L. *Remarque* 7. Comme il n'y a rien au-dessus d'une masse inébranlable, ou d'une résistance infinie, dont résulte $p = -2x$; il faut nécessairement supposer dans le dernier cas, quelque chose de différent, & une masse, ou une résistance plus qu'infinie; sçavoir une impulsion actuelle du plan du côté opposé au mouvement relatif de la sphere vers ce plan, dans l'instant du choc; ce qui arriveroit, si au lieu de le supposer en repos, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, & comme nous continuerons de le supposer dans la suite, on imaginoit qu'il se mût sur la direction XT, de X vers T. Ce qui donne une hypothese correspondante, quant à l'effet, à celle du tournoyement sur le centre, que nous avons admise dans la premiere Partie (*art. XXI.*) excepté les cas particuliers, où la sphere se réfléchiroit dans l'angle droit TCL, & pour lesquels le mouvement même du plan seroit insuffisant.

LI. *Corol.* 22. On peut déduire de l'article XLIX. qu'*il y a plus de cas pour la réfraction que pour la réflexion, & que par là, toutes choses d'ailleurs égales, la réfraction doit être plus fréquente dans la nature que la réflexion.*

Car il est évident que le nombre infini de valeurs assignables positives de p, est égal au nombre infini de ses valeurs assignables négatives. Mais nous avons vû dans l'article cité, N°. 1. que toutes les valeurs positives donnent la réfraction, & N°. 2. qu'une infinité de négatives renfermées entre de certaines limites, la donnent encore, tandis qu'il n'y a que les négatives au-delà (*N°. 3.*) qui donnent la réflexion. Donc, &c.

LII. *Remarque* 8. Les remarques 2. 3. & 4. (*art. XVII. XVIII. & XIX.*) de la premiere Partie, sur la maniere dont se soûtiennent les forces, pendant l'action du ressort & le roulement de la sphere, & sur la courbe que décrit son centre pendant ce même temps, doivent être appliquées aux cas du

plan

plan mobile avec les restrictions, & les changemens qu'exige cette hypothese. Par exemple, on voit bien que la résistance du plan n'étant plus infinie, la compression des fibres de la sphere sera moindre, & plus petite (*Fig.* 10.) que $OR = AP$, & par conséquent la courbe qui en résulte, moins courbe, pour ainsi dire, & plus allongée ; & d'autant plus, que la derniere direction ou tangente *gt*, sera plus approchante de la premiere direction ou ligne d'incidence *GT*; c'est-à-dire, selon que le plan *LN* résistera moins. Mais un des plus grands changemens que la mobilité du plan apporte à cette courbe, c'est que sa premiere branche, celle qui répond au temps de la compression du ressort, ne sçauroit être semblable à sa seconde branche, qui répond au temps de la restitution, & que celle-ci sera plus allongée & moins courbe que la premiere. Car dans les premiers instans du choc & de la rencontre du corps réfléchissant, sa résistance est presque égale à celle d'un corps inébranlable, parce qu'il n'a pas eu encore le temps de ceder, & qu'il n'a acquis que très-peu de mouvement (*Art. XXXVIII.*) Ainsi toute la compression des fibres de la sphere doit porter sur le centre *M*, pour le faire descendre vers le plan, tandis que le point touchant *R* demeure presque immobile. Mais à mesure que le mouvement communiqué au plan augmente ; & lorsqu'enfin il est parvenu à une certaine vîtesse finie, au temps de la restitution du ressort, les fibres *MR* ou *AQ*, se déployent non-seulement vers *A*, mais aussi vers *Q*, & d'autant plus vers *Q*, que le plan *LN* cede davantage à leur explosion. Or le débandement qui se fait en ce sens, est autant d'ôté à l'espace qu'auroit eu à parcourir le centre vers le côté opposé, *M*, s'il avoit été chargé seul de toute l'extension & de tout le relevement des fibrets comprimées. Donc la courbure de la seconde branche étant rapportée à un plan idéal, qui passe par le point de rencontre dans le premier instant du choc, sera moindre que celle de la premiere. Par la même raison il est clair que la courbure de cette ligne ira continuellement en décroissant depuis son origine jusqu'à sa fin. C'est ce que nous allons

encore voir, en examinant cette matiere plus immédiatement par rapport à la réfraction, & sur l'ypothese du fluide même qui en peut être le sujet.

Fig. 17. LIII. Soient (*Fig.* 17.) deux milieux ou deux fluides *DFL*, *OFL*, séparés par le plan ou surface commune *FL*, & tels par rapport au mouvement de la sphere *TRXB*, & à la vîtesse avec laquelle elle se meut dans chacun d'eux, que leurs résistances soient entr'elles comme les lignes *AM*, *EN*, en sorte que $AM < EN$.

Soit maintenant la sphere *TRXB*, poussée obliquement contre la surface *FL*, selon la direction *DY*, qui fait avec ce plan l'angle d'incidence *DYL*, lequel a pour complément ou inclinaison $DCT = YCX$.

Il est évident par l'hypothese du nouveau milieu *FOL*, plus résistant que *FDL*, que le mouvement de la sphere sera plus retardé vers *O*, que vers *F*, & d'autant plus qu'elle s'enfoncera davantage, ou présentera de plus grands segmens à ce milieu. D'où il suit qu'elle décrira un chemin curviligne. Car en la supposant, par exemple, enfoncée dans *FLO*, jusqu'en *IH*, le segment *IXH* aura bien plus de peine à diviser le nouveau milieu de *C* vers *O*, que sa moitié *IX* de *X* vers *F*, non-seulement parce que tout le segment est plus grand que sa moitié, mais encore parce que cette moitié est posée plus obliquement par rapport au mouvement parallele vers *F*. Mais il est clair encore que la courbe décrite par la sphere ou par son centre, doit toûjours diminuer de courbure. Car à mesure que la sphere avance dans *FLO*, & que le segment plongé devient plus grand, ses parties de *I* vers *R*, deviennent en même-temps plus obliques au mouvement perpendiculaire, & moins obliques au mouvement parallele. Donc ce que le mouvement perpendiculaire acquiert de retardement sur le parallele, ira toûjours en diminuant, & par conséquent la courbe qui résulte de leur composition deviendra toûjours moins courbe. Et comme cela continue ainsi jusqu'à l'immersion de la moitié *rxb*, il suit que toute la branche *CK* décrite par le centre

pendant ce temps, diminuera toûjours de courbure de *C* vers *K*. Mais en cet état, je veux dire la ſphere étant en *trxb*, & ſon centre *K* ſur la ſurface *FL*; je prends garde que la réſiſtance perpendiculaire ne ſçauroit plus augmenter, puiſque la partie antérieure *rxb*, ſur laquelle ſe fait cette réſiſtance, acheve l'hémiſphere, que la partie oppoſée, ou l'hémiſphere poſtérieur n'y eſt pour rien, & au contraire, que la partie laterale x r, qui ſoûtient la réſiſtance parallele, & qui n'eſt parvenue encore qu'à être moitié de la perpendiculaire, augmente toûjours, & cela juſqu'à ce que la ſphere ſoit entierement ſubmergée dans le nouveau milieu *O*, en $\vartheta\rho\xi\beta$, & qu'elle préſente parallelement à la ſurface *FL* de ce milieu tout un hémiſphere $\vartheta\rho\xi$. Donc la réſiſtance perpendiculaire demeurant conſtante depuis le moment *trxb*, la parallele augmente encore juſqu'en $\vartheta\rho\xi\beta$, où elle lui devient égale. Donc le chemin du centre ſera ſur une courbe, dont la courbure ira encore en diminuant de *K* juſqu'en *c*. Ce qui fait toute la courbe décrite par la ſphere dans ſon changement de milieu; puiſque du point *c*, elle commence à ſe mouvoir ſur la droite *c G*, tangente en ce point, pour ne plus changer de direction dans la ſuite, le rapport de ſes mouvemens, parallele & perpendiculaire, ne pouvant plus varier. *Corol.* 19. *Art. LXVI.*

Si l'on rapporte la courbe *CKc* à l'axe *CX* prolongé vers *O*, qu'on prenne ſur cet axe les coupées *CP* (x) les appliquées *PS* (y) paralleles à *FL*, & qu'on ſuppoſe les dx conſtans, on aura les dy variables & croiſſans, & les ddy décroiſſans juſqu'à o; c'eſt-à-dire, juſqu'au point *c*, où le mobile commence à ſe mouvoir ſur une droite *c G*. Ou, conformément à l'article (*XIX.*) de la premiere partie auquel celui-ci répond, faiſant les dy conſtans, on aura les dx, & les ddx variables, & tous deux décroiſſans, juſqu'au point *c*, après lequel le rapport des dx aux dy ne change plus. Les dy exprimant donc les augmentations inſtantanées égales de la réſiſtance parallele, les dx exprimeront les augmentations inſtantanées décroiſſantes de la réſiſtance perpendiculaire, &

les ddx les excès de ces augmentations ſur celles de la réſiſtance parallele. Et ſi l'on prend encore l'expreſſion (dt) des inſtans, les dt ſeront variables dans les deux ſuppoſitions précédentes de dx ou dy conſtant, ſçavoir, croiſſans dans le premier cas, & décroiſſans dans le ſecond: mais les ddt iront toûjours en diminuant dans l'un & dans l'autre cas, & les dt ne pourront être pris pour conſtans, ſans que dx & dy ne ſoient variables.

Il eſt très-important de faire attention à ce changement continuel de rapport entre la réſiſtance perpendiculaire & la parallele, depuis l'inſtant où la ſphere a touché la ſurface du nouveau milieu, juſqu'à celui où elle s'y trouve entierement plongée; pour ne pas tomber dans l'erreur que le chemin du centre C, ne commence à être curviligne, que lorſque la moitié de la ſphere eſt plongée dans le nouveau milieu comme en $trxb$. Car quoique juſqu'à cet inſtant la ſphere ait préſenté parallelement au fluide la moitié du ſegment qu'elle lui préſentoit perpendiculairement, ce qui ſemble donner un rapport conſtant d'où doit réſulter la ligne droite, l'obliquité & la poſition différente & changeante des parties de ce ſegment, eu égard aux deux réſiſtances, produit entre elles une variation continuelle de rapport, d'où doit naître la courbe CK: ainſi qu'il a été remarqué ci-deſſus.

Du reſte il eſt clair, 1°. Que la courbe CKc aura toûjours ſa convexité tournée vers le point O, vers le milieu de la plus grande réſiſtance. De ſorte que ſi l'on éleve deux perpendiculaires CV, cZ, l'une du point C, où commence la courbe, & ſur le côté infiniment petit qui ſe confond avec la ligne d'incidence tangente en ce point, l'autre du point c, où la courbe finit, & ſur le côté infiniment petit qui ſe confond avec la ligne de réfraction, tangente en ce point, elles concourront en V, & feront entr'elles un angle CVc, qui ſera égal à l'angle de réfraction, & dont le complément CVZ à deux droits, du côté du milieu moins réſiſtant, renfermera la développée de la courbe CKc.

2°. Que l'angle de réfraction GcQ, eſt la quantité dont

la réfraction cG, s'écarte plus de la perpendiculaire TO, que l'incidence DC, dans le cas donné du paſſage d'un milieu moins difficile à pénétrer dans un plus difficile, & que le ſinus ni, de l'angle rompu $Gc\xi$ (Σ), eſt au ſinus $v\sigma = us$, de l'inclinaiſon d'incidence (S), en raiſon réciproque des forces de la ſphere avant & après le paſſage, ou en raiſon directe des réſiſtances, c'eſt-à-dire (*hyp.*) comme AM eſt à EN. Car *le détour* GcQ *de la ſphere, par rapport au chemin* DC, *qu'elle tenoit avant que d'entrer dans le nouveau milieu, eſt la ſomme de tous les détours infiniment petits qu'elle a ſoufferts pendant ſon entrée, comme la réſiſtance actuelle qu'elle éprouve à ſe mouvoir dans ce milieu, lorſqu'elle y eſt tout-à-fait plongée, eſt la ſomme de la réſiſtance initiale, & de tous les accroiſſemens ſucceſſifs qu'elle a éprouvés en s'y plongeant.* Mais les réſiſtances totales avant & après le paſſage ou le choc, ſont entr'elles réciproquement comme les forces avant & après le choc, & les forces réciproquement comme les ſinus Σ & S, (*Coroll.* 2. & 7. *Art. X. & XV.*) Donc ces ſinus ($v\sigma$, ni) ſont entre eux comme les lignes AM, EN.

3°. Enfin l'inverſe du cas précédent eſt évidente, c'eſt-à-dire, que ſi au lieu de ſuppoſer, comme nous avons fait dans cet exemple, que la ſphere quitte un milieu de moindre réſiſtance, pour entrer dans un milieu de plus grande réſiſtance, on ſuppoſe le contraire, tout le contraire auſſi arrivera. La courbure du chemin décrit par le centre, ſera concave vers le nouveau milieu, la ligne de réfraction ſe rapprochera de la perpendiculaire, & le rapport des ſinus des inclinaiſons de l'incidence & de la réfraction, ſeront en raiſon renverſée des précédens, mais toûjours entr'eux comme les lignes AM, EN, proportionnelles aux réſiſtances; & *la ſphere paſſera exactement par le même chemin en retournant qu'en allant.* Pour le démontrer ſur la même figure, il n'y a qu'à ſuppoſer que la ſphere va du milieu OFL, dans le milieu DFL, que Gc eſt la ligne d'incidence ou de l'immerſion, CD la ligne de réfraction ou de l'émerſion, &c.

LIV. *Remarque 9.* S'il n'y a pas lieu de croire que les

parties solides & grossieres des corps soient le sujet immédiat de la réflexion de la lumiere, (*Rem.* 5. *Art. XXXIV. premiere Part.*) * encore moins devra-t-on présumer que ces mêmes parties soient la cause de sa réfraction. M. *Newton* & le P. *Malebranche* le reconnoissent, & admettent l'un & l'autre, quoique sous des aspects un peu différens, un fluide subtil qui remplit les pores, & les interstices des parties solides de tous les corps. Quel que soit ce fluide, ce milieu sujet propre de la réfraction de la lumiere, ou plûtôt ces différens milieux en divers corps transparens appellés solides, ou fluides, je leur applique tout ce qui vient d'être remarqué sur les milieux *OFL*, *DFL*, par rapport au passage de la sphere *TRXB*, de l'un dans l'autre. Et cette sphere je la prends pour un globule de lumiere transporté actuellement du corps lumineux jusqu'en *FL*, conformément à l'idée de M. *Newton*, ou pour un des petits tourbillons du P. *Malebranche*, qui fait effort contre une file de ses semblables, & qui les pousse vers *ILO*, par les *vibrations de pression*. Car comme nous l'avons déja remarqué, (*Art. XXXIV.*) cela revient au même. Mais nous retiendrons encore ici, & dans la suite de ces recherches, l'hypothese de l'*émission* actuelle des globules lumineux, comme plus commode pour la clarté des démonstrations, parce qu'elle réveille dans l'imagination du Lecteur ce qui se passe tous les jours sous ses yeux.

* Le P. Fabri *l'avoit déja pensé en* 1667. *Synops. Opt. pr.* 25. *V.* Newt. *Opt. l.* 2. *part.* 3. *p.* 8. *Et* Malebr. *Rech. de la Ver. Eclairc. sur la Lum. Edit. in* 4°. 1712. *t.* 2. *p.* 352.

LV. *Corol.* 23. Il suit des articles précédens, qu'*il y aura toûjours réfraction dans le passage du milieu plus résistant* (FOL) *au moins résistant* (FLD), *& dans le cas où le mobile, la sphere, ou la lumiere*, car c'est ici la même chose, *s'approchera de la perpendiculaire* (TO) *en changeant de milieu. Et au contraire*, que *dans le passage du milieu moins résistant au plus résistant, il y aura réfraction seulement depuis l'incidence perpendiculaire, jusqu'à celle dont l'obliquité est telle exclusivement que la quantité du mouvement perpendiculaire* (x) *devient égale à la résistance du nouveau milieu sur le premier; après quoi la réfraction manque tout à coup, & il n'y a que réflexion depuis cette obliquité jusqu'au parallélisme.* Ce qui est évident, & dé-

montré par les Corol. 20. & 21. (*Art. XLVIII. & XLIX.*)

LVI. *Rem.* 10. On voit auſſi par le détail du paſſage de la ſphere dans un nouveau milieu (*Art. LIII.*) que lorſqu'elle va du milieu moins réſiſtant au plus réſiſtant, le chemin du centre *CKc* devient toûjours de plus en plus oblique à la ſurface *FL*, & approche d'elle & du parallélisme, juſqu'à ce que toute la ſphere $\vartheta \rho \xi \beta$, ſoit plongée dans le nouveau milieu *FOL*; après quoi le chemin *cG* demeure rectiligne (*Art. XLVI.*) & le ſinus *n i* de ſon inclinaiſon eſt à celui de l'inclinaiſon d'incidence $v\sigma$ ou *us*, comme la réſiſtance de *FOL*, à celle de *FDL*. Mais ſi par la deſtruction de la puiſſance *x* (*p* étant $= - x$, qui eſt le cas de la réſiſtance égale à l'effort perpendiculaire) *n i* devient $\rho c = r K$ confondu alors avec la tangente en *K*, la ſphere continuera ſon chemin ſur *Kr* prolongée, la même que *LF*. Car dans cette hypotheſe la ſphere étant en *trxb*, & ſon centre en *K* ſur *LF*, elle a éprouvé une réſiſtance exactement $= x$, & toute celle qu'elle peut éprouver en ce ſens, à cauſe de l'immerſion de tout l'hémiſphere *rxb*. D'où il ſuit qu'elle doit ſe plonger juſques-là, & non davantage. Ce qui donne phyſiquement le cas moyen entre la réfraction & la réflexion trouvé algébriquement par la formule, *Art. XLVIII.* Que ſi la réſiſtance devenoit moindre ou plus grande que *x*, d'une quantité infiniment petite, il eſt clair que dans le premier cas la ſphere s'enfonceroit totalement dans le nouveau milieu, & y ſuivroit une direction infiniment proche de ϑF ou *LF*, & au-deſſous ; & que dans le ſecond ſon hémiſphere *r x b* ne ſe plongeroit tout entier dans *LOF* qu'à une quantité infiniment petite près, que ſon centre *K* ſuivroit une direction au-deſſus, & infiniment proche de *KF* ou *LF*, & que la ſphere ne ceſſeroit de toucher *LOF* qu'à une diſtance infinie du point de rencontre *X*. Nous faiſons abſtraction des obſtacles accidentels, de la peſanteur, du fluide qui s'amonceleroit devant *r*, &c.

LVII. *Corol.* 24. Il eſt encore évident par la même théorie, & dans les cas d'un excès fini quelconque de la réſiſtance ſur l'effort perpendiculaire *x*, que *la ſphere doit demeurer d'autant plus de temps à ſe dégager du nouveau milieu* FOL, *& par*

conséquent le chemin CK *du centre être d'autant plus long, que l'excès de la résistance sera plus petit.* Car c'est un cas moyen entre cet excès = 0, où l'hémisphere rxb ne sort plus du milieu *FOL* après y être entré, & de cet excès = ∞ où il n'y entre point du tout, ce dernier étant le cas de la réflexion parfaite, & du corps solide & inébranlable.

LVIII. *Rem.* 11. Il n'est donc pas étonnant que la lumiere ne se rompe point du tout, en frappant avec une certaine inclinaison la surface des corps diaphanes, dans lesquels elle ne sçauroit entrer sans s'écarter de la perpendiculaire, & qu'au contraire elle se rompe toûjours après avoir frappé, sous quelque inclinaison que ce puisse être, la surface de ceux où elle s'en approche en y entrant. C'est ce que j'avois espéré rendre sensible, & que j'avois promis dans mon Memoire de 1719, *sur la cause générale du froid en hyver, & de la chaleur en eté* *. C'est, dis-je, sur ces principes que j'ai avancé qu'il n'y avoit pas moins de rayons du soleil rompus, & qui passoient à travers l'atmosphere, lorsqu'ils tomboient sur sa surface plus obliquement que lorsqu'ils y tomboient moins obliquement, & qu'on n'avoit pas été fondé à compter en ce sens l'obliquité des rayons pour une des causes du froid en hyver. Car indépendamment de l'induction prise de la densité des milieux, & des réfractions astronomiques qui élevent toujours les astres sur l'horison, on sçait aujourd'hui par des expériences faites en Angleterre * & en France ** avec beaucoup d'exactitude, que la lumiere s'approche de la perpendiculaire, en passant du vuide ou de l'éther dans l'air.

* P. 109 & suiv.

* Par Ms. Lowthorp & Hauksbée. Voy. Transf. Phil. num. 257. & Exper. Physico-Mechan. d'Hauksbée, page 144. imp. à Florence en 1716.

** Par M. Delisle Astronome, Mem. de l'Académie 1719. pag. 330.

LIX. *Cor.* 25. Comme dans l'immersion successive des parties de la sphere, la somme de tous les accroissemens de résistance, ou, dans un autre cas de *facilité*, que la sphere trouve en passant d'un milieu dans un autre, est égale à la résistance ou à la *facilité* finale (*Art. LIII. N°. 2. p. 365.*) & la somme des réfractions, ou des détours vers la perpendiculaire, ou vers la parallele, pendant ce passage, égale à la réfraction & au détour total, ou à celui qu'elle souffriroit d'abord si elle étoit sans parties, & réduite à un point indivisible; de même *dans le passage successif*

ceſſif d'une ſphere à travers pluſieurs milieux continuellement croiſſans, ou décroiſſans en réſiſtance, en rareté, ou en denſité, la ſomme des accroiſſemens, ou des décroiſſemens de réſiſtance, des réfractions & des détours vers la perpendiculaire, ou vers la parallele, ſera égale à la réſiſtance, ou à la facilité, *& à la réfraction finale; c'eſt-à-dire, à celle qu'elle eût éprouvé, ſi elle eût paſſé immédiatement du premier milieu qu'elle quitte, dans le dernier où elle va.* Et comme dans le cas d'un ſeul nouveau milieu, la courbe décrite par le centre de la ſphere eſt le réſultat de tous les petits détours rectilignes arrivés pendant l'immerſion ſucceſſive de ſes parties dans le nouveau milieu; de même *dans le cas de pluſieurs différens milieux de ſuite, la courbe totale décrite par le centre de la ſphere, ſera le réſultat, & pour ainſi dire, l'*intégrale *de toutes les petites courbes décrites pendant ſon paſſage à travers tous les différens milieux.*

C'eſt ainſi que la lumiere en venant de l'éther juſqu'à nous à travers les différentes couches de l'atmoſphere, toûjours d'autant plus denſes qu'elles ſont plus proches de nous, doit décrire une courbe réſultante de toutes celles que décrit un de ſes globules quelconques, pendant toutes les réfractions ſucceſſives qu'il y ſouffre, & dont la ſomme eſt égale à la réfraction qu'il auroit d'abord ſoufferte, s'il eût paſſé immédiatement de l'éther dans la couche d'air la plus proche de la terre.

LX. *Corol. 26. Tout mobile qui paſſe d'un milieu qui lui réſiſte moins, & où il ſe meut avec plus de facilité & de vîteſſe, dans un autre, qui lui réſiſte davantage, & où il ſe meut avec plus de difficulté & de lenteur, s'écarte de la perpendiculaire en y entrant. Et au contraire.*

Cette propoſition ſuit néceſſairement du principe de l'art. X. & devient évidente par le détail de l'art. LIII. où l'on voit que le détour de la réfraction vers la parallele eſt toûjours l'effet du plus de réſiſtance de la part du nouveau milieu, & du moins de vîteſſe ou de facilité de la part du mobile qui paſſe dans ce milieu, comme le détour vers la perpendiculaire eſt l'effet du moins de réſiſtance de la part du mi-

lieu, & du plus de vîtesse ou de facilité de la part du mobile.

LXI. *Corol.* 27. Donc *la lumiere se meut avec plus de facilité, & trouve moins de résistance dans les milieux où elle s'approche de la perpendiculaire en se rompant, que dans ceux où elle s'en écarte.*

Car personne ne doute aujourd'hui que ce qui fait le sujet de la lumiere ne soit un être corporel, & qu'on ne doive raisonner de son mouvement ou de ses tendances au mouvement, comme on feroit à l'égard de tout autre mobile.

LXII. *Rem.* 12. Ces deux corollaires ne font que présenter sous d'autres termes ce que nous avons démontré de plus fondamental sur cette matiere; & ils sont une suite si nécessaire de la loi d'équilibre, qu'il n'y a, ce me semble, aucune sorte d'hypothese d'impulsion, ni d'attraction, qui puisse les infirmer le moins du monde. J'aurois crû même tout-à-fait inutile de les énoncer, si des auteurs célebres du dernier siecle n'avoient adopté un sentiment tout différent. Aussi ces deux articles, de même que les experiences qui ont été faites de nos jours sur ce sujet *, peuvent-ils être regardés plûtôt comme un hommage rendu à la mémoire des sçavans hommes qui les ont combattus, que comme un nouveau moyen de s'assûrer d'une vérité, qui ne differe pas de nos connoissances les plus certaines sur les propriétés de la matiere & du mouvement.

* *Hist. de l'Académie,* 1702. *pag* 14. *Mém.* 1705. *pag.* 211.

Pour peu qu'on soit instruit de l'Histoire littéraire du temps de M. *Descartes*, on sçait la dispute qui s'émût entre lui & M. *de Fermat* sur la réfraction de la lumiere. Une grande partie du troisieme tome des Lettres de M. *Descartes* ne roule que sur ce sujet. L'on y trouve les objections, les réponses, & les répliques de part & d'autre. Ce sont en effet, comme le disoit M. *Descartes* lui-même *, *les pieces du petit procès de mathematique qu'il avoit contre M. de Fermat*, & que celui-ci appelloit de son côté, *sa petite guerre contre M. Descartes* *. M. *Descartes* frappé de l'évidence du principe, & sans s'embarrasser de ce qu'il y pouvoit avoir de douteux, ou de tout-à-fait caché dans la cause physique

* *Let.* 42. *p.* 193.

* *Let.* 36. *p.* 168.

du phénomene, disoit : les rayons de lumiere s'approchent de la perpendiculaire en passant de l'air dans un milieu plus dense, dans l'eau, par exemple, ou dans le verre ; donc les rayons de lumiere se meuvent avec plus de force & de facilité dans l'eau ou dans le verre, que dans l'air, & en général, dans les milieux plus denses, que dans les moins denses. M. *de Fermat* au contraire, argumentant de la densité visible de ces corps à leur prétendue résistance par rapport à la lumiere, ou à la moindre facilité que la lumiere devoit trouver à les traverser, soûtenoit que le principe de dioptrique de M. *Descartes* étoit faux, puisque les rayons de lumiere s'approchoient de la perpendiculaire en entrant de l'air dans l'eau ou dans le verre, & d'un milieu moins dense dans un plus dense, & qui, selon lui, leur résistoit davantage. C'est principalement sur ce point que roula la dispute, & que leurs amis ou leurs disciples se partagerent pendant la vie, & après la mort de l'un & de l'autre ; comme on peut voir par quelques-unes de leurs lettres sur ce sujet, qui ont été mises dans le même volume, avec celles de M. *Descartes*, & de M. *de Fermat*.

Entre tous les auteurs qui écrivirent dans ces temps-là sur cette matiere, aucun, ce me semble, ne donna une explication physique plus ingénieuse de la réfraction, conformément au principe de M. *de Fermat*, que celle qu'on trouve dans le P. *Maignan* *, & qui a été adoptée depuis par un très-sçavant Géometre **. Mais elle est absolument dépendante de l'hypothese, dont nous avons déja fait sentir l'absurdité, (*Art. XXXIII. & XXXIV.*) que les parties de la lumiere soient de figure cylindrique ou prismatique, & qu'elles se présentent toutes, & constamment, selon la même position à l'entrée du milieu réfringent. Je ne me souviens pas néanmoins que M. *de Fermat* en ait fait mention. Mais il parut extrèmement flaté du suffrage de M. *de la Chambre*, qui embrassa son opinion dans un traité sur la lumiere, qu'il donna au public dans le temps de la plus grande chaleur de cette dispute. A en juger par les raisonnemens de cet Auteur, tous

* Perspectiva horaria, *lib.* 4. *prop.* 32. *Romæ*, 1648.

** Barrow, *Lect. Opt.* *II. art. IV.*

dans le goût de l'ancienne philosophie, & fondés la plûpart sur je ne sçai quelle *antipathie naturelle*, qu'il imaginoit *de la lumiere avec la matiere* *, on ne croiroit pas qu'un esprit du caractere de M. *de Fermat* eût voulu s'en faire honneur. Cependant il souhaita dès-lors d'entrer en société avec M. *de la Chambre*, & il lui dit à cette occasion: * *J'ose vous assûrer par avance, que si vous souffrez que je joigne un peu de ma géométrie à votre physique, nous ferons un travail à frais communs, qui nous mettra d'abord en défense contre M.* Descartes *& tous ses amis*. Mais les raisonnemens de M. *de la Chambre*, aussi-bien que ceux de M. *de Fermat*, furent réfutés avec tant de force par M[rs]. *Rohault* & *Clerselier*, qu'il y a toute apparence que M. *de Fermat* lui-même se rendit de bonne foi, quelque peu de temps avant sa mort: *Il croise les armes* *, dit-il, *il cede la victoire, & le champ de bataille* **, pourvû qu'on lui laisse une vérité géométrique qu'il démontre sur cette matiere, & dont nous aurons bientôt lieu de parler. Mais malgré cet aveu, & l'évidence du principe cartesien, l'opinion de M. *de Fermat* a eu de célebres sectateurs après sa mort.

* *La Lumiere*, p. 354.

* *Let.* 50. p. 246.

* *Let.* 51. p. 256.

** *Let.* 54. p. 297.

Ce qu'il y a ici de surprenant, c'est qu'on n'ait pas senti la prodigieuse différence qu'il y avoit entre la clarté des démonstrations que M. *Descartes* & ses disciples donnoient de la proposition renfermée dans le Corol. 26. (*Art. LX.*) & l'objection de M. *de Fermat* toute fondée sur la densité apparente de certains corps, tels que l'eau ou le verre, par rapport aux rayons de lumiere. Ne suffisoit-il pas d'entrevoir que malgré la pesanteur, ou la dureté, ou la quantité de matiere propre de ces substances en comparaison de l'air, il n'étoit pas impossible qu'en vertu de quelque tissu de parties qui échape à notre vûe, elles présentassent aux rayons de lumiere un passage plus libre, plus direct, & moins interrompu, que ne faisoit l'air? Car enfin rien ne s'oppose dans notre esprit à la vérité du principe consideré en lui-même: mais nous voyons bien que nous sommes encore très-éloignés de connoître la structure particuliere & intrinseque des corps. C'est, pour le dire ici en passant, une illusion dans

laquelle tombent d'ordinaire ceux qui voudroient exclurre de la physique tout principe de pure spéculation, en faveur des expériences. Ils sont toûjours prêts à renoncer à la lumiere d'une vérité qui les frappe, pour la premiere obscurité qu'ils viendront à appercevoir dans quelqu'une des conséquences. Ce n'est pas que la voie des expériences ne soit excellente dans la physique, & en un sens préferable à celle du raisonnement. Il faut bien même que tôt ou tard & les expériences & le raisonnement concourrent, & que la conséquence soit parfaitement d'accord avec le principe, & aussi clairement apperçûe. Mais il y a des matieres, & celle que nous traitons est peut-être de ce nombre, où l'esprit découvre nécessairement beaucoup plus que les yeux, & où ce qu'on appelle l'expérience, sans être contraire aux vérités démontrées, ne pourra de long-temps les justifier d'une maniere visible & palpable. Cependant après tout ce que les expériences & le raisonnement nous ont appris aujourd'hui sur la lumiere & la diaphanéité, on peut dire que la possibilité alléguée par les disciples de M. *Descartes* sur la perméabilité des milieux denses par rapport à la lumiere, est devenue incontestable, & très-aisée à concevoir. Car dès que les parties solides des corps ne sont plus la cause immédiate de la réfraction, & qu'il faut avoir recours à un fluide répandu dans leurs pores, la lumiere rentre à cet égard dans le cas de tout autre mobile, qui se détourne de son chemin à la rencontre d'un nouveau milieu. Ses globules ont à traverser ce nouveau fluide, qui peut résister plus ou moins à leur mouvement, & être dit à leur égard plus ou moins dense, selon sa densité particuliere, indépendamment de la densité totale de la matiere dont il remplit les interstices. Dans ce sens étroit & exact, la densité du milieu, & sa résistance par rapport à la lumiere, sont univoques : mais en général, & selon la commune maniere d'entendre ces termes, ils peuvent être équivoques; puisque l'expérience nous apprend que le rayon rompu s'approche d'autant plus de la perpendiculaire, ou, ce qui revient ici au même, trouve d'autant moins de résis-

tance, que les corps transparens qu'elle pénetre sont plus pesans, plus solides, & en total plus denses. Et il n'y a nulle induction à tirer de cette densité des corps, contre la grandeur ou le nombre des pores dont ils sont semés, & qui donnent passage à la lumiere. Car outre que dans les corps qui nous paroissent les plus solides, la quantité de matiere propre est peut-être fort petite en comparaison des vuides & des interstices qu'elle y laisse, ces vuides & ces interstices peuvent y être répandus & configurés de tant de manieres, qu'on ne sçauroit s'assûrer par-là qu'un corps soit plus ou moins perméable à la lumiere qu'un autre. C'est à la seule expérience à le décider. On peut même avancer, & M. *Keill* * l'a démontré, qu'il n'est pas impossible que les pores d'un corps, & le fluide qui remplit ces pores soient à très-peu-près en égale quantité dans des corps très-inégaux en solidité, & tels, par exemple, que sous le même volume l'un contienne dix mille ou cent mille fois plus de matiere propre que l'autre. Il n'est pas impossible par conséquent que les espaces vuides ou remplis de matiere subtile dans un pouce cubique de verre ou d'or, soient presque aussi grands que les espaces vuides ou remplis de matiere subtile dans un pouce cubique d'air. D'ailleurs entre tous les pores d'un corps, il n'y a vrai-semblablement que ceux d'une certaine grandeur, d'une certaine figure, & d'une certaine continuité, qui admettent le fluide *refringent*, & qui laissent passer la lumiere. Ainsi la quantité, & la force du fluide *réfringent* dans le corps le plus solide & le plus dur, peuvent l'emporter sur la quantité, & la force du fluide *refringent* dans le corps le plus léger & le plus rare. Mais la force de ce fluide pourroit encore se trouver plus grande ou plus petite, & agir plus ou moins sur la lumiere, indépendamment de sa quantité, ou de la grandeur des pores du milieu. Que les milieux diaphanes les plus denses & les plus pesans soient donc ceux où la lumiere se meut avec le plus de facilité & de vitesse, & où elle s'approche le plus de la perpendiculaire, c'est un fait dont nous pouvons ignorer la cause physique, & le détail, mais qui n'a rien en

* *Introd. ad veram physicam, sect. V. Theor. 2.*

soi de contraire aux autres faits que nous sçavons sur la même matiere, & qui ne puisse être réduit aux mêmes principes.

LXIII. *Rem.* 13. Le différent tissu des parties solides & intégrantes des divers milieux, soit par la grandeur, soit par la figure, ou par la direction & l'arrangement de leurs pores, fournit une explication très-naturelle d'un phénomene de la réfraction de la lumiere, rapporté dans la plûpart des auteurs modernes qui ont écrit sur ce sujet. C'est que la lumiere ne se rompt jamais, qu'elle ne se réfléchisse en partie. Par exemple, si un rayon de lumiere tombe obliquement de l'air sur la surface d'un verre plan ou convexe d'une certaine épaisseur, il passera en partie dans le verre en s'y rompant selon la loi de la réfraction, & retournera en partie dans l'air, en s'y réfléchissant selon la loi de la réflexion. Cette partie rompue dans le verre, après l'avoir traversé, venant à en sortir & à rencontrer la surface de l'air, se rompra encore de nouveau en partie à sa rencontre pour passer dans l'air, & se réfléchira en partie pour retourner dans le verre, & vers l'air supérieur, où la même chose arrivera, & ainsi de suite à l'infini.

Dès que nous avons ôté l'équivoque de la solidité, de la densité & de la fluidité des corps, en tant que diaphanes, en faisant voir qu'ils doivent tous être en partie solides, & en partie fluides, & présenter à la lumiere une certaine quantité de leur matiere propre que ses globules ne peuvent pénétrer, & en même temps un fluide qui remplit leurs pores, & que ses globules pénetrent, il n'est plus mal-aisé de concevoir comment la surface d'un nouveau milieu peut rompre & réfléchir en partie un rayon de lumiere. Car ce rayon venant à trouver de nouveaux passages & des pores autrement disposés, autrement configurés, & d'une grandeur différente, il faut nécessairement qu'il rencontre entre deux quelques parties solides proprement dites placées vis-à-vis la partie fluide des pores du milieu d'où il vient, & par conséquent qu'il s'y réfléchisse. Et il n'y a rien là de contraire à ce que nous avons dit (*Art. XXXIV.* & *LIV.*)

que vrai-semblablement la réflexion de la lumiere, non plus que sa réfraction, ne se fait pas par le contact immédiat des particules solides des corps qu'elle frappe, mais par la rencontre d'un fluide subtil repandu dans leurs pores, &c. Car il faut concevoir, selon la même hypothese, que les parties du corps diaphane qui réfléchissent la lumiere, sont en cela dans le cas des corps opaques & polis; & par conséquent qu'elles sont composées de parties intégrantes, ou de molécules qui admettent dans leurs interstices, & sur leur superficie, ce fluide sujet propre de la réflexion de la lumiere, sans préjudice au fluide *réfringent*, qui remplit les intervalles semés entre ces parties ou ces molécules.

Mais il semble qu'on pourroit tirer du phénomene dont il s'agit, une induction toute contraire à celle du Corol. 22. *Art. LI.* & dire, s'il n'y a jamais de réfraction sans réflexion, y ayant une infinité de cas où le rapport de résistance des milieux donne la réflexion sans réfraction (*Corol.* 23. *Art. LV.* & *Rem.* 11. *Art. LVIII.*) Donc la réflexion doit être en plus grande quantité, & plus fréquente dans la nature, que la refraction.

A quoi je réponds, que si la quantité des corps diaphanes étoit plus grande que celle des corps opaques, en raison, par exemple de 5 à 1, & que la quantité moyenne de la lumiere rompue par les premiers, fût à la quantité moyenne de la lumiere qu'ils réfléchissent en même temps, en raison de 2 à 1, la somme totale de la lumiere rompue seroit plus grande d'un ¦ que celle de la lumiere réfléchie; ainsi le phénomene n'empêche pas que l'induction du corol. 22. prise en ce sens, ne puisse subsister dans toute sa force. Cette induction se changera même en proposition incontestable, si l'on fait attention à l'étendue immense des espces qui sont perméables à la lumiere dans l'univers, en comparaison de ceux qui ne le sont pas; comme aussi à la vivacité de la partie rompue d'un rayon de lumiere à la rencontre du verre ou de l'eau, en comparaison de sa partie réfléchie.

réfléchie. Ce dernier fait eſt quelquefois difficile à vérifier directement, parce que l'œil ne diſcerne pas toûjours les différentes denſités de la lumiere, malgré l'extrême inégalité qu'il y peut avoir entr'elles, comme il a été obſervé, *Mem.* 1719. *p.* 115. Mais je m'en ſuis convaincu par des expériences dont je rapporterai le détail dans une autre occaſion, s'il eſt néceſſaire.

Ce n'eſt pas là cependant l'objet du Corollaire, ſon véritable ſens le met encore plus à couvert de l'objection. Il n'eſt pas queſtion, dis-je, de ſçavoir ſi de tous les globules qui forment un rayon ſenſible, & qui tombent obliquement ſur la ſurface d'un nouveau milieu, comme ſur une grille, il y en a un plus grand nombre de rompus par la partie qui eſt perméable, que de réfléchis par celle qui ne l'eſt pas ; il s'agit ſeulement de prouver qu'*un globule étant donné, & ayant à frapper obliquement la ſurface d'un nouveau milieu ; entre tous les rapports poſſibles de réſiſtances de ce milieu, & de celui d'où vient le globule, la ſomme infinie des rapports qui donnent la réfraction eſt plus grande que la ſomme iufinie des rapports qui donnent la réflexion.* Et c'eſt ce qui eſt évident par le détail de l'article qui précede ce Corollaire.

LXIV. *Corol.* 28. *Le temps employé par un mobile à paſſer d'un milieu dans un autre par le chemin de la réfraction, eſt plus long que le temps qu'il employeroit à y aller par une ſeule ligne droite.*

On voit d'abord en général, que le chemin de la réfraction n'eſt pas celui du temps le plus court, ſi l'on prend garde, que pour diminuer le temps, il faut raccourcir le chemin dans le milieu *le plus difficile*, où le mobile ſe meut avec moins de vîteſſe, & le prolonger dans le milieu *le plus facile*, où le mobile ſe meut avec plus de vîteſſe. Or il arrive tout le contraire au chemin de la réfraction, il devient plus oblique, & plus long dans le milieu le plus difficile, en s'y éloignant de la perpendiculaire (*art. LX.*) & plus direct, & plus court dans le milieu le plus facile, en s'y approchant de la perpendiculaire. Donc, &c.

Mais pour démontrer plus particulierement la propoſition
Fig. 18. dont il s'agit, ſoit *M* un mobile qui doit aller du point *M* au point *G*, en traverſant deux milieux *PH*, *PG*, ſéparés par la ligne *PL*, également diſtante des points *M*, *G*. Soit ſuppoſé le milieu *PH* plus difficile à pénétrer que le milieu *PG*, enſorte que le mobile allant d'un mouvement uniforme dans chacun d'eux, ſa vîteſſe (v) dans *PH*, ſoit plus petite que ſa vîteſſe (V) dans *PG*. Si l'on mene *MG*, qui coupe obliquement *PL*, en *Y*, & que ſur le côté *YL*, de l'angle obtus *LYM*, on prenne le point *A*, à une diſtance quelconque, *AY*, du point d'interſection, *Y*, & de maniere, qu'ayant joint *MA* & *AG*, *MA* ſoit plus oblique, & *AG* moins oblique à *PL*, que n'eſt *MY*, ou *GY*; je dis que le mobile employera plus de temps à parvenir du point *M* au point *G*, en paſſant par le point *A*, & parcourant les droites *MA*, *AG*, qu'en paſſant par le point *Y*, & parcourant la droite *MG*.

Car les temps étant égaux aux longueurs parcourues diviſées par la vîteſſe, on a $\overline{\frac{MA}{v} + \frac{AG}{V}} = T$, & $\overline{\frac{MY}{v} + \frac{YG}{V}} = t$ (T, & t exprimant les ſommes des temps employés à parcourir les chemins $MA + AG$, & $MY + YG$.) Il faut donc faire voir que $T > t$, ou, ce qui revient au même, que $\overline{\frac{MA}{v} + \frac{AG}{V}} > \overline{\frac{MY}{v} + \frac{YG}{V}}$, & réduiſant, $\overline{MAV + AGv} > \overline{MYV + YGv}$.

Soient *YM*, & *YG*, prolongées également de part & d'autre, vers *D*, & vers *O*; enſorte que la totale *DO*, ſoit égale à $MA + AG$. On aura encore $\frac{DY}{v} + \frac{YO}{V}$, ou, $DYV + YOv$, pour l'expreſſion des temps (ϑ) par *DO*; & il eſt évident que $\vartheta > t$, ou $DYV + YOv > MYV + YGv$, puiſque, toutes choſes étant d'ailleurs égales,

le chemin $\overline{DY, + YO}, = DO$, eſt plus long que le chemin $\overline{MY + YG} = MG$. Si je prouve donc que $T > \vartheta$, à plus forte raiſon aurai-je prouvé que $T > t$. Mais, ayant fait $\overline{MA - AG} = 2F$, on ſçait que $DY + F = MA$, & $YO - F = AG$, à cauſe (*conſtr.*) de $2DY$, ou $2YO = DO = \overline{MA + AG}$. Mettant donc ces valeurs à la place de MA, AG, & comparant les ſommes T, $(MAV + AGv)$ & $\vartheta\ (DYV + VOv)$; on trouvera d'un côté, $\overline{DY + F} \times V + \overline{YO - F} \times v$, & de l'autre ſeulement, $DY \times V + YO \times v$, ou, parce que $YO = DY$, $T = DY \times \overline{V + v} + F \times \overline{V - v}$, & $\vartheta = DY \times \overline{V + v}$, où il eſt clair que $T > \vartheta$ de toute la quantité $F \times \overline{V - v}$, laquelle ne ſçauroit jamais être négative, ni égale à zéro, à cauſe que par hypotheſe $V > v$. Donc $T > \vartheta > t$. Et parce que le point A n'eſt autre choſe ici que le point *anaclaſtique*, ou de réfraction, & MAG le chemin de la réfraction, conformément à l'art. LX. Donc, &c.

LXV. *Corol.* 29. Si l'on mene GLH perpendiculaire à LP, enſorte que LH ſoit égale à LG, la ligne HA ſera celle de la réflexion, dans le cas où PL ſeroit changée en un plan inébranlable & impénétrable, & où le mobile M, acquerroit en A, une vîteſſe égale à celle avec laquelle il ſe meut dans le milieu PG, ou, pour rendre la choſe plus aiſée à imaginer, GA, & HA, devenant les lignes d'incidence, AM, devient ligne de réfraction, lorſque le mobile venant de G, paſſe du milieu PG, où ſa vîteſſe eſt V, dans le milieu PH, ou ſa vîteſſe eſt v; & la même AM, devient ligne de réflexion, lorſque le mobile venant de H, rencontre en A, ſur le plan inébranlable PL, un obſtacle quelconque, qui lui fait perdre une partie de ſon reſſort, en raiſon de V à v, ou de MA à HA, ou des ſinus d'inclinaiſon de l'angle d'incidence, & de celui de réfraction ou de réfle-

xion, ou enfin en raiſon réciproque des forces, avant & après la rencontre du point *A*. Car par la conſtruction de la figure, où les points *M*, *G*, *H*, ſont ſuppoſés à égale diſtance du plan rompant, ou réfléchiſſant, la perpendiculaire *PM*, ou *LG*, ou *LH*, étant priſe pour rayon, ou ſinus total, les lignes *MA*, & *AG*, *AH*, deviennent les ſécantes des angles d'inclinaiſon, que *Snellius* a trouvé, qui conſervoient toûjours le même rapport entr'elles, & que M. *Deſcartes* a fait voir être en raiſon des ſinus de ces mêmes angles; ou enfin, qui ſont réciproquement comme les vîteſſes; ou, ce qui eſt ici la même choſe, comme les forces avant & après le choc, ainſi qu'il a été démontré ci-deſſus, *art. X.* & *LIII.*

LXVI. *Corol.* 30. D'où il ſuit, que *dans les cas des mêmes quantités, & du même rapport de forces, avant & après le choc, le temps de la réflexion eſt égal à celui de la réfraction, & qu'en général, tant dans la réflexion, que dans la réfraction, le chemin que ſuit le mobile n'eſt pas celui du temps le plus court.*

LXVII. *Corol.* 31. Il ſuit encore qu'*en général le chemin de la réflexion, non plus que celui de la réfraction, n'eſt pas le plus court en longueur.* Puiſque $GA + AM = HA + AM > GY + YM = HY + YM$, & qu'il n'y a que le cas particulier où le point *A* ſe confond avec *Y*, & où le rapport des vîteſſes avant & après le choc eſt le même, qui ſoit celui du chemin le plus court.

LXVIII. *Remarque* 14. La prétendue propriété du plus court temps dans le chemin de réfraction, fut imaginée par M. *de Fermat*, en faveur du principe qu'il ſoûtenoit contre M. *Deſcartes*, que la lumiere devoit s'approcher de la perpendiculaire, en paſſant d'un milieu moins denſe, c'eſt-à-dire, moins réſiſtant, dans un plus denſe ou plus réſiſtant. C'eſt-là cette vérité géométrique ſur laquelle nous avons déja remarqué que M. *de Fermat* ſe retrancha dans cette diſpute, lorſqu'il vint à céder ſur tout le reſte. En effet, ſi l'on reçoit ſon principe, & qu'on ſuppoſe que la lumiere emploie un temps à paſſer d'un milieu dans un autre, il faudra néceſ-

fairement avoüer la conféquence, qu'elle y paffe par le chemin de la plus courte durée.

Cette propriété affez brillante par elle-même, favorifant d'ailleurs un certain accord du mécanifme de la nature avec la fimplicité des vûes qu'on a coûtume de lui attribuer, & avec la théorie des caufes finales, fut auffi adoptée avec éloge par M. *Leibnitz* grand protecteur de ces caufes, & de leur emploi dans la Phyfique. Ce fut en 1682 * que parut un ouvrage de cet illuftre Auteur, où il voulut réduire toute l'optique, la catoptrique, & la dioptrique, à ce principe unique, que la lumiere va toûjours d'un point à un autre, ou par le chemin le plus direct, ou par le plus court, ou par celui de la moindre durée. Il étoit aifé d'en faire voir la convenance avec la propagation ordinaire de la lumiere, qui fe fait toûjours en ligne droite, & avec fa réflexion, qui fe fait auffi par le chemin le plus court, quoique, à l'égard de la réflexion, le principe ne puiffe avoir lieu, comme nous avons remarqué (*art. XV. & LXVII.*) que dans un feul cas particulier. Mais pour l'appliquer à la réfraction, M. *Leibnitz* fut obligé de fuppofer avec M. *de Fermat*, que la lumiere s'approche de la perpendiculaire dans les milieux où elle fe meut plus lentement, & qui lui réfiftent davantage. Je dis qu'il y fut obligé, parce que fans cela je n'imagine pas comment, après tout ce qui avoit été dit là-deffus par les Cartéfiens, ce grand Géometre eût pû recevoir un principe fi manifeftement contraire aux loix de Statique. Il paroît en effet que tandis que M. *de Fermat* ne met en œuvre la propriété du plus court temps, que pour faire valoir le principe, M. *Leibnitz* n'a recours au principe, que pour maintenir la propriété, & établir la caufe finale, qu'il érige elle-même en principe fondamental fur cette matiere. M. *Leibnitz* démontre donc cette fameufe propriété, à l'aide de la fuppofition qu'elle renferme, & par fon calcul *de maximis & minimis*, conjointement avec le calcul différentiel, dont il ne donna l'algorifme, que deux années après. Mais il fait plus encore : convaincu de la néceffité qu'il y avoit d'introduire les caufes finales

* *Dans les* Acta Erud. 1682. *pag.* 185. *fous le titre de* Unicum opticæ, catoptricæ & dioptricæ principium.

dans la Physique, & persuadé que cette maniere de philosopher étoit préférable en plusieurs rencontres à toute autre, il tâche de décréditer, comme pernicieuse, la maxime de M. *Descartes*, qui veut qu'on raisonne seulement sur la cause prochaine & mécanique de la structure particuliere des corps. On sçait de quelle maniere ce Philosophe s'en explique dans ses *principes*, & dans quelques autres de ses ouvrages. C'étoit assûrément un des hommes du monde le plus capable de juger de l'étendue & des bornes de notre esprit. Mais il étoit persuadé que si nous sommes peu en état de découvrir ce qui se passe dans la nature par l'inspection de la nature même, & des loix du choc des corps, nous sommes apparemment encore moins à portée de la connoître par la fin que son Auteur s'est proposée en établissant ces loix. Peu s'en faut cependant que M. *Leibnitz* ne traite la sage retenue de M. *Descartes*, & de ses disciples, sur cette matiere, d'erreur plus que philosophique. *Itaque*, ajoûte-t'il, après avoir rehaussé l'excellence de la propriété de la lumiere dans le chemin de la réfraction, *errant valdè, ne quid gravius dicam, qui causas finales cùm* Cartesio *in Physica rejiciunt, cùm præter admirationem divinæ sapientiæ pulcherrimum nobis principium præbeant inveniendi*, &c. Mais comme on vient de voir dans les Corollaires ci-dessus, l'exemple de la réfraction donné ici en preuve, porte absolument à faux, & justifie parfaitement la conduite de M. *Descartes*, & de ses disciples, à cet égard. En général on peut bien assûrer qu'en matiere de physique, il n'y a pas de méthode plus incertaine, plus équivoque, & quelquefois plus téméraire, que celle qui s'appuie sur la raison des causes finales. Ce n'est pas qu'à tout prendre, la nature n'agisse toûjours par la voie, & pour la fin la plus simple, & la plus uniforme qu'il soit possible. Mais nous ignorons souvent quelle est cette voie, ou cette fin; & cette ignorance nous expose à attribuer à la nature telle simplicité, ou telle uniformité, qui sont incompatibles avec des conditions préférables, & plus essentielles. Dans la question dont il s'agit, par exemple, si l'on fait aller la

lumiere d'un milieu dans un autre, par le chemin de la plus courte durée, on remplit une vûe qui plaît à l'esprit, & qu'on donne d'autant plus volontiers à la nature, qu'elle paroît plus conforme à sa conduite ordinaire. Mais on ne s'apperçoit pas qu'en même temps, on fait prendre à la lumiere, qui est assûrément quelque chose de corporel, une route toute différente de celle que prennent les autres corps en pareille rencontre; puisqu'on la fait détourner vers le côté où elle trouve le plus de résistance, & moins de facilité à se mouvoir. Or y aura-t'il plus d'incongruité à faire mouvoir la lumiere dans les circonstances de la réfraction, par un chemin qui n'est pas celui du plus court temps, qu'à la tirer de la loi générale des corps, dans la direction qu'ils sont obligés de suivre, en passant d'un milieu dans un autre? Faudra-t'il préférer ce principe, que la nature agit toûjours par le chemin le plus court, le plus facile, ou de moindre durée, à cet autre, que tous les êtres corporels tendent à l'équilibre, ou au mouvement, selon qu'ils sont également, ou inégalement pressés de ceux qui les environnent; & que quand ils se meuvent, ils sont toûjours déterminés à aller vers le côté où se trouve la moindre résistance? Ces deux principes seront également certains, si l'on veut: mais qui ne voit que le premier est sujet à mille équivoques, & à mille exceptions, & que le dernier n'a jamais dû souffrir d'exception, que par voie surnaturelle? J'ajoûterai encore cette réflexion, qu'en raisonnant des effets de la nature par la cause prochaine & immédiate qui a pû les produire, il n'y a rien de perdu pour la cause finale; l'on se trouveroit tout prêt à la recevoir, si elle venoit à nous être révélée. C'est qu'une recherche purement mécanique, laisse à l'esprit toute sa liberté, & pour ainsi dire, toute sa froideur. Mais quand on s'est voüé à la cause finale, & qu'elle doit devenir le fondement d'une explication physique, il faut dèslors trouver dans la nature dequoi justifier le dessein qu'on lui attribue: & plus il est noble ce dessein, & analogue aux phénomenes connus, ou même à des vérités d'un

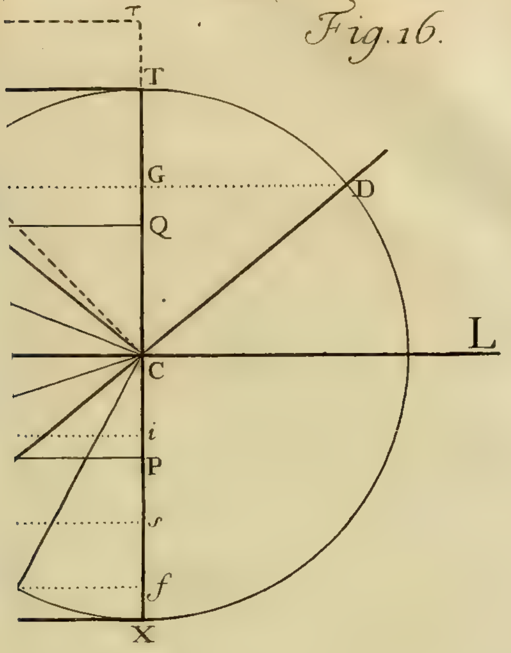
genre ſupérieur, plus il eſt propre à échauffer l'eſprit, à frapper l'imagination, & à diſpoſer d'autant l'un & l'autre à l'erreur, ſi l'erreur eſt néceſſaire pour ſoûtenir la fin dont on a fait choix.

Tant de raiſons contre la propriété prétendue de la lumiere dans la réfraction, n'ont été pour moi que ſuffiſantes, quand il s'eſt agi de prendre parti là-deſſus contre M. *Leibnitz*. Une autorité ſi grande, & à ſi juſte titre, ſe trouve encore ici ſoûtenue de celle de M. *Huguens*. Ce fameux Géometre, dans ſon *Traité de la Lumiere*, qui fut imprimé en *1690*, & qui eſt le dernier Livre qu'il ait donné au public, ſe déclare ouvertement pour la propriété des réfractions, & ſoûtient en propres termes * *contre l'opinion de M.* Deſcartes, *que la lumiere paſſe plus lentement à travers le verre & l'eau, qu'à travers l'air.* C'eſt ce qu'il déduit de ſon ſyſtème des *ondes* d'une maniere très-ingénieuſe, ſi toutefois on peut appeller ingénieux un raiſonnement, qui aboutit à faire détourner un corps qui ſe meut, vers le côté où il trouve le plus de difficulté à ſe mouvoir. Ce ſyſtème cependant, quoique d'ailleurs peut être aſſez peu conforme à la nature, ne conduit point néceſſairement à une conſéquence ſi extraordinaire; & il ſeroit aiſé de faire voir, qu'en changeant peu de choſe aux circonſtances & aux ſuppoſitions gratuites, ſur leſquelles M. *Huguens* a imaginé ſa démonſtration, & conſtruit ſes figures, le ſyſtème des *ondes* ſe trouveroit, en ce point d'accord avec les autres ſyſtèmes de la lumiere, & avec la ſtatique.

*P. 40.

A l'égard de M. le *Marquis de l'Hoſpital* qui a auſſi déterminé dans ſon Livre *des infiniment petits* *, le paſſage d'un milieu dans un autre par le temps le plus court, j'ignore ce qu'il penſoit de l'application qu'on en pouvoit faire à la réfraction, & au principe de M. *de Fermat*, parce qu'il en a détaché la queſtion, & qu'il l'a réduite, comme on ſçait, en Problème, indépendamment de la réfraction, & ſous l'hypotheſe d'un Voyageur qui doit aller d'un lieu à un autre, en traverſant deux campagnes différentes. Et vrai-

* Art. 59.


Fig. 16.
T
G
D
Q
L
C
i
P
s
f
X

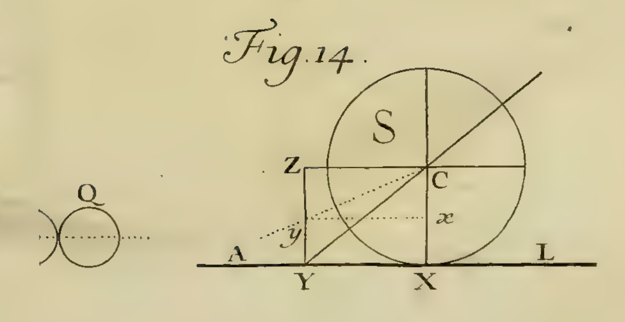
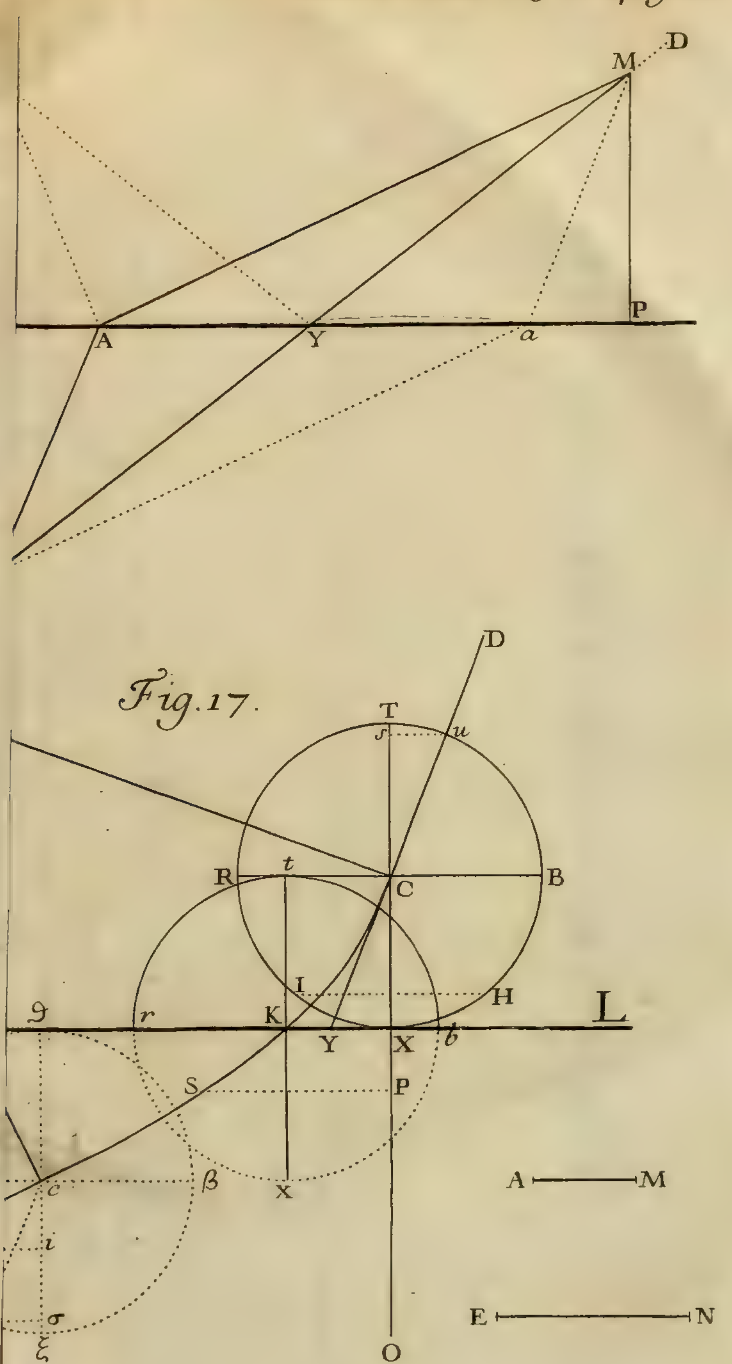

Fig. 14.
S
Z
C
x
y
A
L
Y
X
Q

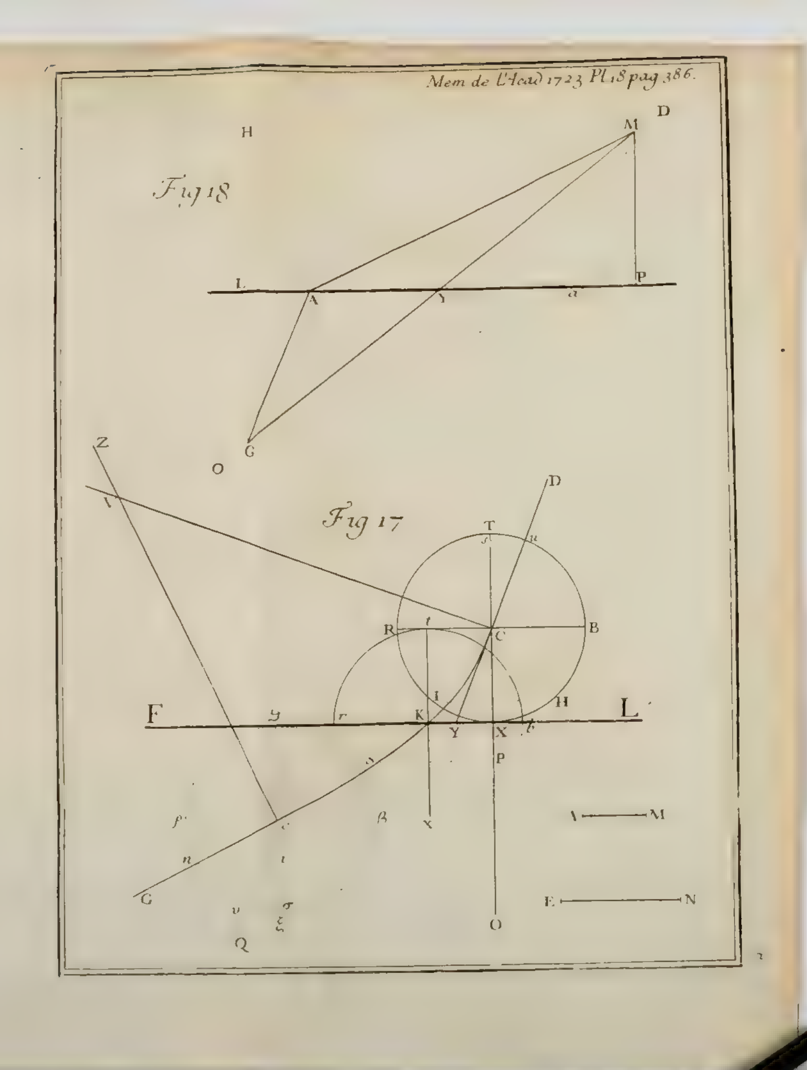
Fig. 16

Fig 14

Fig 15



D
M
P
A
Y
a
Fig. 17.
D
T
s
u
R
t
C
B
I
H
ϑ
r
K
Y
X
b
L
S
P
c
β
x
A
M
i
σ
ξ
E
N
O


Fig 18
H
M
D
L
A
Y
a
P
G
O
Z
Fig 17
D
T
B
R
C
I
H
F
K
Y
X
L
P
G
O
Q
E
N
M

vraiſſemblablement il ne l'a traitée que pour faire briller le calcul qui étoit ſon principal objet. Il n'eſt pas mal-aiſé cependant de s'appercevoir, en liſant le problême de M. *de l'Hôpital*, qu'il eſt applicable à la réfraction, tant par la nature du ſujet, & par la conſtruction de la figure qu'il y employe, que parce qu'il eſt précedé de deux autres, qui ſont viſiblement des queſtions de dioptrique & de catoptrique. Mais on peut bien ne pas prendre garde à quel principe de réfraction il appartient, à cauſe qu'il n'y en eſt fait aucune mention, & que tout cela eſt couvert par des expreſſions générales. Ce qui eſt arrivé de là, & qui eſt aſſez ſingulier, c'eſt que des lecteurs, d'ailleurs très-intelligens, ayant perdu le ſouvenir du principe de M. *de Format*, ou n'y faiſant plus attention, & retenant celui de M. *Deſcartes*, qui l'a enfin emporté, n'ont pas laiſſé que de prendre toûjours la propoſition démontrée dans M. de *l'Hôpital*, pour une proprieté de la réfraction. D'ailleurs ſi l'on conſtruit l'équation conſtitutive du problême, on trouve deux racines qui paroiſſent donner le point de réfraction en deux endroits différens ſur le plan *PL*, qui ſepare les deux milieux. De ſorte que ſi l'on eſt dans le préjugé, que la réfraction doit toûjours ſe faire par le chemin du plus court temps, on peut bien croire encore confuſément, que cette proprieté a lieu dans les deux hypotheſes; c'eſt-à-dire, ſoit que le rayon lumineux, qui vient du point *M*, s'approche de la perpendiculaire dans le milieu *PG*, ou dans le milieu *PH*, & qu'il ſe rompe en l'un ou en l'autre des deux points, en *A*, ou en *a*, par exemple; pourvû que ce ſoit toûjours dans le rapport donné direct, ou réciproque des vîteſſes, d'où réſulte celui des ſinus. Or il y a en effet deux points ſur le plan *PL*, qui donnent ce rapport, & tels qu'ayant mené *aM*, & *aG*, du ſecond, on a un chemin de réfraction *MaG*, ſemblable au premier chemin *MAG*, & ſeulement poſé en ſens contraire. Et ce double point de réfraction ſur le plan rompant, n'auroit rien dans le fonds de plus extraordinaire que le double point d'oſcillation, qu'on trouve ſur la verge du pen-

dule, par rapport au petit poids qu'on a coutûme d'y ajoûter, pour en avancer ou retarder les vibrations. Ce n'eſt donc qu'en y regardant de plus près, qu'on s'apperçoit, que le rapport conſtant des ſinus, & l'analogie des viteſſes, eu égard aux réſiſtances, réciproque dans le premier cas, & directe dans le ſecond, ne ſçauroit donner le chemin du plus court temps, que dans ce ſecond cas, tout-à-fait relatif au principe de réfraction de M. *de Fermat*, & abſolument incompatible avec les loix connues de la nature.

Je donnerai la continuation de cette ſeconde partie, dans les mémoires de l'année prochaine; ſur les variations accidentelles de la refraction en général, ſur les différens degrés de réfrangibilité *de la lumiere, ſur ſes couleurs*, &c.





MESSIEURS DE LA SOCIETE' Royale des Sciences, établie à Montpellier, ont envoyé à l'Academie l'ouvrage qui ſuit, pour entretenir l'union intime qui doit être entre-elles; comme ne faiſant qu'un ſeul corps, aux termes des ſtatuts accordés par le Roi au mois de Février 1706.

ARACHIDNOIDES AMERICANA.

Arachidna quadrifolia villoſa fl. luteo. nov. plant. Americ. gen. Plum. 49. Piſtache du Tertre. 2. 121. Manobi. Labat. 4. 59.

Par M. NISSOLLE.

LA racine de cette plante eſt blanche, droite, & longue de plus d'un demi-pied, piquant en fond; accompagnée vers le milieu de pluſieurs fibres traçantes, & quelque peu chevelues, de différentes longueurs; car il y en a quelques-unes qui n'ont que deux ou trois pouces de long, & il s'y en trouve qui en ont bien quatre ou cinq, & même quelquefois davantage. Elle eſt épaiſſe en ſon collet d'environ ſix ou ſept lignes, & en diminuant inſenſiblement, elle va finir par une pointe très-déliée. Cette racine pouſſe pluſieurs tiges de huit à dix pouces de long, tout-à-fait couchées ſur terre; il n'y a que celle du milieu qui ſoit tant ſoit peu relevée. Toutes ces tiges ſont rougeâtres, velues, quarrées, & noüeuſes, diviſées en quelques branches; les feuilles dont elles ſont garnies, ont un pouce & demi de long ſur un pouce de large, attachées immédiatement & ſans pédicule à des queues de près d'un pouce & demi de

long, toûjours au nombre de quatre, & oppoſées deux à deux; elles ſont d'une figure preſque ovale, d'un vert gaî par deſſus, & blanchâtres par deſſous, relevées d'une petite nervure au milieu, accompagnée en ſa longueur de petits filamens qui s'étendent obliquement juſques aux bords, médiocrement épaiſſes, & pliées légerement en goutiere.

Les queues qui les soûtiennent ſortent des nœuds des tiges, accompagnées de deux feuilles, qui les embraſſent auſſi bien que la tige. Elles ſont longues de huit à neuf lignes, mais n'en ont que quatre ou cinq de largeur à leur naiſſance, & en s'étreciſſant peu à peu, elles ſe terminent en une pointe très-fine.

Les fleurs ſortent des aiſſelles de ces queues, & du milieu des feuilles qui les embraſſent; elles ſont legumineuſes, d'un jaune tirant un peu ſur le rouge, ſoûtenues par un pédicule d'environ ſept ou huit lignes de longueur; l'étendart ou feuille ſupérieure en a ſix, ſur ſept ou huit de largeur; ſes aîles ou feuilles latérales en ont quatre, ſur une de large; il y a entre deux une petite ouverture par où l'on découvre la baſe de la fleur appellée ordinairement *Carina.* Elle eſt compoſée de deux feuilles, entre leſquelles eſt placé le piſtil qui eſt tant ſoit peu relevé en haut, & qui ſort du fond du calice, lequel eſt formé en eſpece de cornet dentelé.

Ce piſtile, lorſque les fleurs commencent à paſſer, ſe fiche dans la terre, & y devient un fruit long & oblong, blanc-ſale, tirant quelquefois ſur le rougeâtre. Ce fruit eſt une eſpece de gouſſe membraneuſe, ſillonnée en ſa longueur, garnie entre les ſillons de pluſieurs petites lignes, tantôt tranſverſales, tantôt obliques, ſuſpendu dans la terre par une petite queue de ſept à huit lignes de long. La longueur de ces gouſſes varie ſouvent; il y en a d'un pouce & demi de long, & j'en ai vû pluſieurs qui n'avoient pas plus de huit à neuf lignes. Leur groſſeur eſt aſſez irréguliere, les deux extrémités étant communément renflées, & le milieu comme creuſé en goutiere; le bout par où elles ſont atta-

chées à la queue est ordinairement plus gros que le bout opposé qui se termine souvent en une espece de pointe émoussée & relevée en façon de bec crochu. Chaque gousse est composée de deux cosses, dont les cavités, qui sont inégales, & garnies en dedans d'une petite pellicule blanche, luisante, & très-déliée, renferment un ou deux noyaux ronds & oblongs, divisés en deux parties, & couverts d'une petite peau rougeâtre semblable à peu près à celle qui couvre les amandes ou les noisettes, qui noircit quand le fruit vieillit ou devient sec.

Ces noyaux, lorsque chaque gousse n'en renferme qu'un seul, sont assez réguliers, & ne ressemblent pas mal aux noyaux du gland: mais lorsqu'il y en a deux, ils sont échancrés obliquement, l'un à la tête, l'autre à la queue, aux endroits par où ils se touchent. La substance de ces noyaux est blanche & oléagineuse, & le goût en est fade & insipide, tirant sur le sauvage, ayant quelque rapport avec le goût des pois chiches verts.

J'ai donné la description de l'*Arachidnoides*, & j'en ai fait dessiner la figure d'après les plantes de cette espece qui ont été cultivées dans le jardin Royal de cette Ville: mais comme on n'a pas pû les y conserver long-temps, je n'ai pas eu occasion d'en examiner les vertus & les usages.

Le R. P. du Tertre de l'Ordre des FF. Prêcheurs, & Missionnaire aux Isles de l'Amerique, a donné dans le second Volume de l'Histoire qu'il a faite de ces Isles, une figure peu correcte, & une description très-imparfaite de cette plante, qu'on appelle, à ce qu'il dit *pistache*, à cause de la forme & du goût de ses fruits.

Le R. P. Labat Religieux du même Ordre, & Missionnaire dans les mêmes Missions, qui a mis au jour depuis peu un ouvrage intitulé, *Nouveau Voyage aux Isles de l'Amerique*, parle aussi de ces mêmes pistaches, qu'il dit qu'on appelle autrement *manobi*. Et après avoir refuté ce que le Pere du Tertre avoit avancé touchant leur usage, il en donne une description un peu plus étendue: mais cette des-

cription manque auſſi d'exactitude, de même que la figure que ce Pere en a fait graver, & qu'il a empruntée du Pere du Tertre. En effet, à ſuivre cette figure, on croiroit que tous les fruits ſont ſuſpendus aux fibres de la racine, & qu'il n'y en a point aux tiges, au lieu qu'il eſt certain qu'ils viennent tous aux tiges de la plante, & qu'il n'y en a aucun d'attaché à la racine. C'eſt ainſi que je l'ai conſtamment obſervé ſur les plantes de cette eſpece que j'ai cultivées, c'eſt ainſi que le rapporte le R. P. Plumier Religieux de l'Ordre des Minimes, un des plus habiles botaniſtes du ſiecle, qui a fait pluſieurs voyages, & qui a demeuré très-long-temps dans les Indes Occidentales, pour y deſſiner & décrire les plantes qui y croiſſent, & qui a donné pluſieurs excellens ouvrages ſur cette matiere. Je ſuis pourtant ſurpris de ce que cet illuſtre botaniſte a donné le nom d'*arachidna* à la plante que je viens de décrire, puiſqu'elle ne ſçauroit être rapportée à aucune des eſpeces d'*arachidna* dont les anciens Auteurs de Botanique ont parlé.

Nous n'en connoiſſons que deux eſpeces; ſçavoir, *l'arachidna, aut potiùs aracoides Honorii Belli. J. B.* 2. 323. que M. Tournefort appelle dans ſes inſtitutions, *Vicia ſiliquas ſupràque terram edens*, 377. Et *l'arachidna Theoph. Papas Peruanorum Cluſ.* 79. que Caſp. Bauh. appelle, *Solonum tuberoſum eſculentum.*

Ces deux plantes portent régulierement leurs fleurs & leurs fruits comme les autres plantes; toute la différence qu'il y a, c'eſt, que l'arachidna de J. B. outre les fleurs & les fruits ordinaires, porte encore des ſiliques dans la terre, ſuſpendues aux fibres de la racine; & celle de Cluſ. y porte des groſſes tubéroſités. De ſorte que le P. Plumier auroit, ce me ſemble, mieux fait de nommer cette plante *arachidnoïdes*; c'eſt-à-dire, plante qui a quelque léger rapport avec l'*arachidna*.



EXPLICATION DES FIGURES.

A. La plante entiere.
B. La fleur.
C. Le pistil.
D. D. Fruits de différente grosseur.
E. E. Cosse qui renferme deux noyaux. Un tiré de la cosse.
F. Un noyau lorsqu'il se trouve seul.

Il y a quelque temps que je cultive des plantes que j'ai fait dessiner, & dont j'aurois déja donné les descriptions & les figures, si je ne les avois reservées pour un ouvrage particulier. J'en avois ramassé les semences dans les criblures du bled qu'on nous apportoit des Isles de l'Archipel, lorsque ceux qui commandoient dans cette Province furent dans l'obligation d'envoyer chercher des grains dans ce pays-là pour fournir à la subsistance de nos habitans qui s'en trouvoient dépourvûs. Dès qu'il en fut arrivé dans cette Ville, j'allai dans les greniers où l'on les avoit déposés ; j'en faisois cribler, & j'emportois les criblures que je semois ensuite : & comme je m'apperçûs que ces semences me fournissoient beaucoup de plantes curieuses, parmi lesquelles il s'en trouvoit plusieurs nouvelles, je crûs devoir continuer cette manœuvre ; de sorte que lorsqu'on eut cessé de nous apporter de ces grains, j'eus recours à Marseille, d'où je me faisois envoyer des criblures du bled de Levant, & de celui des côtes de Barbarie. Voici les noms des plantes nouvelles que j'en ai recueillies.

Brassica græca raphani fol.
Carduus græcus erysimi fol. fl. luteo.
Climenum græcum latifol. fl. vexillo violaceo labialibus petalis albis.
Jacea centauroides Africana repens fl. ianthino.
Eadem fl. ianthino dilutiori.

Melilotus græca capſulis reticulatis.

Panicum vulgare græcum, ſpica laxiori, ſem. umbilicato.

Heſperis Africana hieracii fol. hirſuto fl. minimo purpuraſcente.

Phaſeolus peregrinus fl. roſeo ſem. tomentoſo.

Turritis burſæ paſtoris fol. fl. albo.

Rapiſtrum græcum raphani fol. fl. luteo.

Stachis or. ſalviæ fol. fl. obſoletè luteſcente maculis ſpadiceis variegato.

Sinapi græcum raphani fol.

Rapiſtrum Africanum fol. multifidis, capſulis ſulcatis.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

Dans les Mémoires de 1722.

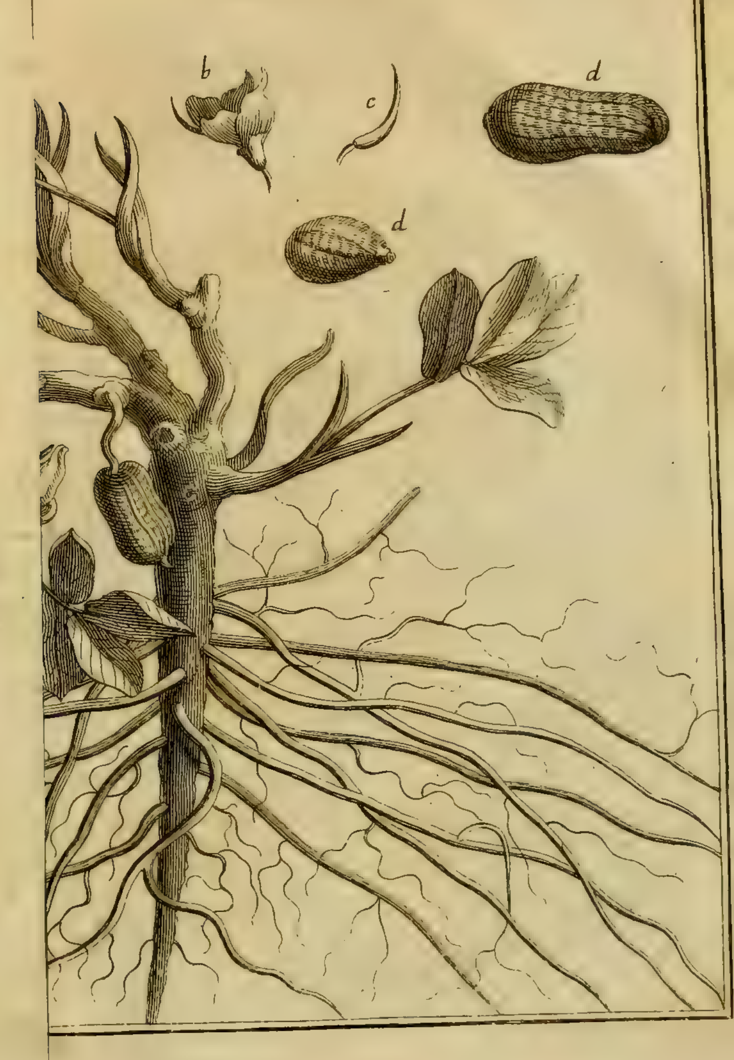
Page 29. *ligne* 8. *&* 9. *effacez*, laquelle deviendra à ſon tour l'expreſſion directe de l'angle de réfraction.

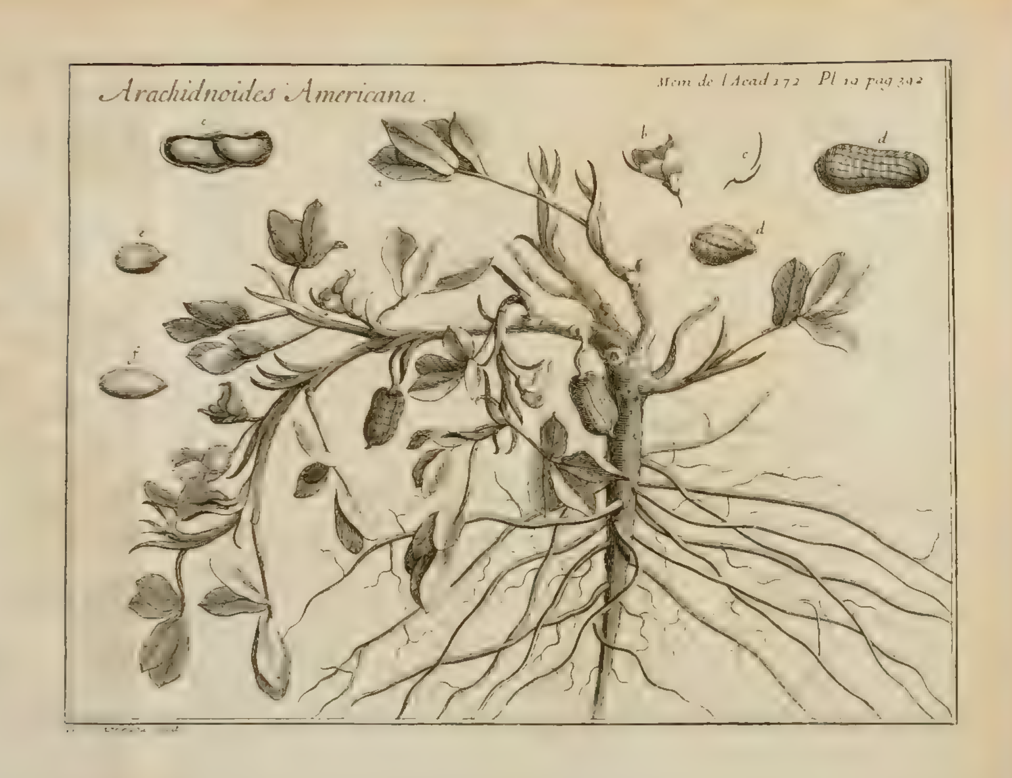
Ibid. l. 27. *liſ.* de direction par rapport au plan.

Page 37. *l. pénult.* $pp \pm \overline{xp - yy}$: *liſ.* $pp \pm 2\,\overline{xp + yy}$.

Page 44. *l.* 3. $-yy \times 1 \pm \frac{ss}{\Sigma\Sigma}$: *liſ.* $yy \times 1 - \frac{ss}{\Sigma\Sigma}$.




b
c
d
d


Arachidnoides Americana.
Mem de l Acad 172 Pl 19 pag 392
a
b
c
d
e
f